МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2B) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4B)+\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

1) Рассмотрим ур-е (2)

$$\sin(2\alpha+4B)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\Updownarrow$$

~~sin 2α =~~ $2\sin(2\alpha+2B)\cos 2B) = -\frac{4}{5}$

Из ур-е (1) ~~получаем~~ $\sin 2\alpha+2B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2B = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2B = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2B = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

2) $\left[\begin{array}{l} 2B = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ 2B = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ 2B = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ 2B = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{array}\right.$

2) $\sin(2\alpha+2B) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

~~$2\alpha+2B = \pm\arcsin\left(\mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \mp\arcsin\frac{0}{\sqrt{5}}$~~

$$2\alpha+2B = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

3) Перебором вариантов получаем, что $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = \frac{1}{2}$; $tg\alpha = -\frac{1}{2}$

Ответ. $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = \frac{1}{2}$; $tg\alpha = -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Заметим, что~~

$5^a + 12^a \geq 13^a \quad | : 13^a$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a \geq 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^a$

Заметим, что слева ф-ция ~~возрастает~~ убывает, а справа - возрастает $\Rightarrow$ $a=2$ - корень ур-я, при котором $\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a = 1 \Rightarrow$ при $a \leq 2$ справедливо выполняется.

Обратная замена

$a = \log_{12} t = \log_{12} x^2 + 18x \leq 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 18x \leq 144 \\ x^2 + 18x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 144 \leq 0 \\ x^2 + 18x > 0. \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

1) $x-2y \underset{(1)}{=} \sqrt{xy-x-2y+2}$

$$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2+1-10y-16y^2-8y+8=(3y-3)^2$

$x_1=2y-1$

$x_2=y+1$

Но $x \neq 2y-1$, т. к. $x-2y=-1$ в этом случае $\Rightarrow$

$x=y+1$

2) $$\begin{cases} x=y+1 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

$(y-1)^2+(3y-3)^2=25$

$10y^2-20y-15=0$

$D=16+4\cdot3\cdot2=2\sqrt{10}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_1 = 1+\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad x_1 = 2+\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y_2 = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \quad x_2 = 2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Проведим с ОДЗ:

$x_1-2y_1 = 2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}<0$

$x_2-2y_2 = 2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}>0 \Rightarrow$

$x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2}; \quad y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ. $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

Пусть $x^2+18x=t$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

Пусть $\log_{12}t = a$.

$5^a+12^a \geq 13^a$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Но угол ABE опирается на одну дугу с углом AFE $\Rightarrow \angle AFE = \angle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{123\sqrt{34}}{850}\right) = \arcsin\left(\frac{123\sqrt{34}}{850}\right)$

3) Заметим, что $\angle CAD = \angle CBE$ (опираются на одну хорду)

Но $\angle CBE = \angle FED$, т.к. $\triangle DBE \sim \triangle BQE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle FED \Rightarrow$ они накрест-лежащие и поэтому $FE \parallel AC \Rightarrow$ AFEC - трапеция $\Rightarrow$ CQ - высота трапеции $\Rightarrow$ CQ - высота $\triangle AFE$.

Пусть $\angle BED = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BD}{DE} =$

$= \frac{17 \cdot 2}{5\sqrt{34}} = \sqrt{34}$

См обратную сторону

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 16DE = 9AD \\ AD \cdot DE = 17 \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{16}{9}DE \\ \frac{16}{9}DE^2 = \frac{17}{\cancel{8}} \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$DE = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{34} = \frac{3\sqrt{34}}{2} \Rightarrow AD = \frac{8}{3}\sqrt{34} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \left(\frac{3}{2} + \frac{8}{3}\right)\sqrt{34} = \frac{25}{6}\sqrt{34} \Rightarrow \sin(\angle ABE) =$

$= \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{25}{6}\sqrt{34}}{\frac{85}{6}} = \frac{5}{17}\sqrt{34} \Rightarrow \angle ABE = \arcsin(\frac{5}{17}\sqrt{34})$

Но $\angle ABE = \angle AFE$, как углы опирающиеся на одну и ту же хорду. $\Rightarrow$

$\angle AFE = \arcsin(\frac{5}{17}\sqrt{34})$

3) Заметим, что $\angle CAP = \angle$ ~~FED~~ CBE,

~~Но $\angle CBE = FED$~~ т. к опираются на одну хорду.

При этом $\angle CBE = \angle FED$, т. к. $\triangle QED \sim \triangle BED$

~~Но уже~~ $\Rightarrow \angle CAD = \angle FED$, но эти углы — накрест лежащие $\Rightarrow FE \parallel AC \Rightarrow$

~~FEA~~ CQ — высота $FEAC$ (трапеции) $\Rightarrow$

CQ — высота AEF

Пусть $\alpha =$ ~~$\angle QED$~~ $\angle DBE$

$\sin\alpha = \frac{DE}{BD} = \frac{\frac{3\sqrt{34}}{2}}{17} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

~~DQ~~ $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow$ ~~BQ~~ $\Rightarrow DQ = DE \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{3\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{9}{2} \Rightarrow QC = 12{,}5 \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow QE = DE\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow$

Из теоремы о пересекающихся хордах

$FQ = \frac{CQ \cdot QB}{QE} = \frac{12{,}5 \cdot 12{,}5}{7{,}5} = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2}}{\frac{15}{2}} =$

$= \frac{125}{6} \Rightarrow FE = \frac{125}{6} + \frac{15}{2} =$

$= \frac{170}{6} = \frac{85}{3} \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot QC =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{85}{3} = \frac{125 \cdot 17}{12}$

Ответ. $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{156}{15}$; $\angle AFE =$

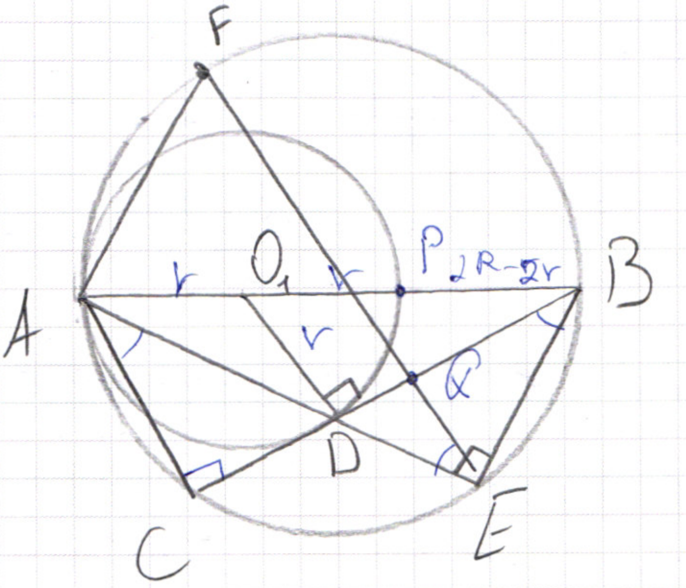
$= \arcsin\left(\frac{5}{17}\sqrt{34}\right)$; $S_{\triangle AFE} = \frac{125 \cdot 17}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



1) Заметим, что △ABC и △AEB - прямоугольные.

Т.к. BD - касательная, то $BD^2 = BP \cdot AB$

$BP = 2R-2r$; $AB = 2R \Rightarrow 17^2 = (2R-2r)2R$.

O_1 - центр окружности ω.

D - (т) точка касания $\Rightarrow O_1D \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1DB \sim \triangle ABC \Rightarrow \cancel{\frac{r}{2R} = CD}$

$$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{8.25}$$

Имеем:

$$\begin{cases} (2R-2r)2R = \cancel{288}\ 17^2 \\ \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{8.25} \Rightarrow \cancel{34R = 50R - 8r \Rightarrow} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases}(2R-2r)2R = 17^2\\ 34R = 50R - 25r\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4(R-r)R = 17^2\\ 16R = 25r \Rightarrow r = \frac{16}{25}R \Rightarrow\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r}{R} = \frac{16}{25}$$

$$4\left(R - \frac{16}{25}R\right)R = 17^2$$

$$4 \cdot \frac{9}{25}R \cdot R = 17^2$$

$$36R^2 = \frac{25 \cdot 17^2}{36} \Rightarrow R = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}$$

2) Из теоремы о пересекающихся хордах:

$AD \cdot DE = 8 \cdot 17.$

Из подобия $\triangle ADP$ и $\triangle ABE$:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AD+DE} = \frac{2r}{2R}\ ; \quad \frac{r}{R} = \frac{16}{25}.$$

Имеем:

$$\begin{cases}\frac{AD}{AD+DE} = \frac{16}{25}\\ AD \cdot DE = 8 \cdot 17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16AD + 16DE = 25AD\\ AD \cdot ED = 8 \cdot 17\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}16DE = \cancel{25}\,9AD\\ AD \cdot ED = 8 \cdot 17\end{cases}} \Rightarrow \begin{cases}DE = \frac{25}{16}AD\\ \frac{25}{16}AD^2 = 8 \cdot 17\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{8 \cdot 17} \cdot 4}{5} = \frac{4}{5} \cdot 2\sqrt{34} = \frac{8}{5}\sqrt{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = \frac{25}{16} \cdot \frac{8}{5}\sqrt{34} = \frac{5}{2}\sqrt{34} \Rightarrow AE = \frac{41}{10}\sqrt{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\angle ABE) = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{41}{10}\sqrt{34}}{2R} = \frac{41\sqrt{34} \cdot 6}{20 \cdot 85} =$$

$$= \frac{\cancel{82}\,123\sqrt{34}}{850} \Rightarrow \angle ABE = \arcsin\left(\frac{\cancel{82}\,123\sqrt{34}}{850}\right) \longrightarrow$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(a^x)' = a^x \ln$

$\log_{12} 13 = \quad 5^{\log_{12} t} = t^{\log_{12} 5}$

$5^{\log_{12}}$

$\cos\alpha = \frac{AC}{8}$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_t 5 \cdot \log_{12} t} = t^{\log_{12} 5}$

$t = 5^{\log_5 t} \quad (5^{\log_{12} t})' =$

$t^{\frac{1}{2}\log_{12} 25}$

$5^{\log_{12} t} + 5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_5 t \cdot \log_{12} 13}$

$(a^x)' =$

$5^{\log_5 t}(5^{\log_{12} t - \log_5 t} - 1) \geq (5^{\log_5 t})^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_5 t}$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log}$

$t^{\log_{12} 13} = 1$

$t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$5^{-2} - 12^{2(\log_{12} 13)} + 144$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{2} -$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} + t \geq 0.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^2-12.$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} t \log}$

$t^{\log_{12} 5} + t = t(t^{\log_{12} 5 - 1} + 1)$

$\log_{12} 5 = \log_{12} 13 \cdot \log_{13} 5$

$5^{\log_{12} 5 \cdot \log_5 t} \geq t^{\log_{12} t \log_t 13} - t^{\log_{\cancel{t}} t \cdot \cancel{\log}}$

$\cancel{5^{\log_{12} 5} 12}$

$5^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t} - 12^{\log_{\cancel{12} t}}$ $\quad 13 =$

$5^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t} - 12^{\log_{12} t}$ $\quad 5^3 = 125$

$\cancel{12} \; 5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq \frac{\cancel{13}}{12} \log_{12} t$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}.$

$\cancel{5^{\log}}$ $\cancel{5^{\log_{12} t}} 7$ $\quad D \Rightarrow \log_{12} t = \log_5 x$

$\cancel{5^{t}}$ $\quad 5^{\log_{12} t} = x \Rightarrow x = \log_5 \log_{12} t \Rightarrow$

$\cancel{13^{\log_{12} t}} =$

$13^{\log_{12} t} = (5^2 - 12)^{\log_{12} t}$

$5^{\log_{12} t}$ $\quad 5^x + 12^x \geq 13^x$

$5^{\log_{12} t} \cancel{t}$

$5^x \geq 13^x - 12^x$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

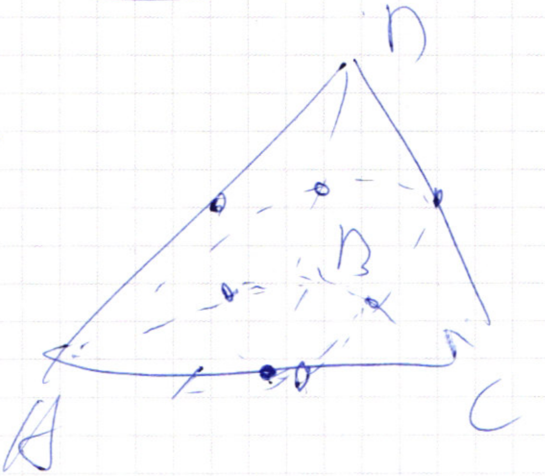
(Нумеровать только чистовики)

$5^a + 12^a \geq 13^a \quad | : 13^a$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1.$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$\log_2(5^a + 12^a) \geq a \log_2 13$.



$5^a + 12^a \geq 13^a$

$\frac{5}{13} = ($

$(1-x^2)^a$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$324 + 4 \cdot 144 =$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b$$

$$3+\frac{2}{4x+3}$$

$$12x+11 \leq (4x+3)(ax+b)$$

$$12x+11 \leq 4ax^2+3ax+3b+4bx$$

$$4ax^2$$

$$3+\frac{2}{4x+3} \qquad f'(x)=\frac{2}{(4x+3)^2}$$

$$\cancel{3+\frac{2}{4x}} \qquad f'(x)=\left(\frac{2}{4x+3}\right)'=2$$

$$\left(2\left((4x+3)^{-1}\right)\right)'=2\left(-\frac{1}{(4x+3)^2}\cdot 4\right)$$

$$-\frac{8}{(4x+3)^2}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(\angle CAD) = \sin(\angle ABC) \Rightarrow tg(\angle CAD) = ctg(\angle ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1.$

$a = 0$

$(\sin\alpha)^a + (\cos\alpha)^a \geq 1.$

$3^x + 5^x$

13^a

$13^a - 12^a - 5^a$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

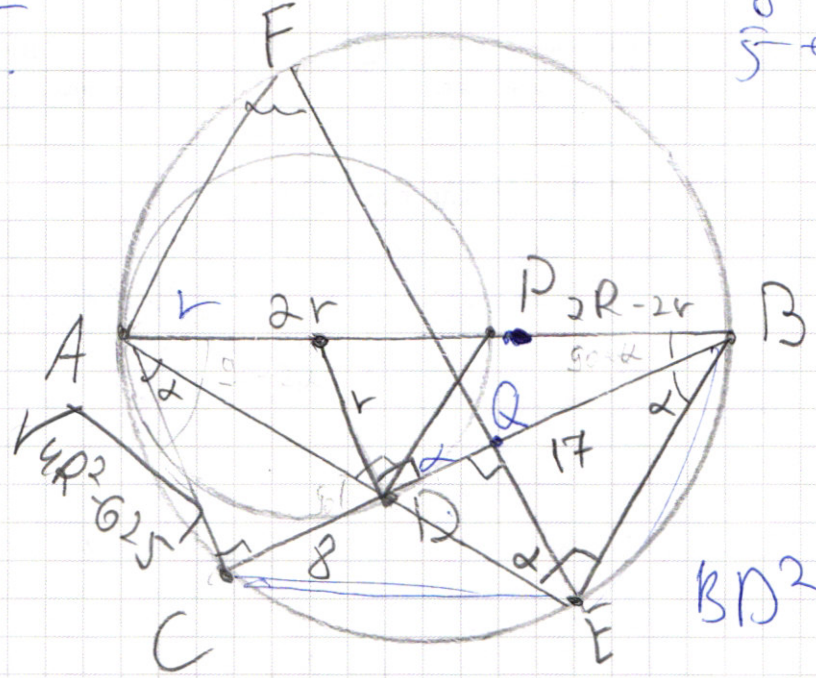
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.

$\frac{8}{5}+\frac{5}{2}=\frac{16+25}{10}=$

41.



$BD^2=(2R-2r)2r.$

$AE=4R^2-$

1) По теореме о пересекающихся хордах: $AD\cdot DE=BD\cdot CD=17\cdot 8.$

2) Проведем PD так, что AP - диаметр ω. Заметим, что $\triangle AEB\sim\triangle APD$

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AD}{AE}=\frac{AD}{AD+DE}$$

3) Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$

$AC=\sqrt{4R^2-25^2}\Rightarrow AD=\sqrt{4R^2-25^2+8^2}$

~~$\angle ABC=$~~ $\sin(\angle ABC)=\cancel{\frac{AC}{25}}\ \frac{AC}{2R}$

~~$\sin(\angle A)\cos(\angle CAD)=\frac{AC}{8}$~~

~~но $\angle CAD=90-\angle ABC$ (т.к. $\angle CDA+\angle BDP=90$) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow\sin(\angle ABC)=\cos(\angle CAD)\Rightarrow\frac{AC}{2R}=\frac{AC}{8}\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow R=4.$~~

$\angle CAD=90-\angle ABC$, т.к. $\angle CDA+\angle BDP=90°$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\sqrt{5}((\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$4\sin(2\alpha+2\beta) - \sqrt{5}\sin(2\alpha+4\beta) - \sqrt{5}\sin 2\alpha = 0$

$2\alpha = x;\ 2\beta = y$

$4\sin(x+y) - \sqrt{5}\sin(x+2y) - \sqrt{5}\sin x = 0$

$4\sin(x+y) - \sqrt{5}\sin((x+y)+y) - \sqrt{5}\sin x = 0$

$4\sin(x+y) - \sqrt{5}\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y - \sqrt{5}\sin x = 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin\left(\frac{2\alpha+2\alpha+6\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha-2\beta}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+3\beta)\cos(\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = \frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right.$

$2\beta = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}\right)$

$2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right.;\quad 2\beta = \pi - \arcsin($

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $tg\alpha - ?$

$$\begin{cases} \sin 2(\alpha+B) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4B) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2B + \sin 2B \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 4B + \sin 4B \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$4(\sin 2\alpha \cos 2B + \sin 2B \cos 2\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{5}(\sin 2\alpha \cos 4B + \sin 4B \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$4\sin 2\alpha \cos 2B + 4\sin 2B \cos 2\alpha = \sqrt{5}\sin 2\alpha \cos 4B$$

$$4\sin 2\alpha \cos 2B + 4\sin 2B\cos 2\alpha - \sqrt{5}\sin 2\alpha \cos 4B - \sqrt{5}\sin 4B \cos 2\alpha - \sqrt{5}\sin 2\alpha = 0$$

$$\cancel{4\sin} \sin 2\alpha(4\cos 2B - \sqrt{5}\cos 4B - \sqrt{5}) +$$

$$\sin(2\alpha+2B) = \sin 2\alpha \cos 2B + \sin 2B \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

1) $\cos 2B = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

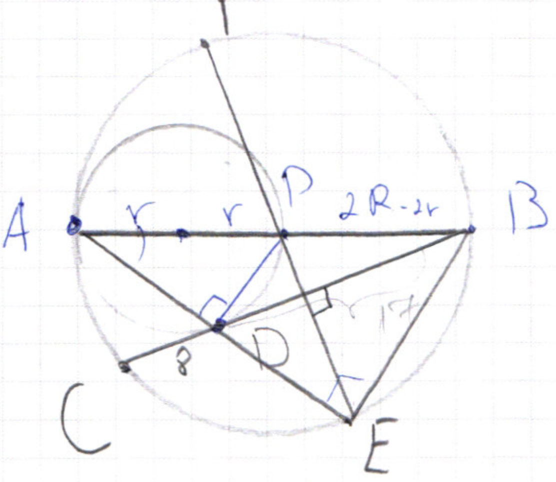
$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha - \cancel{\tfrac{4}{4}}\,\cancel{4}\cos 2\alpha = -\cancel{\tfrac{4}{4}} - 1$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$



r; R; $\angle AFE$

S_{AEF}

$CD=8$;

$BD=17$

1) ~~AEZ~~: $AD \cdot DE = CD \cdot BD$

$AD \cdot DE = 8 \cdot 17$

$\triangle ADP \sim \triangle AEB$.

$\dfrac{2r}{2R} = \dfrac{AD}{AD+DE}$

$BP \cdot AP = BD^2$.

$(2R-2r)\,2R = 289$.

$5^x + 12^x \geq 13^x$ $\quad$ $5^x + 4^x \geq 5^{-x}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x \geq 1.$ $\quad$ $\log$ $\quad$ $5^x + 4^x \geq 5^{-x}$

$\log_2\left(\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x\right) \geq 0.$ $\quad$ $\log_2 3^x + \log_4$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$5^x + 12^x \geq \cancel{5^2+12^2}$

$\sin\alpha^x + \cos\alpha^x \geq 1.$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 < 0.$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x - \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\left(\frac{12}{13}\right)^x - \left(\frac{12}{13}\right)^2\right) < 0.$$

$\log_2 3^x + \log_2 2^{4x}$

$3^x = \log_3 3$

$\sin 2\alpha \cos 2B + \sin 2B \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+13 \end{cases}$$

1) $(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

2) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy-x-2y+2 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2+1-10y-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2=2y-1$

$x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

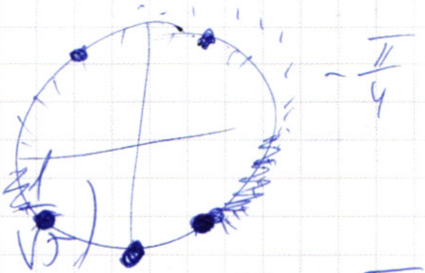
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

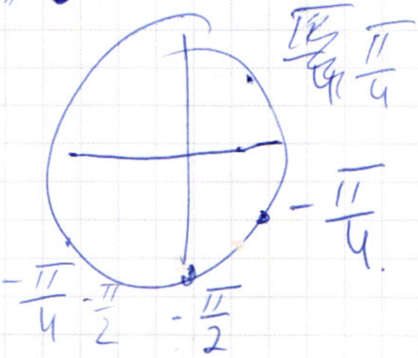
$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$



$2\alpha + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$\alpha = 0 \Rightarrow$

1) $\operatorname{tg}\alpha = 0$



2) $2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha = 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt5}}{\frac{2}{\sqrt5}} = -\frac{1}{2}$

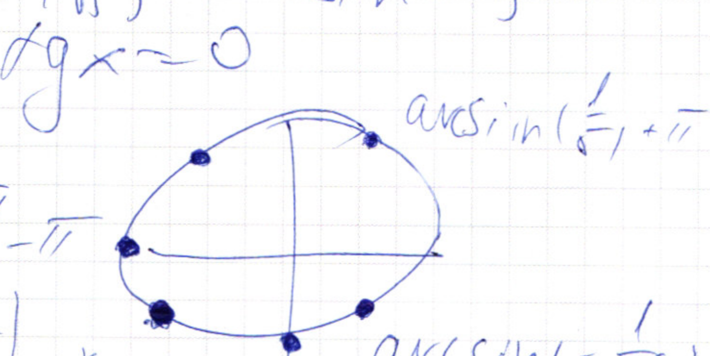
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}.$

3) $2\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha + \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha = -\pi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$

4) $2\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi$



$2\alpha + 2\beta = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \frac{\pi}{2}$

$\alpha = -\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{1}{2}.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x = 2y - 1$ $\quad x - 2y = -1$ не подходит

$(2y-1-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$(2y-3)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$4y^2 + 9 - 12y + 9y^2 + 9 - 18y = 25$

$13y^2 - 30y - 7 = 0$

$D = 900 + 4 \cdot 7 \cdot 13 = 364 + 900 = 1264 = 2^5 \cdot 3^3 =$
$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 6 = 4 \cdot 3\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$.

$28 \cdot 13 = 84 + 28\cdot 10$; $\quad 84 + 280 = 364$

$1264 = 2 \cdot 632 = 2 \cdot 2 \cdot 316 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 108 = 2^4 \cdot 54 = 2^5 \cdot 27$

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = \frac{30 + 12\sqrt{6}}{2} = 15 + 6\sqrt{6} \\ y_2 = 15 - 6\sqrt{6}. \\ x_1 = 30 + 12\sqrt{6} - 1 = 29 + 12\sqrt{6} \\ x_2 = 29 - 12\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

ОДЗ: $x - 2y \geq 0$.

$29 + 12\sqrt{6} - 30 - 12\sqrt{6} < 0$.

$29 - 12\sqrt{6} - 30 + 12\sqrt{6} < 0$.

2) $x = y + 1$

$(y + 1 - 2)^2 + (3y - 3)^2 = 25$

$(y-1)^2 + (3y-3)^2 = 25$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y^2+1-2y+9y^2-18y+9y=25.$

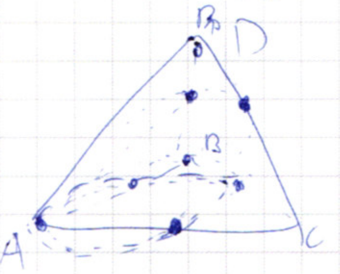
$10y^2-20y-15=0.$

$2y^2-4y-3=0.$

$D=16+4\cdot 3\cdot 2=16+24=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$

$y_1=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y_2=\frac{4-2\sqrt{10}}{4}=\frac{2-\sqrt{10}}{2}\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}.$



$x_1=y_1+1=2+\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x_2=y_2+1=2-\frac{\sqrt{10}}{2}.$

$x_1-2y_1=2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}<0.$

$x_2-2y_2=2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}>0$

Ответ. $x=2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}.$

№5.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}t}\geq|t|^{\log_{12}13}-t;\ t>0.$

$5^{\log_{12}t}\geq t^{\log_{12}13}-t$

$5^{\log_{12}t}\geq t(t^{\log_{12}13-1}-1)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)