

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ . Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 ~ 1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}} \quad 1)$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{14} \quad 2)$$

$$2) \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{14}$$

~~$$2 \sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{14}$$~~

~~$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{14}$$~~

~~$$2 \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \cos 2\beta = -\frac{8}{14}$$~~

$$\cos 2\beta = -\frac{8}{14} \cdot \left(-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$1) \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin^2(2\alpha + 2\beta) + \cos^2(2\alpha + 2\beta) = 1$$

$$\cos^2(2\alpha + 2\beta) = 1 - \sin^2(2\alpha + 2\beta)$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{14}} = \sqrt{\frac{13}{14}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$$

Итак: $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{14}}$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{\frac{-1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{14}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{14}}} + \sin 2\alpha = -\frac{3}{12}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{3}{12} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{225}} = \sqrt{\frac{225}{225}} = \frac{15}{12}$$

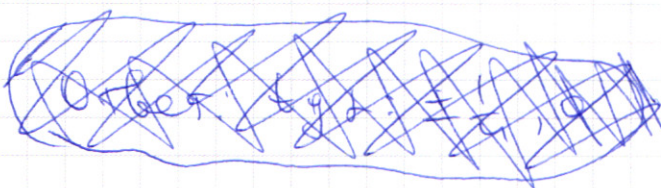
$$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{15}{12}$$

$$2\cos^2 \alpha = \frac{31}{12}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{31}{24}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)$$



Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0$

~ 2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3+y} - 2x - 3y + 2 & 1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & 2) \end{cases}$$

$$1) \quad 9y^2 + 4x^2 - 12x + y = 3 + y - 2x - 7y + 2$$

$$4x^2 - 15x + 1x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$4x^2 + x(7 - 15y) + 9y^2 + 3y - 2 = 0$$

Решим относительно x :

$$D = (2 - 15y)^2 - 16(9y^2 + 3y - 2) =$$

$$= 4 + 12 \cdot 5y^2 - 60y - 144y^2 - 48y + 32 =$$

$$= 81y^2 - 102y + 36 = 9 \cdot 9y^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 + 6 \cdot 6 =$$

$$= (9y - 6)^2$$

$$x_1 = \frac{15y - 2 + 9y - 6}{8} = \frac{24y - 8}{8} = 3y - 1$$

$$x_2 = \frac{15y - 2 - 9y + 6}{8} = \frac{6y + 4}{8} = \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$$

подставим x_1 в $\text{в})$

$$3(3y - 1)^2 + 3y^2 - 6(3y - 1) - 4y - 4 = 0$$

$$3(9y^2 - 6y + 1) + 3y^2 - 6(3y - 1) - 4y - 4 = 0$$

$$\overbrace{27y^2} + \overbrace{-18y} + \overbrace{3} + \overbrace{3y^2} - \overbrace{18y} + \overbrace{6} - \overbrace{4y} - \overbrace{4} = 0$$

$$30y^2 - 40y + 5 = 0 \quad | : 5$$

$$6y^2 - 8y + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4(6 \cdot 1) = 40 = (2 \cdot \sqrt{10})^2$$

$$y_1 = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{2} - 1 = 4 + \sqrt{10} - 1 = 3 + \sqrt{10}$$

$$y_2 = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{2} - 1 = 4 - \sqrt{10} - 1 = 3 - \sqrt{10}$$

далее подставим $x_2 = \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = \frac{3y + 2}{4}$ в $\text{в})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим уравнение 2) на 4

$$12x^2 + 12y^2 - 24x - 16y = 16$$

$$12 \frac{(3y+2)^2}{16} + 12y^2 - 24 \frac{(3y+2)}{4} - 16y = 16$$

$$\frac{3}{4} (3y+2)^2 + 12y^2 - 6(3y+2) - 16y = 16 \quad | \cdot 4$$

$$3(9y^2 + 12y + 4) + 48y^2 - 24(3y+2) - 64y = 64$$

$$\overbrace{27y^2} + \overbrace{36y} + 12 + \overbrace{48y^2} - \overbrace{72y} - \overbrace{48} - \overbrace{64y} = 64$$

$$75y^2 + 100y - 100 = 0 \quad | : 25$$

$$3y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$D = 16 - 4(-4 \cdot 3) = 64 = 8^2$$

$$y_3 = \frac{4 + 8}{6} = \frac{12}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{6 \cdot \frac{12}{6} + 4}{8} = \frac{12}{8}$$

$$y_4 = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{4}{6} \Rightarrow y_2 = \frac{6 \cdot \left(-\frac{4}{6}\right) + 4}{8} = 0$$

Ищем пары:

$$\left(3 + \sqrt{10}; \frac{4 + \sqrt{10}}{3} \right)$$

$$\left(3 - \sqrt{10}; \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right)$$

$$\left(2,25; 2\frac{1}{3} \right)$$

$$\left(0; -\frac{2}{3} \right)$$

Проверим проверку:

$$1) 3 \left(\frac{4 + \sqrt{10}}{3} - 2(3 - \sqrt{10}) \right) = \sqrt{\quad}$$

$$4 + \sqrt{10} - 6 - 2\sqrt{10} = \sqrt{\quad}$$

$$-2 - \sqrt{10} = \sqrt{\quad}, \text{ но } \sqrt{\quad} \geq 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$2) 3y - 2x = \cancel{10 - 2} \quad \sqrt{10} - 2$$

$$3xy - 2x - 3y + 2 = 14 - 4\sqrt{10}$$

$$(\sqrt{10} - 2)^2 = 10 - 4\sqrt{10} + 4 = 14 - 4\sqrt{10}$$

верно

$$3) 3y - 2x = 8,5$$

$$9 + y - 2x - 3y + 2 = 6,25$$

$$6,25 = 6,25 \text{ — верно}$$

$$4) 3 \left(-\frac{2}{3} \right) + 0 = \sqrt{\quad}$$

$$-2 = \sqrt{\quad}, \text{ но } \sqrt{\quad} \geq 0 \Rightarrow \emptyset$$

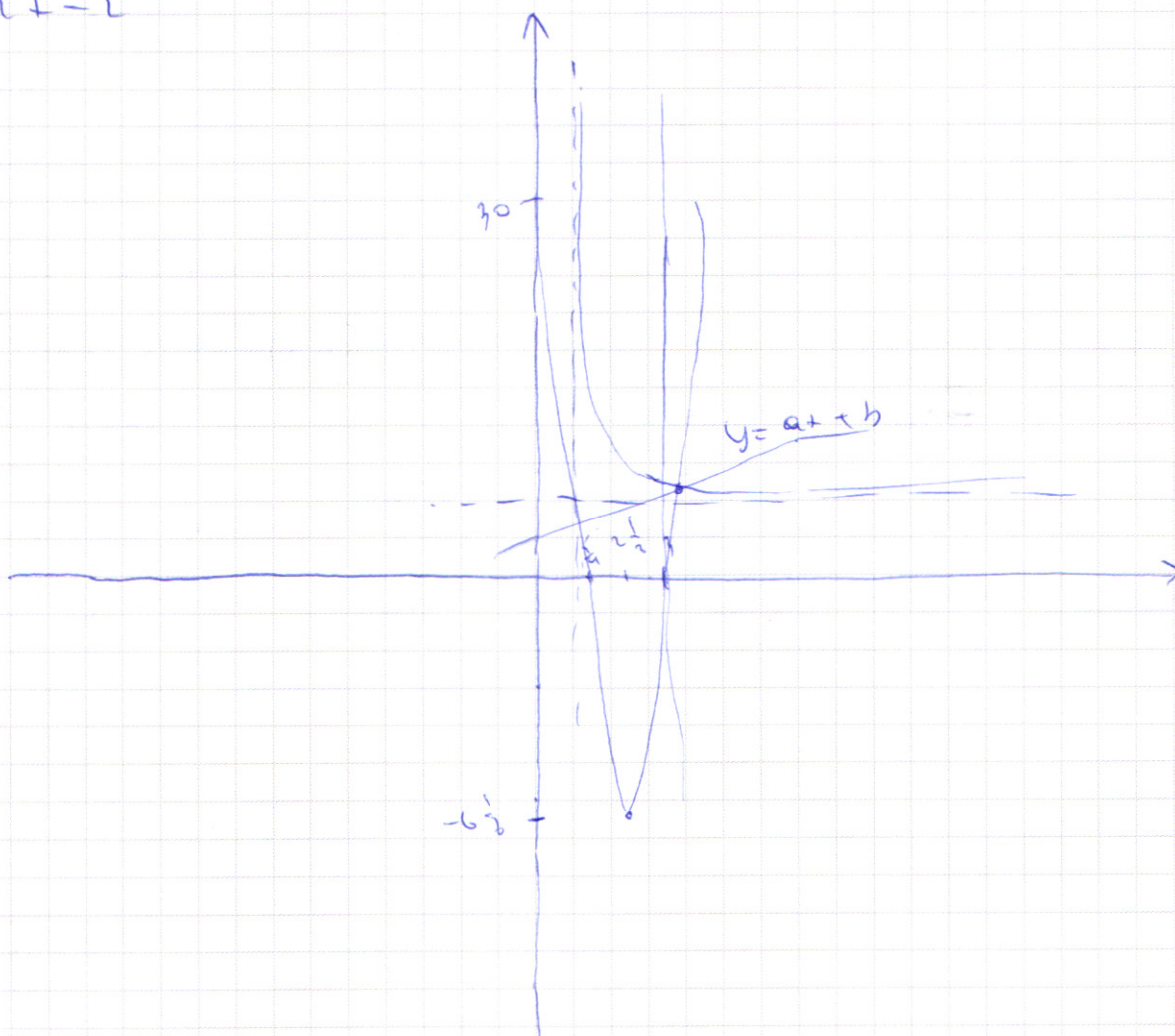
Ответ: $(3 - \sqrt{10}; \frac{4 - \sqrt{10}}{3})$

$$(2,25; 2\frac{1}{3})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\frac{4t-3}{2t-2} \geq a+t \geq 8t+1-34t+30$$



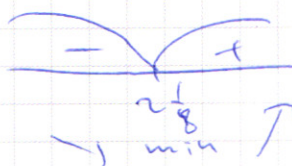
рассмотрим функцию $f(t) = 8t+1-34t+30$

$$f'(t) = 16t - 34$$

$$f'(t) = 0$$

$$t_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

$$y_0 = -6\frac{1}{8}$$



при $f(t) = 0$
при $t = 0$

$$8t+1-34t+30=0$$

$$x = 3, \frac{5}{4}$$

$$g(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$$

$$g'(x) = \frac{4(2x-2) - (4x-3) \cdot 2}{(2x-2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\cancel{8x} - 8 - \cancel{8x} + 6}{(2x-2)^2} = \frac{-2}{(2x-2)^2} \Rightarrow \text{Ф-я можно только упростить}$$

x	2	3	4
y	1	2 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$

Что в том интервале или какой значении x
на промежутке (1; 3] значение $g(x)$ будет более
большее y $g(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$, чем значение

$v(x) = a + b$, и при этом значение $v(x)$,
более большое, чем y $f(x) = 3x^2 - 34x + 30$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

~~$$3 \log_4 (x^2 + 6x) + 6x \geq |x^2 + 6x| \log_4 5 + x^2$$

$$3 \log_4 (x^2 + 6x) + 6x^2 + 6x \geq |x^2 + 6x| \log_4 5 + x^2$$~~

~~$$x^2 + 6x = t$$

$$3 \log_4 t + t \geq |t| \log_4 5$$~~

OP3: $x^2 + 6x > 0$

$$3 \log_4 (x^2 + 6x) + x^2 + 6x \geq |x^2 + 6x| \log_4 5$$

$$(x^2 + 6x) \log_4 3 + x^2 + 6x \geq |x^2 + 6x| \log_4 5$$

$$x^2 + 6x = t, t > 0$$

$$t \log_4 3 + t \geq t \log_4 5$$

$$t \log_4 3 + t - t \log_4 5 \geq 0 \quad | : t \log_4 5$$

$$\frac{t \log_4 3}{t \log_4 5} + \frac{t \log_4 3}{t \log_4 5} - 1 \geq 0$$

$$t \log_4 \frac{4}{5} + t \log_4 \frac{3}{5} - 1 \geq 0$$

$$t \log_4 \frac{4}{5} + t \log_4 \frac{3}{5} = 1$$

Заметим:
при $t = 16$

$${}_4 \log_4 \left(\frac{4}{7}\right)^2 + {}_4 \log_4 \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^1 + \left(\frac{3}{7}\right)^1 = 1 \quad \text{— выполняется}$$

$$\text{ор — чч } t \log_4 \frac{4}{7} \quad \text{и } t \log_4 \frac{3}{7} \quad \text{уfabеро чч } (=)$$

\Rightarrow их ~~сумма~~ — тоже уfabеро чч
~~чч~~ $= 1$

\Rightarrow при $t \leq 16$ — выполняется

$$t^2 + 6t \leq 16$$

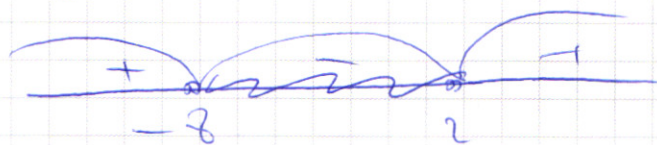
$$t^2 + 6t - 16 \leq 0$$

$$D = 36 - 4(-6 \cdot -16) = 10^2$$

$$t_1 = \frac{-6 + 10}{2} = 2$$

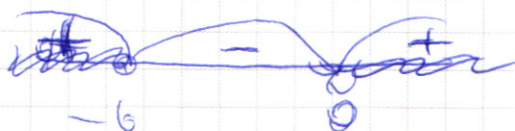
$$t_2 = \frac{-6 - 10}{2} = -8$$

$$t \in [-8; 2] \quad (\star)$$



$$\text{Также: } t^2 + 6t > 0$$

$$t(t + 6) > 0$$



$$(\star \star)$$

$$t \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\star) \\ (\star \star) \end{array} \right\} \Rightarrow t \in [-8; -6) \cup (0; 2]$$

$$\text{Ответ: } t \in [-8; -6) \cup (0; 2]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$3x^2 + 1y^2 - 4 = 6x - 4y$$

$$3x^2 + 4y^2 - 4 = 2\sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$$

$$9y^2 - 6y + 1 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$3xy^2 - 4xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$3xy^2 - 4xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$3x^2 - 3y^2 + 6y^2 - 12xy + x^2 - 6x - 4y = 3xy - 2x - 4y + 2 - 6x - 4y$$

$$4 + 6y^2 - 12xy + x^2 = 3xy - 8x - 4y + 2$$

3y - 1

$$9y^2 - 6y + 1$$

$$24y^2 - 18y + 3 + 12y^2 - 10y + 6 - 4y - 4 = 0$$

$$30y^2 - 40y + 5 = 0 \quad | : 5$$

$$6y^2 - 8y + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4(6 \cdot 1) = 40$$

23. 5

$$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$$

$$9y^2 + 6xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$3xy^2 - 4xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$3x^2 - 3y^2 + 6y^2 - 12xy + x^2 - 6x - 4y = 3xy - 2x - 4y + 2 - 6x - 4y$$

$$4 + 6y^2 - 12xy + x^2 = 3xy - 8x - 4y + 2$$

$$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$$

$$9y^2 + y(3 - 15x + 1) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = (3 - 15x)^2 - 4 \cdot 9(4x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$9 + 225x^2 - 90x - 36(4x^2 + 2x - 2)$$

$$225x^2 - 90x + 9 - 144x^2 - 72x + 72$$

$$81x^2 - 162x + 81 = 81(x^2 - 2x + 1) = 81(x-1)^2 = 9(x-1)$$

$$y = \frac{3 - 15x - 9(x-1)}{9} = \frac{3 - 15x - 9x + 9}{9} = \frac{12 - 24x}{9}$$

$$y = \frac{3 - 15x + 9(x-1)}{9} = \frac{3 - 15x + 9x - 9}{9} = -\frac{6x - 6}{9}$$

$$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$$

$$4x^2 + x(3 - 15y) + 9y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$D = 4 + 225y^2 - 60y + 36(9y^2 + 2y - 2) = 0$$

$$225y^2 - 60y + 4 - 144y^2 - 48y + 72 =$$

$$= 81y^2 - 108y + 76 = 9^2y^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 + 6^2 =$$

$$= (9y - 6)^2$$

$$x = \frac{-3 + 15y - 9y + 6}{9} = \frac{-3 + 6y}{9} = \frac{2y - 1}{3}$$

$$x = \frac{-3 + 15y + 9y - 6}{9} = \frac{-4 + 24y}{9} = -\frac{4}{9} + \frac{8y}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$2 \sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{14}} \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

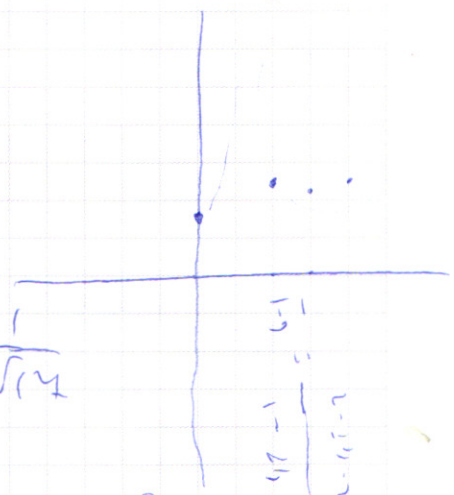
$$16 - 12\sqrt{2} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{44 - 3}{2\alpha - 2} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{11}{25} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{11}{25} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{11}{25} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$



$$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + (\sin 2\beta) \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{14}} \cos 2\beta + \sin 2\beta$$

$$\cos \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{14}} = \sqrt{\frac{13}{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\sin^2(2\alpha + 2\beta) + \cos^2(2\alpha + 2\beta) = 1$$

$$\cos^2(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{14}} = \sqrt{\frac{13}{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$2 \sin(2\alpha + 4\beta + 2\alpha) \cos(2\alpha + 4\beta + 2\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 2 \cdot (-\frac{1}{2}\alpha)) = \sin(2\alpha - \alpha) = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{14}} \cos 2\beta = + \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{2} \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

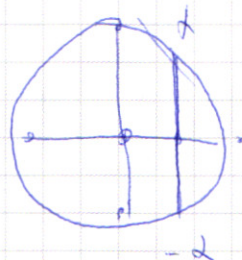
$$2\alpha = -4\beta$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$2\alpha + 2\beta = -2\beta$$



2\alpha + 2\beta = -2\beta

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \log_4 (x^2 + 6x) + 6x \geq (x^2 + 6x) \log_4 5 - x^2 \quad \frac{4x-3}{2x-2}$$

$$3 \log_4 (x^2 + 6x) + x^2 + 6x \geq (x^2 + 6x) \log_4 5$$

$$x^2 + 6x = t$$

$$3 \log_4 t + t \geq |t| \log_4 5$$

$$3 \log_4 t \geq t \log_4 5 - t$$

$$3 \log_4 t \geq 2t (t^{\log_4 5} - 1) + 1$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq x + 6x \geq 8x + 7 - \log_4 (x^2 + 6x) > 0$$

$$y = 8x + 7 - \log_4 (x^2 + 6x)$$

$$y' = 16x - \frac{1}{2(x+3)}$$

$$16x - \frac{1}{2(x+3)} = 0$$

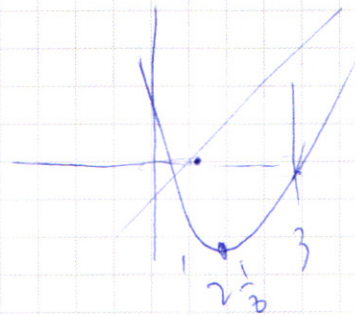
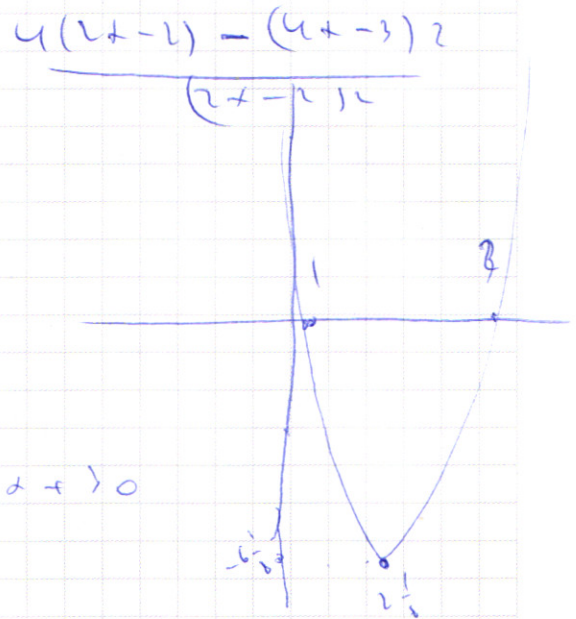
$$x = \frac{1}{16} = \frac{14}{224} = 2 \frac{1}{8}$$

$$y = 8 \cdot \frac{14}{224} - \log_4 \frac{14}{224} = 30$$

$$\frac{14^2}{2} - 2 \cdot \frac{14^2}{2} = 30$$

$$30 = \frac{14^2}{2} \cdot 4$$

$$\frac{2240 - 224}{2} = 2$$



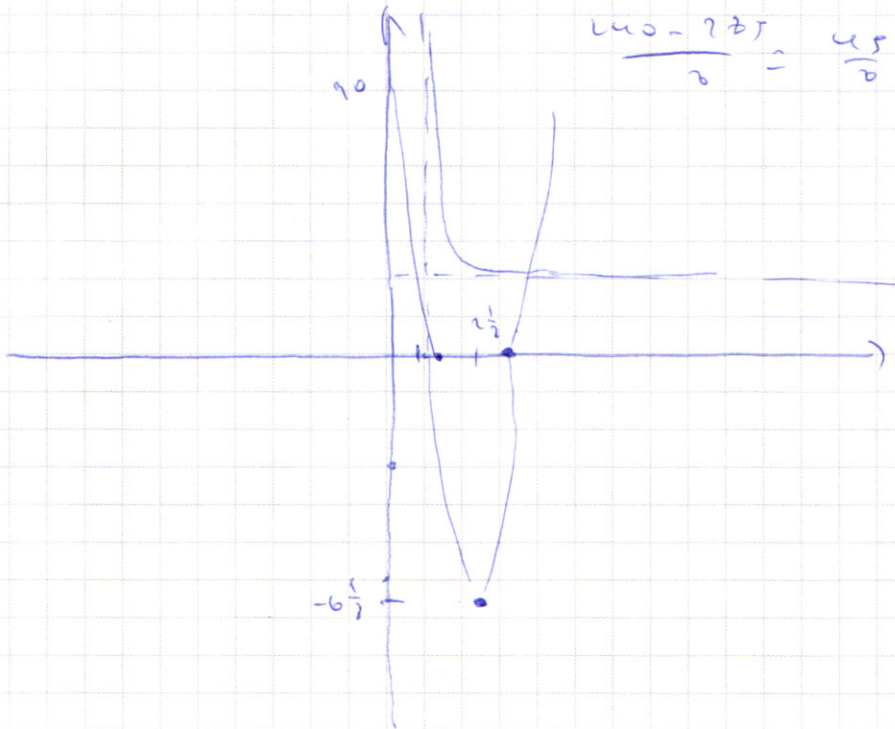
$$8x^2 - 34x + 30 = y$$

$$y' = 16x - 34 \Rightarrow x = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

$$y_0 = 8 \cdot \frac{289}{64} - 2 \cdot 17 \cdot \frac{17}{8} + 30$$

$$\frac{229}{2} - \frac{2 \cdot 289}{8} + 30 = 30 - \frac{289}{2}$$

$$\frac{240 - 289}{2} = \frac{49}{2} = 6\frac{1}{2}$$



$$4x^2 - 14x + 15 = 0$$

25

$$D = 289 - 4 \cdot 15 = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{14 + 7}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

$$x_2 = \frac{14 - 7}{8} = \frac{7}{8} = 0\frac{7}{8} = 1,25$$

$$8 \cdot \frac{25}{16} - 34 \cdot \frac{5}{8} + 30$$

$$42,5 - 21,25$$

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} = y$$

$$\frac{4(2x-2) - (4x-3) \cdot 2}{(2x-2) \cdot 2} = \frac{8x-8 - (8x-6)}{2x-2 - 4x+4} = \frac{-2}{(2x-2) \cdot 2}$$

$$\frac{17x+30}{10x}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$3 \left(\frac{4 + \sqrt{10}}{3} \right) - 2(3 + \sqrt{10})$$

$$\cancel{4 + \sqrt{10}} - \cancel{6 - \sqrt{10}}$$
$$-2$$

$$3 \left(\frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right) - 2(3 - \sqrt{10})$$

$$4 - \sqrt{10} - 6 + 2\sqrt{10}$$

$$\sqrt{10} - 2 = 10 + 4 - 4\sqrt{10}$$

$$3 \left(\frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right) (3 - \sqrt{10}) - 2(3 - \sqrt{10}) - 3 \left(\frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right) + 2$$

$$\cancel{12 - 3\sqrt{10}} - \cancel{4\sqrt{10}} + \cancel{10} - \cancel{6} + \cancel{2\sqrt{10}} - \cancel{4 + \sqrt{10}} + 2$$

$$14 - 4\sqrt{10}$$

$$3(3 - \sqrt{10}) \left(\frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right) - 2(3 - \sqrt{10}) - 3 \left(\frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right) + 2$$

$$\cancel{12 - 4\sqrt{10}} - \cancel{3\sqrt{10}} + \cancel{10} - \cancel{6} + \cancel{2\sqrt{10}} - \cancel{4 + \sqrt{10}} + 2$$

$$14 - 4\sqrt{10}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 4\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta - \sin \alpha = -\frac{3}{12}$$

16
6
6

$$\frac{-1}{\sqrt{14}} \cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{14}} \sin 2\beta + \sin \alpha = -\frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{4}{\sqrt{14}} + \frac{4}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \sin 2\beta = -\frac{3}{12}$$

$$2 \sin \alpha + \cos 5\alpha = -\frac{3}{12}$$

$$48x^2 + 48y^2 - 96x - 64y = 64$$

$$\cos^2 \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{128}} = \frac{15}{12}$$

$$48 \frac{(9y^2 + 4 + 12y)}{4} + 48y^2 - 96x - 64(3y+2) - 64y = 64$$

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{15}{12}$$

$$3(9y^2 + 12y + 4) + 48y^2 - 192y - 128 = 64$$

$$\cos 2\alpha = \frac{32}{12}$$

24

$$14y^2 + 36y + 12 + 48y^2 - 72y - 48 - 64y - 64 = 0$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{15}{14}$$

$$\frac{12}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$25y^2 - 100y - 100 = 0 \quad | : 25$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = 1$$

$$2y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{16}{14}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$P = 16 - 4(-4 - 4) = 64$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{14}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$3 \left(-\frac{4}{6} = -2 \right) + 3 = \frac{6}{6} = 2 + 2 = 4$$

$$2\alpha + 2\beta = 2\beta$$

$$\alpha = 0$$

$$\text{tg } 0 = 0$$

$$3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 9}{4}$$

$$2 - \frac{9}{2} = 3,5$$

$$3 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{9}{4} = 4 - \frac{9}{2} = 2,5$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{14}} \cos 2\beta + \frac{4 \sin 2\beta}{\sqrt{14}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta)$$

$$3 \cdot \frac{9}{4} - \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{5}{3} + 2$$

$$\sin 4\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{63}{4} - \frac{12}{4} - 4 + 2$$

$$\frac{45}{4} - 5 = 1,25$$

$$\frac{2,5}{4} = 0,625$$

$$2 \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 4\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$2 \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$2 \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\beta = -2\alpha - 2\beta$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\beta$$

$$\beta = 2\alpha$$

$$\sin(2\alpha + 4 \cdot (-\frac{1}{2}\alpha)) + \sin 2\alpha = -\frac{3}{14}$$

$$\sin(2\alpha + 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{3}{14}$$

$$\sin 4\alpha = -\frac{3}{14}$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}}$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{14}$$

$$\frac{225}{289} = \frac{15}{17}$$

$$\sin 4\alpha = \frac{4}{14} \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{4}{14} \sin \alpha$$

$$\sin 2\alpha$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{14}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{14}$$

$$\sin(2\alpha + 4(\frac{1}{2}\alpha)) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{14}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{14} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{196}} = \sqrt{\frac{132}{196}} = \frac{11}{14}$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{14}$$

~~$$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{11}{14}$$~~

~~$$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{11}{14}$$~~

~~$$2\cos^2 \alpha = 1 + \frac{11}{14} = \frac{25}{14} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{28} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$~~

~~$$\cos 2\alpha = \frac{25}{28} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{25}{28}} = \frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$~~

~~$$2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{14}$$~~

~~$$2\sin \alpha \cdot \frac{5}{\sqrt{28}} = -\frac{8}{14}$$~~

~~$$\sin \alpha = -\frac{8}{14} \cdot \frac{\sqrt{28}}{10} = -\frac{2\sqrt{7}}{5}$$~~

~~$$2\sin \alpha \cdot \frac{5}{\sqrt{28}} = -\frac{8}{14}$$~~

~~$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$~~

~~$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$$~~

~~$$\sin 4\beta = -\frac{8}{14}$$~~

~~$$2\sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{8}{14}$$~~