МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x - y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x - 2y) - \sqrt{3}\sin(x - 2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = -44 \end{cases}$$

1) $7x + \sqrt[3]{49x^2-y^2} - y - \sqrt[3]{49x^2-y^2} = 64$

$7x - y = 64$

2) $\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{(7x+y)(7x-y)} = 20 \\ y + \sqrt[3]{(7x+y)(7x-y)} = -44 \end{cases}$

$\begin{cases} 7x + 4\sqrt[3]{7x+y} = 20 \\ y + 4\sqrt[3]{7x+y} = -44 \end{cases}$

3) $7x + y + 8\sqrt[3]{7x+y} = -24$

$\sqrt[3]{7x+y} = t$

$t^3 + 8t + 24 = 0$

$t = -2$

$(t+2)(t^2 - 2t + 12) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t^2 - 2t + 12 = 0 \end{array}\right.$

3.1) $t^2 - 2t + 12 = 0$

$D_1 = 1 - 12 = -11$

$D_1 < 0$, корней нет

4) $\begin{cases} \sqrt[3]{7x+y} = -2 \\ 7x - y = 64 \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x + y = -8 \\ 7x - y = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = -8 - y \\ -8 - 2y = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -36 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(4; -36)$.

Задание 3.

Обозначим число, удовлетворяющее данным условиям как $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, где $a_1 \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, а $a_{2-7} \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Тогда данное число должно удовлетворять одному из следующих условий.

1. $\overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} = 12531$

Для минимальной степени 10 равной 3.

2. $\overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_7} = 12531$

Для минимальной степени 10 равной 4.

Заметим, что для минимальной степени 10 больше 4, ~~то~~ сумма оставшихся будет $\geq \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \geq 1000000 > 12531$, а для минимальной степени 10 меньшей ~~2~~ 3, сумма оставшихся будет $\leq 99 + 999 + 9999 < 12531$.

~~3. $\overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} = 12531$~~

~~Для минимальной степени 10 равной 2.~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} = 12531$

$3a_7 + 30a_6 + 300a_5 + 2000a_4 + 10000a_3 = 12531$

$12531 \underset{10}{\equiv} 1$

$3a_7 + 30a_6 + 300a_5 + 2000a_4 + 10000a_3 \underset{10}{\equiv} 3a_7$

$3a_7 \underset{10}{\equiv} 1$

Единственная цифра, которая при умножении на 3 даёт при делении на 10 остаток 1 – 7.

$a_7 = 7$.

$30a_6 + 300a_5 + 2000a_4 + 10000a_3 = 12510$

$3a_6 + 30a_5 + 200a_4 + 1000a_3 = 1251$

Аналогично

$a_6 = 7$

$3a_5 + 20a_4 + 100a_3 = 123$

Единственная цифра, которая при умножении на 3 даёт при делении на 10 остаток 3 – 1

$a_5 = 1$

$2a_4 + 10a_3 = 12$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_4 = 6 \\ a_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_4 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда наше число имеет вид
$\overline{a_1a_2\,06177}$ или $\overline{a_1a_2\,11177}$
2) Заметим, что 2 случай является частным случаем 1, т.к. для него проходят аналогичные рассуждения и получается одно из чисел вида
$\overline{a_1\,006177}$ или $\overline{a_1\,011177}$
Тогда кол-во семизначных чисел, удовлетворяющих условию равно $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$
Ответ: 180.

Задание 2.

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

$$2\sqrt{\log_{5x} x} \leq \log_{125x} x \cdot (-2)$$

$$\sqrt{\log_{5x} x} \leq -\log_{125x} x$$

$$\begin{cases} \log_{5x} x \leq \log^2_{125x} x \\ \log_{5x} x \geq 0 \\ \log_{125x} x \leq 0 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 5x} - \dfrac{1}{\log^2_x 125x} \leq 0 \\ x \neq \dfrac{1}{5} \\ x \neq \dfrac{1}{125} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log^2_x 125x - \log_x 5x) \cdot \log_x 5x \cdot \log^2_x 125x \leq 0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \\ \log_x 5x \neq 0 \\ \log_x 125x \neq 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.1) $\log_x^2 125x - \log_x 5x = 0$

$(\log_x 125 + \log_x x)^2 - (\log_x 5 + \log_x x) = 0$

$(3\log_x 5 + 1)^2 - \log_x 5 - 1 = 0$

$\log_x 5 = t$

$(3t+1)^2 - t - 1 = 0$

$9t^2 + 6t + 1 - t - 1 = 0$

$9t^2 + 5t = 0$

$t(9t+5) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{5}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x 5 = 0 \\ \log_x 5 = -\frac{5}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_x 5 = -\frac{5}{9}$

$x = 5^{-\frac{9}{5}}$

$f(x) = \log_x^2 125x - \log_x 5x$

$f(5^{-\frac{8}{5}}) > f(5^{-\frac{9}{5}})$

~~$\log_x^2 125x - \log_x 5x \Leftrightarrow x = 5$~~

$\log^2{}_x 125x - \log_x 5x \geqslant \Leftrightarrow x - 5^{-\frac{9}{5}} \geqslant 0$

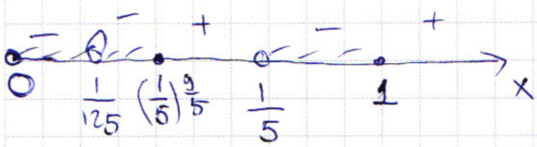
1.2) $\begin{cases} \log_x 5x \neq 0 \\ \log_x 125x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \end{cases}$

1.3)

$$\begin{cases} \left(x - 5^{-\frac{9}{5}}\right)\log_{x} 5x \leqslant 0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - 5^{-\frac{9}{5}}\right)(x-1)(5x-1) \leqslant 0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \end{cases}$$



$x \in \left(0; \frac{1}{125}\right) \cup \left(\frac{1}{125}; \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{9}{5}}\right] \cup \left(\frac{1}{5}; 1\right]$

2) $\log_{5x} x \geqslant 0$

$(5x-1)(x-1) \geqslant 0$

$$\begin{cases} x \in \cancel{\left[\frac{1}{5}; 1\right]} \quad \left(0; \frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty) \\ x \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$x \in \cancel{\left(\frac{1}{5}; 1\right]} \quad x \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup [1; +\infty)$

3) $\log_{125x} x \leqslant 0$

$(125x-1)(x-1) \leqslant 0$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{125}; 1\right] \\ x \neq \frac{1}{125} \end{cases}$$

$x \in \left(\frac{1}{125}; 1\right]$

4) $$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{5}\right) \cup \{1\} \\ x \in \left(0; \frac{1}{125}\right) \cup \left(\frac{1}{125}; \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{9}{5}}\right] \cup \left(\frac{1}{5}; 1\right] \end{cases}$$

$x \in \left(\frac{1}{125}; \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{9}{5}}\right] \cup \{1\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

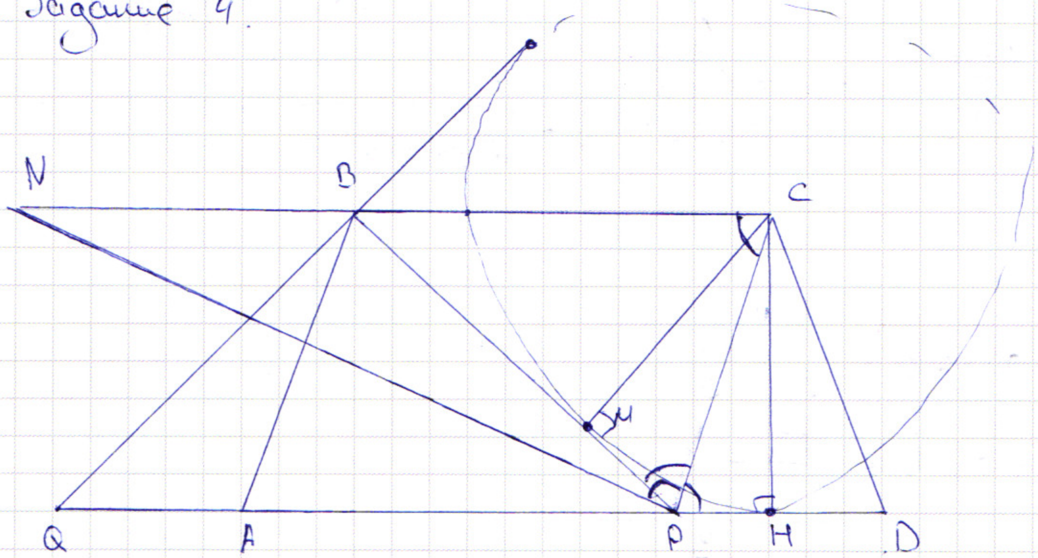
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 4.



$\angle ADC - ?$, $\angle NQC - ?$, $S(NCDQ) - ?$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$

$\triangle NPC \sim \triangle CHP$ (3 угла, $\angle NCP = \angle CPH$, $\angle NPC = \angle CHP = 90°$)

$\frac{NC}{CP} = \frac{CP}{PH} = \frac{NP}{CH}$

$\cancel{\frac{26}{12x} = 26}$ $\quad \frac{NP}{CP} = \frac{5}{12}$

$NP = 5x$, $CP = 12x$

$NP^2 + CP^2 = NC^2$

$x = 2$

$NP = 10$, $CP = 24$

$PH = \frac{120}{13}$, $CH = \frac{50}{13}$

$CM \perp BP$

$\triangle CMP = \triangle CHP$ (3 стороны, $MP = PH$ (отрезки касат))

$\angle MPC = \angle HPC$

$\triangle BPC$ р/б $(BC = BP)$

$$BP = BC = \frac{12}{\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{12})}$$

$$HD = \frac{AD - BC}{2} = AH - BC = \cancel{10}\ 13 + \frac{120}{13} - \frac{12}{\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{12})}$$

$$\angle ADC = \operatorname{arctg}\left(\frac{CH}{HD}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{50}{13}}{13 + \frac{120}{13} - \frac{12}{\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{12})}}\right)$$

Задание 6.

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

$$\sqrt{50 - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2} \leq ax + b \leq \frac{\frac{85}{4} - (x-1)^2}{3}$$

$x = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ – ? не меньше $2yx$

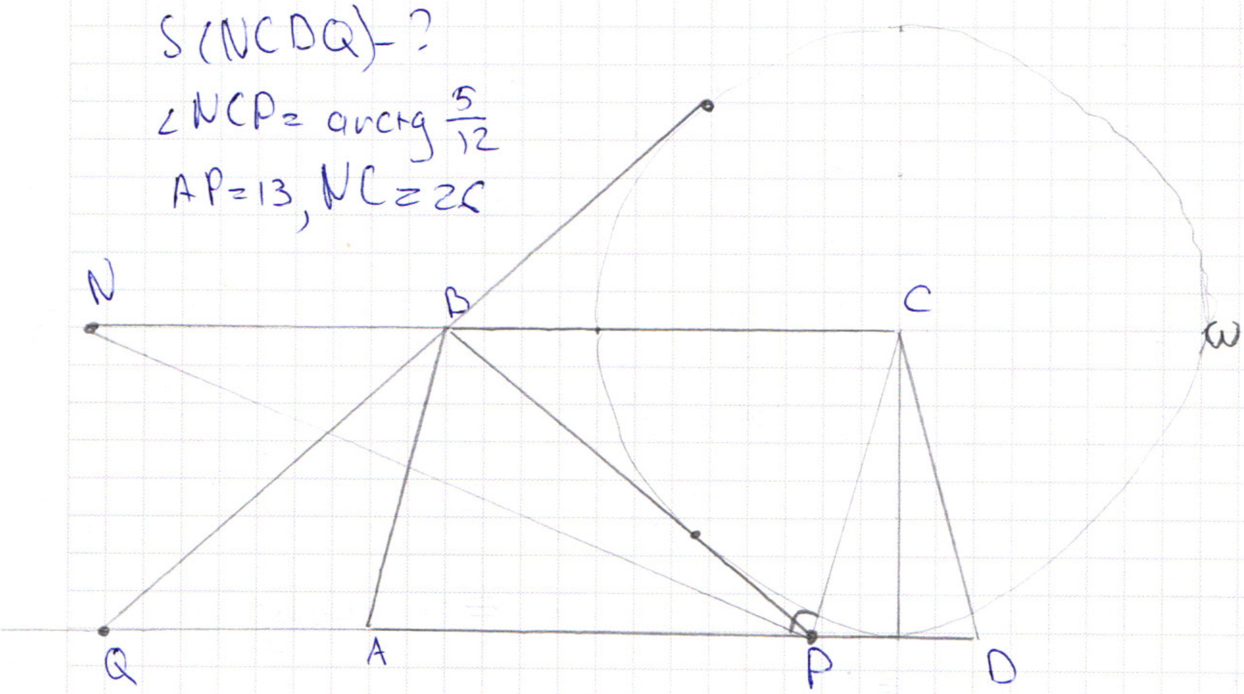
$\angle ADC$ – ?

$\angle NQC$ – ?

$S(NCDQ)$ – ?

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$AP = 13$, $NC = 26$



$\sqrt{50}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} = 12531$

$3 \cdot a_7 + 30 \cdot a_6 + 200 \cdot a_5 + 1000 \cdot a_4 = 12531$

$1 \cdot 3 = 3$ Запишем произведение 3 и каждой цифры.

$2 \cdot 3 = 6$

$3 \cdot 3 = 9$

$4 \cdot 3 = 12$

$5 \cdot 3 = 15$

$6 \cdot 3 = 18$

$7 \cdot 3 = 21$

$8 \cdot 3 = 24$

$9 \cdot 3 = 27$

$0 \cdot 3 = 0$

$\log_x 5x \geq 0$

$\log_x 5 + 1 \geq 0$

$\log_x 5 \geq -1$

$x \geq \frac{1}{5}$

$\log_x 6x \geq$

$(x-1)(5x-1)$

Заметим, что $30 \cdot a_6 + 200 \cdot a_5 + 1000 \cdot a_4 \underset{10}{\equiv} 0$, тогда

$3 \cdot a_7 \underset{10}{\equiv} 1$, т.к. $12531 \underset{10}{\equiv} 1$

$a_7 = 7$

$3 \cdot a_6 + 20 \cdot a_5 + 100 \cdot a_4 = 1251$

Аналогично $a_6 = 7$

$2a_5 + 10a_4 =$

$$\begin{array}{r} 22\\ +11177 \\ +1177 \\ 177 \\ \hline 12531 \end{array}$$

☑ черновик ~~чистовик~~ (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ~~3~~ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = \frac{-9\cos x}{2} + \frac{-9\sin x \cdot \sqrt{3}}{2}$

$\cancel{\sin x} + \cancel{4{,}5\cos}$

$\sin x \cos y + 4{,}5\cos x - \cos x \sin y + 4{,}5\sqrt{3}\sin x = C$

$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leq ax + 6 \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$

$x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$

$-x^2 + 2x + \frac{81}{4}$

$x^2 + 5x - \frac{175}{4} = 0$

$-(x^2 - 2x + 1) + \frac{85}{4}$

$D = 25 + 175 = 200$

$-(x-1)^2 + 21\frac{1}{4}$

$\frac{85}{12}$

$x = \frac{-5 \pm 10\sqrt{2}}{2}$

$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{200}{4} = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - 50$

$50 - \left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

$-(+x-1)^2 + \frac{82}{4} = -x^2 + 2x - 1 + \frac{85}{4}$

$50 - 9 = 41$

$50 - 49 = 1$

$-4x^2 + 8x + 81 =$

9

$-x^2 + 2x + \frac{81}{4} = -(x-1)^2 + \frac{82}{4} = -(x-1)^2 + 20\frac{1}{2}$

$50 - \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 =$

$\left(-x^3 + \frac{x^2}{3} + \frac{27}{4}x\right)'$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~HD~~

$HD = \frac{AH + HD - BC}{2}$

$2HD - HD = AH - BC$

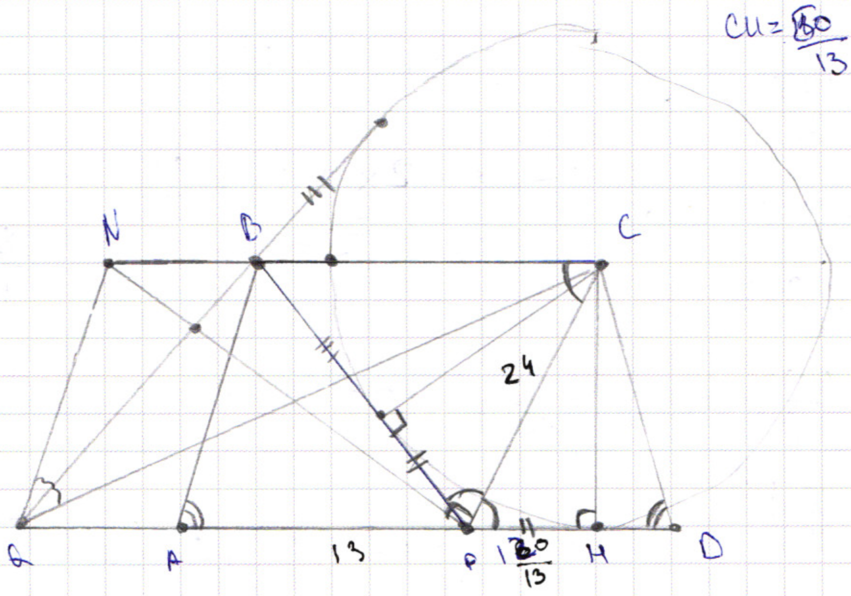
$\angle HDC = \operatorname{arctg} \frac{CH}{HD} = \operatorname{arctg} \frac{CH}{AH - BC}$

$) = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$

$BC = BP = \frac{12}{\cos(\operatorname{arctg} \frac{5}{12})}$

$CH = \frac{180}{13}$

$HD = \cancel{AH + P}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AP = 13$

$NC = 26$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$NP = 5x = 10$

$CP = 12x = 24$

$NC = \sqrt{169x^2} = 13x = 26$

~~$\angle ADC = \arccos$~~

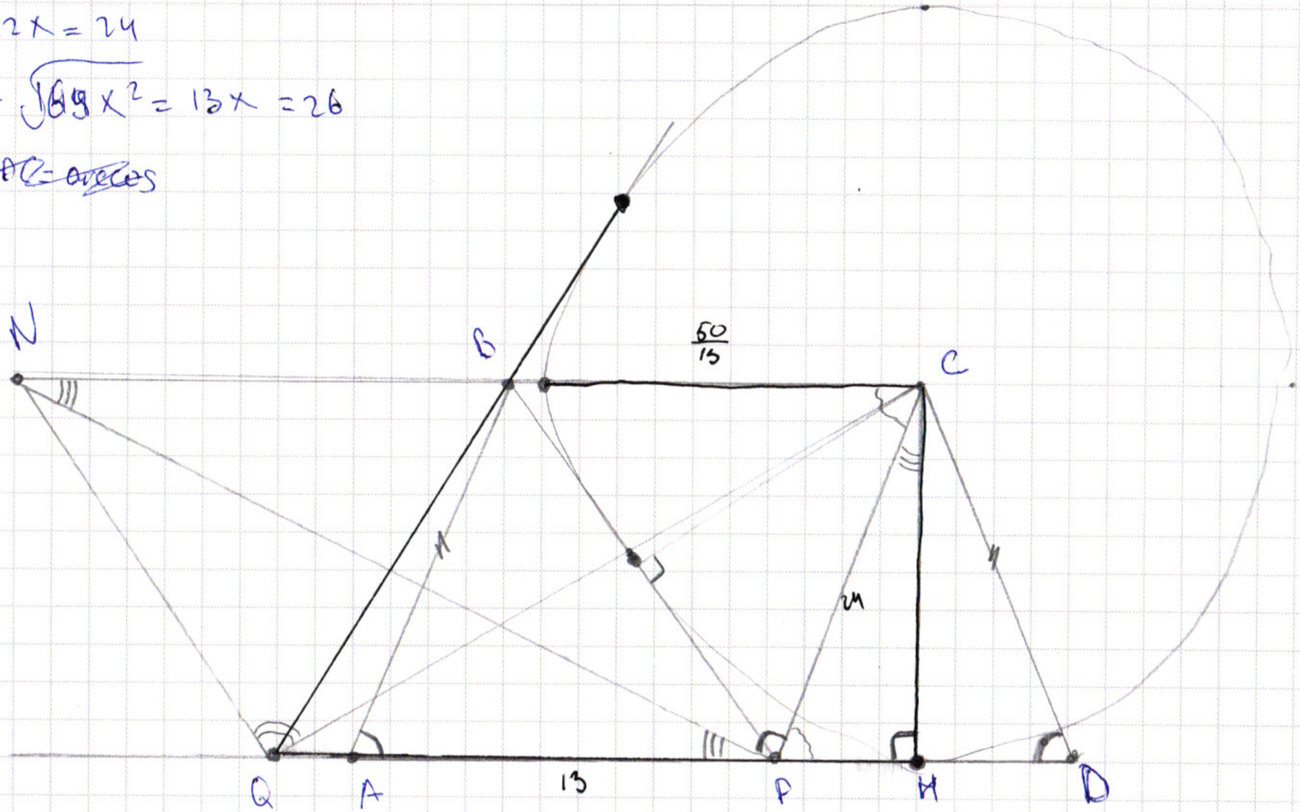
$\angle ADC,\ \angle NQC,\ S(NCDQ) - ?$

$\triangle CPH \sim \triangle NCP$

$\frac{CP}{NC} = \frac{CH}{NP} = \frac{PH}{CP} \qquad \frac{5}{13} = \frac{CH}{5x} = \frac{PH}{12x}$

$CH = \frac{25}{13}x = \frac{50}{13} \qquad PH = \frac{60}{13}x = \frac{120}{13}$

$x = 2$

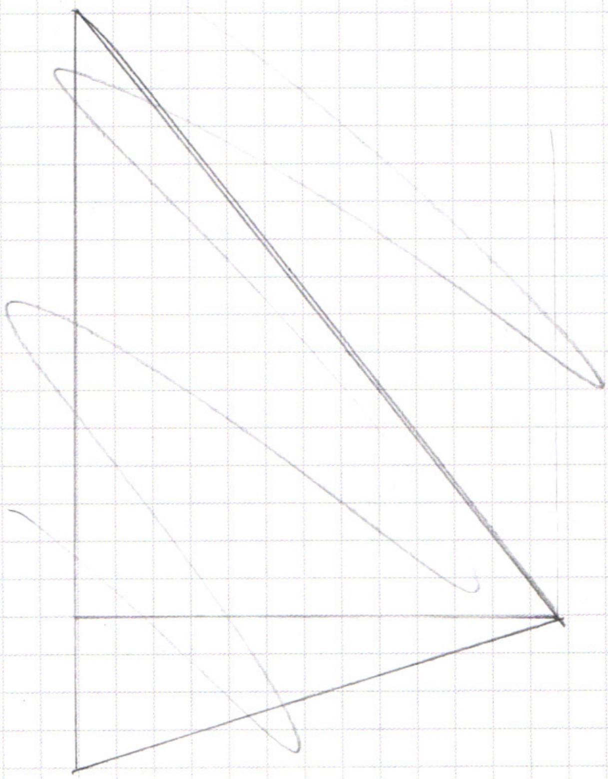


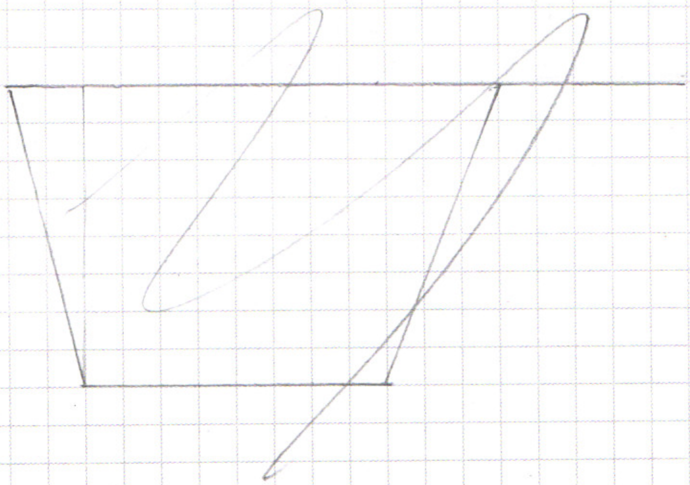
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\overline{a_5 a_6 a_7} + \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} = 12531$

$a_3 \cdot 10000 + a_4 \cdot 2000 + a_5 \cdot 300 + a_6 \cdot 30 + a_7 \cdot 3 = 12531$

$a_7 \cdot 3$ имеет 1 на конце $\Rightarrow a_7 = 7$

$a_3 \cdot 1000\cancel{0} + a_4 \cdot 200\cancel{0} + a_5 \cdot 30\cancel{0} + 3\cancel{0} \cdot a_6 = 1251\cancel{0}$

$a_6 \cdot 3$ имеет 1 на конце $\Rightarrow a_6 = 7$

$a_3 \cdot 1000 + a_4 \cdot 200 + a_5 \cdot 30 = 1230$

$100 \cdot a_3 + 20 \cdot a_4 + 3 \cdot a_5 = 123$

$3 \cdot a_5$ имеет 3 на конце $\Rightarrow a_5 = 1$

$10 a_3 + 2 a_4 = 12$

$\left[\begin{array}{l} a_4 = 1 \\ a_4 = 6 \end{array}\right.$

1.1 $a_4 = 1$

$10 a_3 = 10$

$a_3 = 1$

1.2 $a_4 = 6$

$a_3 = 0$

11177 06177

$9 \cdot 10 \cdot 2$

$+ \begin{array}{r} 9999 \\ 999 \\ 99 \end{array}$

10000

1000

$(1 + \log_5 x) \cdot \log_5 x > 0$

$\frac{1}{\log_5 x} > -1$

$\cancel{\log}$

$\cancel{(-\log_5 x) \cdot \log_5 x}$

2) Аналогично $a_7 = 7$

$a_6 = 7$

$a_5 = 1$

$20 a_3 + 3 a_4 = 12$

$a_4 = 3$

$\log_{x} 5x > 0$

$x^n = 5x$

$\log_x 5 + \log_x x > 0$

$\log_x 5 + 1 > 0$

$\log_x 5 > -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{\log_{5x} x^4} \le \log_{125x} \frac{1}{x^2}$

$\log_{5x} x^4 = \log_{5x} x^4 + \log_{5x}$

$\sqrt{\log_{5x} x} \le -\log_{125x} x$

$\log_{5x} x \geq 0$

$\log_{125x} x \le 0$

$\log_{5x} x \le \log^2_{125x} x$

$\begin{cases} (5x-1)(x-1) \geq 0 \\ (125x-1)(x-1) \le 0 \end{cases}$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\begin{cases} x \in [\frac{1}{125}; 1] \\ x \in (0; \frac{1}{5}] \cup [1; +\infty) \end{cases}$

$\frac{1}{\log_x 5x} \le \frac{1}{\log^2_x 125x}$

$\log^2_x 125x - \log_x 5x$

$x \in [\frac{1}{125}; \frac{1}{5}] \cup \{1\}$

$\log^2_x 125x - \log_x 5x = \log^2_x 125$

$\log_{5^{-\frac{9}{5}}} 5 \cdot 5^{-\frac{9}{5}} =$

$(\log_x 125 + \log_x x)^2 - \log_x 5$

$\frac{4}{9}$ $= -\frac{5}{9}\log_5 5^{-\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5} \cdot -\frac{5}{9}$

$x^{-\frac{5}{9}} = 5$

$x = 5^{-\frac{9}{5}}$

$\left(5^{-\frac{9}{5}}\right)^{-\frac{5}{9}} = 5^{-\frac{9}{5} \cdot -\frac{5}{9}} = 5$

$\log_x 125x = \log_x 125 + \log_x x$

$\log_{5^{-\frac{9}{5}}} 125 \cdot 5^{-\frac{9}{5}} - \log_{5^{-\frac{9}{5}}} 5^{-\frac{9}{5}} \cdot 5 =$

lo.

$f(x = 5^{-\frac{8}{5}})$

$= \cancel{\log_5 125}\ 5$

$f(x =$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{8}{5}} =$ $x = 5^{-\frac{8}{5}}$

$-\frac{5}{9} \log_5 5^{\frac{6}{5}} = \frac{6}{5} \cdot \cancel{\left(-\frac{9}{5}\right)} =$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{9}{5}}$

$\log^2_{5^{-\frac{8}{5}}} 5^{\frac{7}{5}} = \left(-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$

$= -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ $-\frac{4}{9}$

$\log_{5^{-\frac{8}{5}}} 5^{-\frac{3}{5}} = \frac{3}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$7x+\sqrt[3]{(7x-y)(7x+y)}=20$

$y+\sqrt[3]{(7x-y)(7x+y)}=-44$

$7x-y=20+44=64$

$\begin{cases} 7x+4\sqrt[3]{7x+y}=20 \\ y+4\sqrt[3]{7x+y}=-44 \end{cases}$

$7x+y+8\sqrt[3]{7x+y}=-24$

$\sqrt[3]{7x+y}=t$

$t^3+8t+24=0$

$t=-2$

$\cancel{t=-2}$

$$\begin{array}{l|l} t^3+8t+24 & t+2 \\ \hline t^3+2t^2 & t^2-2t+12 \\ -2t^2+8t & \\ -2t^2-4t & \\ 12t+24 & \\ 12t+24 & \\ 0 & \end{array}$$

$(t+2)(t^2-2t+12)=0$

$t^2-2t+12=0$

$D_1=1-12$

$D<0$

нет корней

$\sqrt[3]{7x+y}=-2$

$7x+y=-8$

$7x-y=64$

$7x=-8-y$

$-8-2y=64$

$-2y=72$

$y=-36$

$x=28$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(2)

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \le \log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{cases} x > 0,\ x \ne \frac{1}{5} \\ x \ne \frac{1}{125} \end{cases}$$

$$\log_{5x} x^4 = 4\log_{5x} x$$

$$\log_{125x} \frac{1}{x^2} = -2\log_{125x} x$$

$$(125x)^n = x$$

$$125^n \cdot x^n = x$$

$$x^{n-1} = \frac{1}{125^n}$$

$$\sqrt{4\log_{5x} x} \le -2\log_{125x} x$$

$$\log_{5x} x = \frac{1}{\log_x 5x}$$

$$\sqrt{\log_{5x} x} \le -\log_{125x} x$$

$$\log_{125x} x = \frac{1}{\log_x 125x}$$

$$\log_{125x} x \le 0$$

$$\log_{5x} x \le \log^2_{125x} x$$

$$\frac{1}{\log_x 5x} - \frac{1}{\log_x^2 125x} \le 0$$

$$\begin{cases} (\log_x^2 125x - \log_x 5x) \cdot \log_x 5x \cdot \log_x^2 125x \le 0 \\ \log_x 5x \ne 0 \\ \log_x^2 125x \ne 0 \end{cases}$$

log

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_7}$$

1. $a_7 + \overline{a_6 a_7} + \overline{a_5 a_6 a_7} = 12531$

2. $\overline{a_6 a_7} + \overline{a_5 a_6 a_7} + \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 12531$

3. $\overline{a_5 a_6 a_7} + \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} =$
$= 12531$

4. $\overline{a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} = 12531$

5. $\overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} = 12531$

$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} > 12531$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)