МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 3xy-2x-3y+2\geq 0 \end{cases}$

Возведём (1) в квадрат и разложим правую часть на множители, а в (2) поделим на 3, выделим два полных квадрата и ~~получим ур-е окружности~~ добавим недостающие слагаемые.

$$\begin{cases} \left(3\left(y-\frac{2}{3}x\right)\right)^2 = 3\left(y-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1) \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2 \end{cases}$$

~~Введём замену: $x-1=a$~~

~~$y-\frac{2}{3}=b$~~

~~$\begin{cases} 9\cdot 3\left(b+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(a+1)\right)^2=3ab \\ a^2+b^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} b^2+\frac{4}{9}a^2=\frac{7}{3}ab & (3) \\ a^2+b^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2 & (4) \end{cases}$~~

~~левая ч. $\geq 0 \Rightarrow$ правая $\geq 0 \Rightarrow a$ и b одного знака. Тогда будем ~~ ~~рассматр. неотриц. a и b, а затем взять пару противоположных. $a, b\geq 0$~~

~~Если $a=0$, то из (3) $b=0$, но тогда (4) неверно. $a>0$~~

~~Аналогично если $b=0$, то по (3) $a=0$, (4) неверно. $b>0$~~

~~Вычтем из (4) (3): $\frac{5}{9}a^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2-\frac{7}{3}ab \Rightarrow b=\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2-\frac{5}{9}a^2}{\frac{7}{3}a}=\frac{7}{3a}-\frac{5a}{21}$. Подставим в (4).~~

~~$a^2+\left(\frac{7}{3a}-\frac{5a}{21}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2 \quad |\cdot a^2>0$~~

~~$a^4+\left(\frac{49}{9a^2}+\frac{25a^2}{21^2}-\frac{10}{9}\right)a^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2\cdot a^2=0$~~

~~Пусть $a^2=t>0$.~~

~~$t^2\left(1+\frac{25}{21^2}\right)+t\left(-\frac{10}{9}-\frac{49}{9}\right)+\frac{49}{9}=0$~~

~~$D=\frac{59^2}{9^2}-\frac{4\cdot 49\cdot 466}{9\cdot 441\cdot 9}=\frac{1617}{81}$~~

~~$t=\frac{59\pm\sqrt{1617}}{18}$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2 (продолжение)

Второе – ур-е окр-ти с центром $\left(1; \frac{2}{3}\right)$ и радиусом $\frac{7}{3}$.

Первое – раскроем скобки и рассмотрим как квадр. ур-е относ. y.

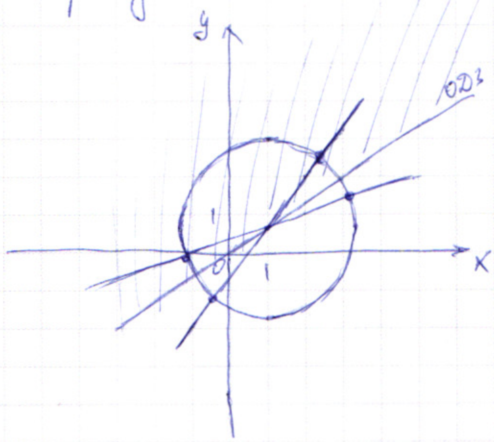
$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+y(3-15x)+4x^2+2x-2=0$

$D=9+225x^2-90x-4\cdot 9\cdot(4x^2+2x-2)=81x^2-162x+81=(9x-9)^2$

$y=\frac{15x-3\pm(9x-9)}{18}$; $\frac{24x-12}{18}=\frac{4x-2}{3}$; $\frac{6x+6}{18}=\frac{x+1}{3}$

Нарисуем.



Укажем ОДЗ: $3y-2x\geq 0 \Rightarrow y\geq \frac{2}{3}x$

Второе выраж. из ОДЗ можно не проверять: оно точно выполнено, т.к. при возведении в квадрат слева оказался квадрат (неотриц. число).

Видим, что есть два возможных корня. (все 3 прямые проходят через центр окр.)

Подставим $y=\frac{4x-2}{3}$ и $y=\frac{x+1}{3}$ в ур-е окр-ти.

$3x^2-6x+\frac{16x^2-16x+4}{3}-\frac{16x-8}{3}-4=0$

$3x^2-6x+5\frac{1}{3}x^2 \cancel{-2x} \cancel{+4-4}=0$

$8\frac{1}{3}x^2-6x=0$

$x\left(\frac{25}{3}x-6\right)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=\frac{18}{25}$

$3x^2-6x+\frac{x^2+2x+1}{3}-\frac{4x+4}{3}-4=0$

$3x^2-6x+\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}-1-4=0$

$3\frac{1}{3}x^2-6\frac{2}{3}x-5=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

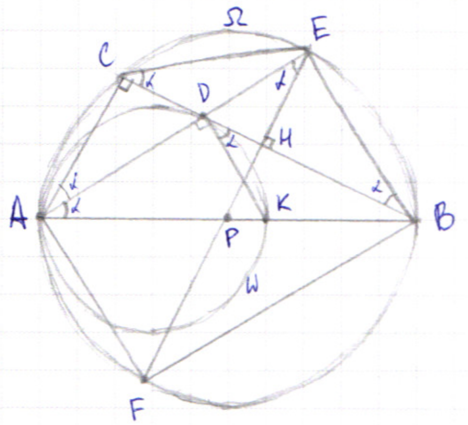
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано: $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

Найти: R, r, $\angle AFE$, S_{AFE}.

Решение:

1. A и центры ω и Ω лежат на одной прямой AB.
2. K – т.перес. ω и AB, отличная от A.
   P – т.перес. AB и EF. H – т.перес. EF и BC.
3. Центр ω лежит на $AK \Rightarrow \angle ADK = 90^\circ$. AB – диаметр $\Omega \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$.
4. Пусть $\angle EAB = \alpha$. В ω он опир. на DK, BD – касат. в т. $K \Rightarrow \angle BDK = \angle DAK = \alpha$.
5. $\angle CDA = 180^\circ - \angle ADK - \angle BDK = 90^\circ - \alpha$, $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - \angle CDA = \alpha$.
6. $\angle CAD = \angle DAB = \alpha \Rightarrow AD$ – бисс. $\angle CAB$ в $\triangle CAB$. Тогда $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{5}{13}$.
7. $\angle ECB = \angle EAB = \alpha$ (опир. на дугу EB), $\angle EBC = \angle EAC = \alpha$ (опир. на дугу EC).
8. $\triangle ECB$ – равноб., EH – высота $\Rightarrow EH$ – мед. $\Rightarrow CH = HB$.
9. EF – серпер к $CB \Rightarrow$ центр Ω лежит на EF. Центр Ω также лежит на AB (диаметр) $\Rightarrow$ ~~P~~ $AB \cap EF = P$ – центр Ω, $AP = PB = EP = PF = R$ – радиусы.
10. В $\triangle ACB$ $\angle C = 90^\circ$ $\frac{CA}{AB} = \frac{5}{13} \Rightarrow$ по т. Пифагора $\frac{AB}{BC} = \frac{13}{12}$. $BC = BD + CD = 9 \Rightarrow$
    $AB = \frac{9 \cdot 13}{12} = \frac{39}{4}$. $R = \frac{AB}{2} = \frac{39}{8}$.
11. Степень точки B отн. окр. ω $BD^2 = BK \cdot BA \Rightarrow \frac{169}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R = \left(\frac{39}{4} - 2r\right) \cdot \frac{39}{4}$.
    $\frac{39}{4} \cdot 2r = \left(\frac{39}{4}\right)^2 - \frac{169}{4} = \left(\frac{39}{4} + \frac{13}{2}\right)\left(\frac{39}{4} - \frac{13}{2}\right) = \frac{65 \cdot 13}{16} \Rightarrow r = \frac{65 \cdot 13 \cdot 4}{8 \cdot 16 \cdot 39 \cdot 2} = \frac{65}{24}$.
12. $\triangle APE$ – равноб. ($AP = PE$) $\Rightarrow \angle AEP = \angle PAE = \alpha$. $\triangle AEF$: $\angle EAF = 90^\circ$, т.к. EF – диам.,
    $\angle AFE = 90^\circ - \angle AEF = 90^\circ - \alpha$.

№ 4 (продолжение)

13. $\triangle ACB$: $\sin 2\alpha = \sin\angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{12}{13}$.

Решение единственное с точностью до перестановки: $\sin\alpha$ и $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и $\frac{3}{\sqrt{13}}$

Однако $2\alpha < 90°$, т.к. 2α и $90°$ – углы $\triangle ABC$ $\Rightarrow \alpha < 45° \Rightarrow \sin\alpha < \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

$\sin\angle AFE = \sin(90°-\alpha) = \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$. $\angle AFE = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$.

14. $\triangle AFE$ впис. в Ω с ~~диам.~~ радиусом $R = \frac{39}{8}$.

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = \frac{AF}{\sin\angle AEF} = 2R$ (теорема синусов). $S_{AFE} = \frac{1}{2}AE\cdot AF$ ($\angle A = 90°$) =

$= \frac{1}{2}\cdot 4R^2\cdot\sin\angle AFE\cdot\sin\angle AEF = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin(90°-\alpha) = 2\cdot\left(\frac{39}{8}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{\cancel{2}\cdot 39\cdot\cancel{39}^{3}\cdot\cancel{2}\cdot 3}{8\cdot\cancel{8}_{2}\cdot\cancel{13}} =$

$= \frac{351}{16}$.

Ответ: $R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{65}{24}$, $\angle AFE = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$, $S_{AEF} = \frac{351}{16}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

$\Downarrow$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

Пусть $x^2+6x=t>0$.

$t \geq 5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t}$

Пусть $\log_4 t=a$.

$4^a \geq 5^a-3^a$

$a\leq 2$

$\log_4 t\leq 2$

$t\leq 16$

$x^2+6x\leq 16$

~~x D=~~ $x^2+6x-16=0$

$D=36+64=100$

$x=\frac{-6\pm 10}{2}$ 2 / -8

параб., вет. вверх

$x\in(\cancel{\infty;}-8;2)$ + ОДЗ

Ответ: $x\in(-8;-6)\cup(0;2)$.

№5

$f\left(\frac{m}{n}\cdot n\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f(n) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)$.

Чтоби $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ выполнялось, $f(x)$ должно быть $<f(y)$.

Найдём $f(x)$ при всех $\overset{\text{целых}}{x}\in[3;27]$.

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

$f(1)=0$

~~$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$~~

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(2)+f(6)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(2)+f(8)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(2)+f(10)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(2)+f(12)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

k_i – кол-во $\overset{\text{целых}}{x}\in[3;27]$, для к-ых $f(x)=i$.

$k_0=10$

$k_1=7$

$k_2=3$

$k_3=2$

$k_4=2$

$k_5=1$

Возможные $f(x)$ и $f(y)$:

$f(x)$	$f(y)$
0	1, 2, 3, 4, 5
1	2, 3, 4, 5
2	3, 4, 5
3	4, 5
4	5

Перемножаем соответств. k_i для каждого варианта.

$10\cdot 15+7\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=$

$=150+56+15+6+2=229$.

Ответ: 229 пар.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

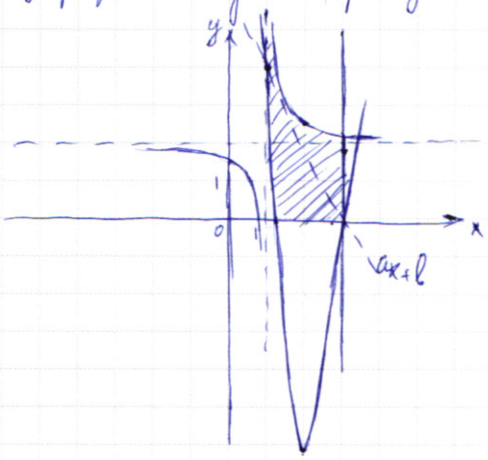
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Изобразим левую и правую части графически.



$8x^2-34x+30$ н

$x_0=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$ $y_0=-6\frac{1}{8}$

$x_1=1{,}25$ $x_2=3$

$(x;y)=(1;4)$ – принадл. параболе

Прямая $y=ax+b$ на $[1;3]$ должна лежать внутри заштрих. обл.

При $x=1$ $y\geq 4 \Rightarrow a+b\geq 4$

При $x=3$ $y\geq 0 \Rightarrow 3a+b\geq 0$

$a\leq -2$
$b\geq 6$

При $a=-2$, $b=6$ $\frac{4x-3}{2x-2} \geq -2x+6$

$4x-3\geq -4x^2+4x+12x-12$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=1{,}5$

Прямая касается графика гиперболы $\Rightarrow$ при увелич. b или уменьш. a они будут иметь >1 общ. точки $\Rightarrow$ найдётся точка, для к-ой $ax+b>\frac{4x-3}{2x-2}$.

Ответ: $a=-2$, $b=6$.

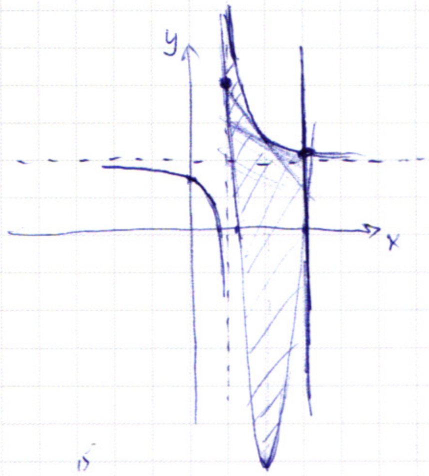
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{289}{8} = 36\frac{1}{8}$

$4(289-240)=$



8

$x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ $y_0 = -6\frac{1}{8}$

$\frac{17^2}{2} - \frac{17^2}{4} + 30 = -\frac{17^2}{8} + 30 = -6\frac{1}{8}$

$D = 17^2 \cdot 4 - 120 \cdot 8 = 14^2$

$x = \frac{34 \pm 14}{16}$ 3; $1{,}25$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2-34x+30$

$4x-3 = 16x^3-16x^2-68x^2+68x+60x-60$

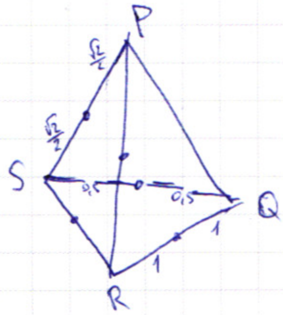
$16x^3-84x^2+124x-57=0$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ (15)

$\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \cos^2 15$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sin \alpha + \sin\beta = 2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ (30°, 60°)

$\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$



$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2+2+\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$ $|\cdot 4$

$1+3+2\sqrt{3} \mp 16 \mp 4\sqrt{3} = \pm 2\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$ $|^2 : 4$

$(2-\sqrt{3}-8)^2 = 4(4+2\sqrt{3})$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{t}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\pm\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{17}} + \quad = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

~~$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\frac{t}{\sqrt{17}}$ $\frac{\pm\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \cancel{2\sin}$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$ $\quad (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$ $\quad 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$ $\quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{t^{?}+t^{\log_4 3}}{2} \geq t^{\frac{\log_4 3+1}{2}}$

~~$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha$~~

$\sin\alpha + \sin\beta =$ $\quad \sin 30 + \sin 60 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\frac{49}{9a^2} + \frac{25a^2}{21^2} - \frac{10}{9} =$

$9\cdot 3^b + 16\cdot 4^b \geq 25\cdot 5^b$

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad /:3 \end{cases}$ $\quad$ ОДЗ: $3y-2x \geq 0$

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$ $\quad (3y-2)(x-1) \geq 0$

$D = 16-36x^2+72x+48 =$

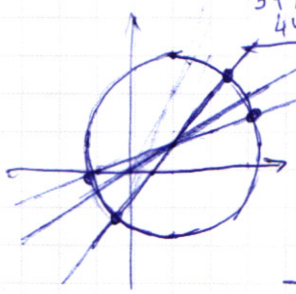
$(x-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = 5\frac{4}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$

$3y\left(y-\frac{2}{3}\right) = 3\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1)$

$\begin{array}{r} 59 \\ 59 \\ \hline 531 \\ 295 \\ \hline 3481 \\ 441 \end{array}$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$4x^2+(2-15y)x+9y^2+3y-2=0$



$y \geq \frac{2}{3}x$

$D = 4-60y+225y^2-144y^2-48y+32 = 81y^2-108y+36 = (9y-6)^2$

$x = \frac{15y-2 \pm (9y-6)}{8}$ $\quad \frac{24y-8}{8} = 3y-1 \quad y = \frac{x+1}{3}$

$\frac{6y+4}{8} = 0{,}75y+0{,}5 \quad y = \frac{4x-2}{3}$

$\begin{array}{r} 4 \\ 21 \\ 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$

$\frac{5}{9}a^2 = \frac{7}{3}\left(\frac{7}{3}-ab\right)$

$b = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{5}{9}a^2}{\frac{7}{3}a} = \frac{7}{3a} - \frac{5a}{21}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ $\quad$ ОДЗ: $x^2+6x>0 \quad x \in (-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3} = (x^2+6x)\underbrace{\left((x^2+6x)^{\log_4 5-1} - (x^2+6x)^{\log_4 3-1}\right)}_{>0}$ $\quad x^2+6x = t$

$1 \geq t^{\log_4 5-1} - t^{\log_4 3-1}$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t}$ $\quad \log_4 t = a$

$b+\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(a+1)$

$4^a \geq 5^a - 3^a$

$\log_4 4^a \geq \log_4 5^a - \log_4 3^a$

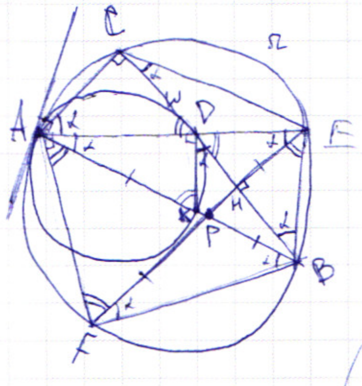
$a \geq \log_4\left(\frac{5}{3}\right)^a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$2\sin\alpha\cos\alpha$

$C+C=90^\circ$ $\quad \frac{1}{2}ab\cancel{\sin} = \frac{1}{2}\cancel{b}\cancel{\sin}$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC = \frac{65}{4}$

$BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

AD – бисс. $\angle CAB \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$ $\quad \frac{a}{\sin}$

$AC : BC : AB = 5 : 12 : 13$

$BC = CD + BD = 9$

$AC = \frac{15}{4}$ $\quad BC = 9$ $\quad AB = \frac{39}{4}$ $\quad \boxed{R = \frac{39}{8}}$

$\triangle CEB$ – равноб.

$CH = HB = 4{,}5$

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{6}{13}$

$\sin\alpha = t$

$t\sqrt{1-t^2} = \frac{6}{13}$

$t^2 - t^4 = \frac{36}{169}$ $\quad t^2 = a$

$a^2 - a + \frac{36}{169} = 0$

$D = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} = \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$a = \frac{1 \pm \frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}, \frac{4}{13}$ $\quad t_1 = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$, $t_2 = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = 90^\circ - \alpha$

$AC \parallel EF$

$\frac{169}{4} = \left(\frac{39}{4} - 2r\right) \cdot \frac{39}{4}$

$r = \frac{\frac{39}{4} - \frac{169}{39}}{2} = \frac{39^2 - 169 \cdot 4}{4 \cdot 2 \cdot 39} = \frac{(39+26)(39-26)}{8 \cdot 39} =$

$= \frac{65 \cdot 13}{8 \cdot 39} = \frac{65}{24}$ $\quad \boxed{r = \frac{65}{24}}$

$\triangle ACE \sim \triangle ADB$

$\frac{CE}{DB} = \frac{AE}{AB}$

AP – мед. в прямоуг. $\Rightarrow FP = PE = AP$

P – центр Ω

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$

$f(x) < f(y)$

f	0	1	2	3	4	5
k	10	7	3	2	2	1

f(x)	f(y)
0	1, 2, 3, 4, 5
1	2, 3, 4, 5
2	3, 4, 5
3	4, 5
4	5

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) - f(q) = f(p) - f(q)$

x	f(x)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1

x	f(x)
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1

x	f(x)
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2
26	3
27	0

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$
$= 150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 229$

$59 \cdot 59$: 531, 295, 3481

$3481 - 1864 = 1617$

$466 \cdot 4 = 1864$

$3481 : 81$ … 42 $\quad \frac{73}{81}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)