МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

1. $$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\dfrac{2}{5} & (2) \end{cases}$$ Найти: $tg\alpha$

(2) $$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \to \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(1) $$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm 2\,\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \qquad 1+tg^2\alpha>0$$

$$2tg\alpha \pm 2(1-tg^2\alpha) = -1-tg^2\alpha$$

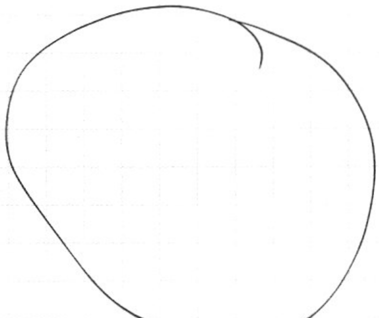
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

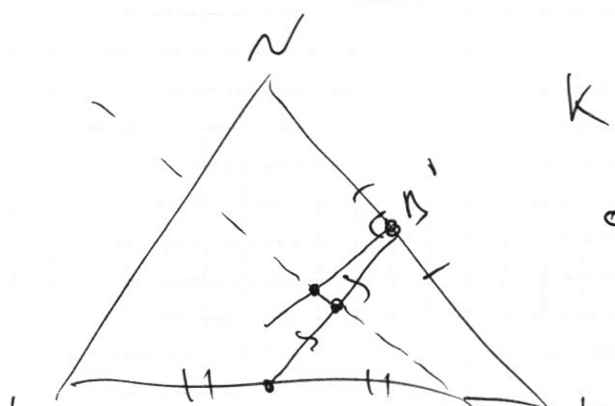
3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

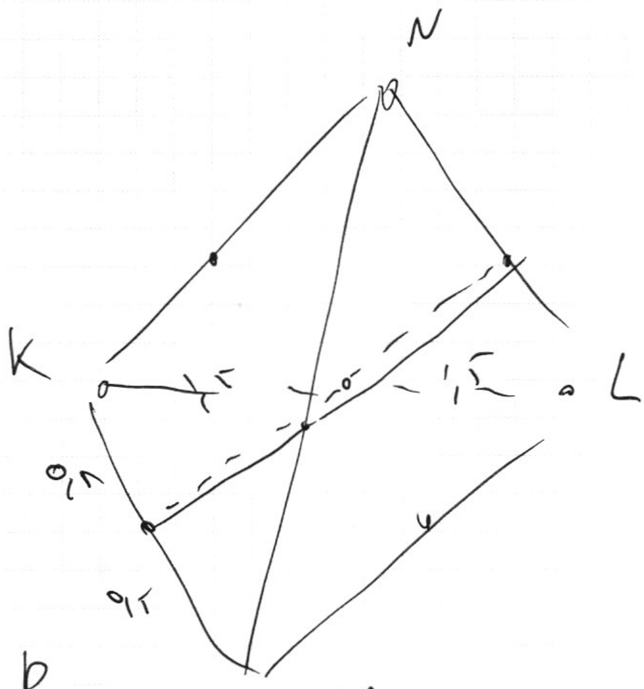
$|x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 - 10x + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$x^2 - 10x = t$

$|t|^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3(-t)}$







ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

1) $2\operatorname{tg}\alpha + 2 - 2\operatorname{tg}^2\alpha = -1 - \operatorname{tg}^2\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$(\operatorname{tg}\alpha - 3)(\operatorname{tg}\alpha + 1) = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = 3 \qquad \operatorname{tg}\alpha = 1$

2) ~~tg α − 2(1 − tg~~

$2\operatorname{tg}\alpha - 2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

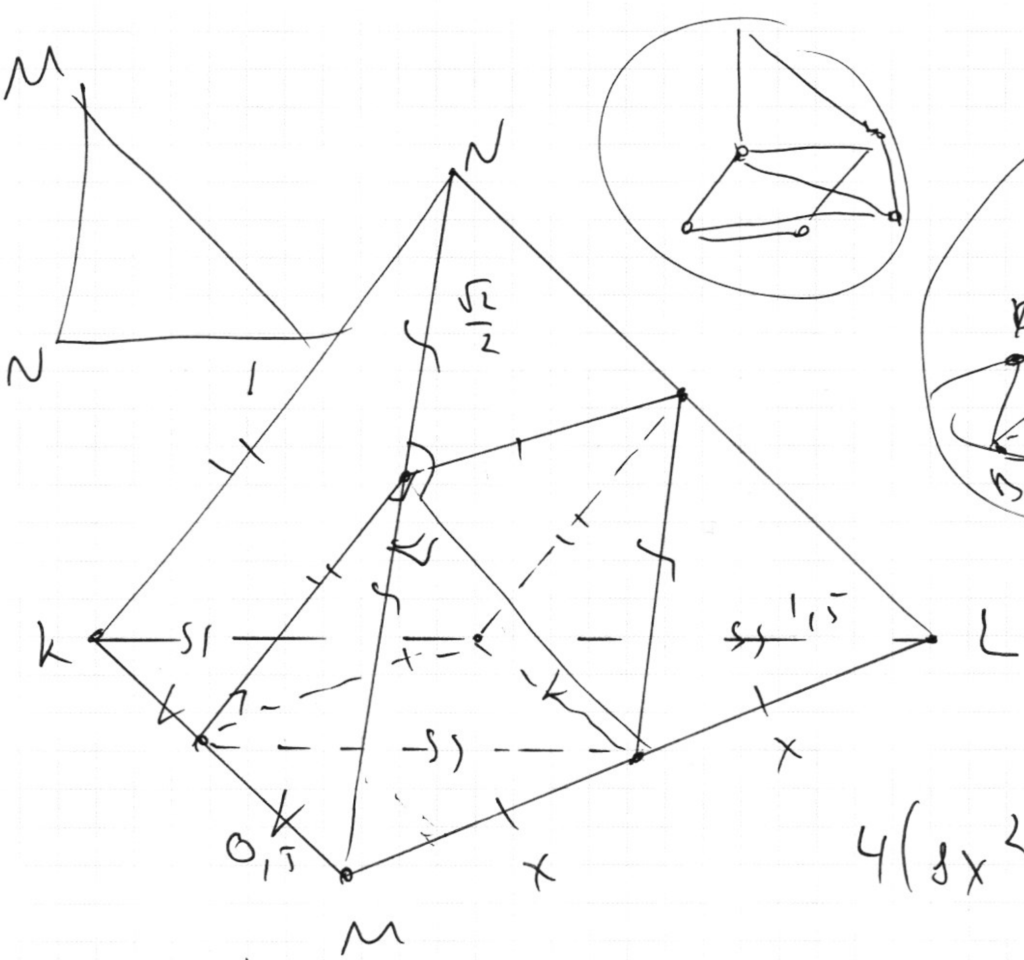
$D = 4 + 4 = 8$

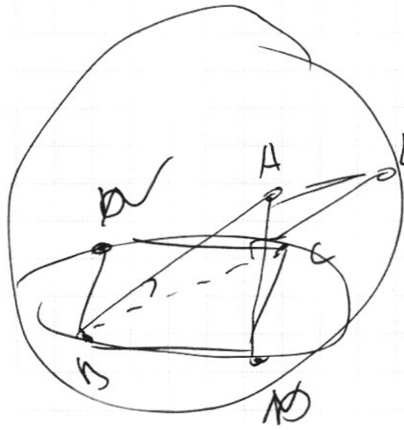
$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\alpha_1 = -1 - \sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\alpha_2 = -1 + \sqrt{2}$

Ответ: $3;\ 1;\ -1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2}$.





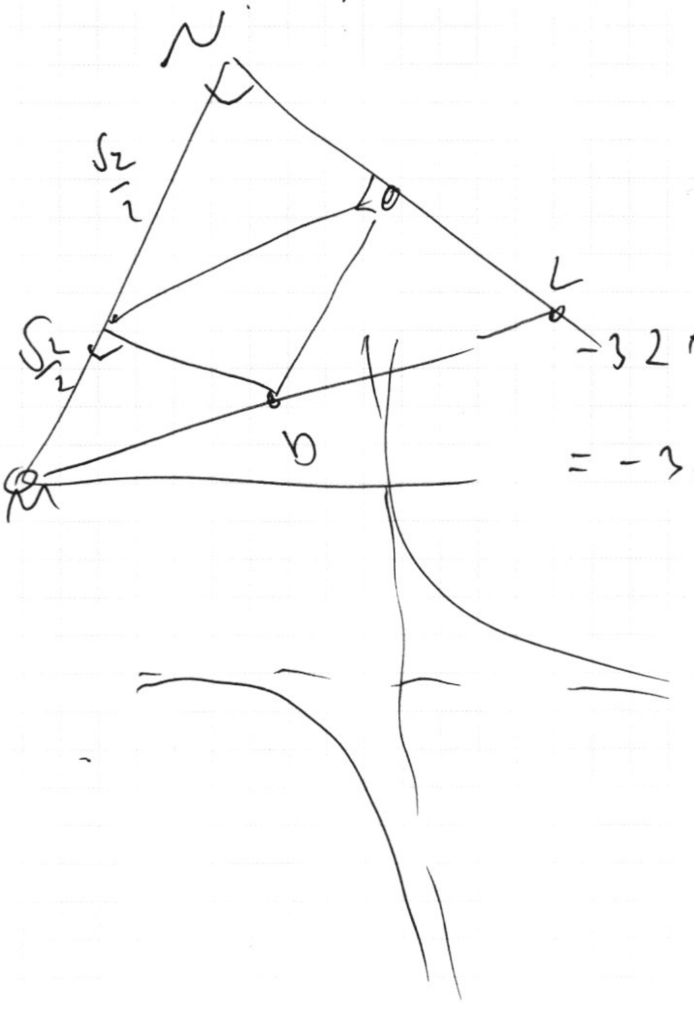
$4(8x^2-9x)$

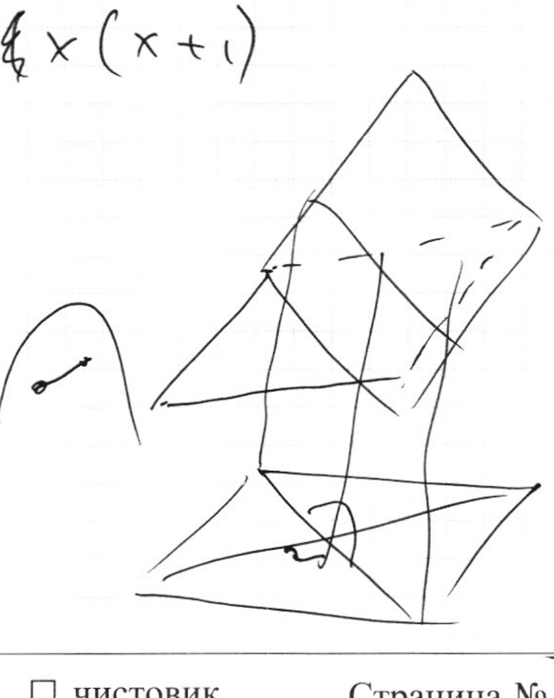
$32x^2-36x=$

$=$

$-32x^2+32x+4(x-3)=$

$=-32x(x+1)$

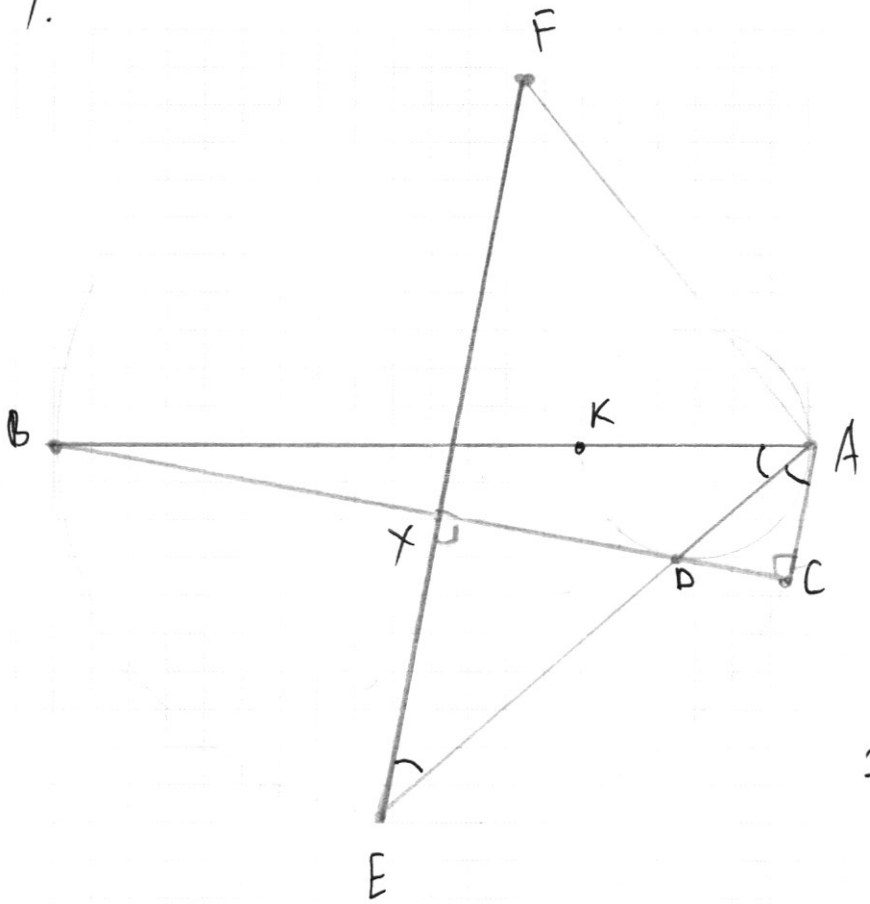




☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4.



$R,\ r = ?$

$\angle AFE$

S_{AEF}

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

т.к. из леммы архимеда AD - бис-са

1) $CD \cdot AB = BD \cdot AC$

$CD \cdot 2R = BD \cdot AC$

2) $AC^2 + BC^2 = 4R^2$

т.к. $\angle BCA = 90^\circ$ - оп на диаметр

$$\begin{cases} \frac{15}{2} \cdot 2R = \frac{17}{2} \cdot AC \\ AC^2 + \left(\frac{15+17}{2}\right)^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\cancel{15^2 R^2 = \frac{17}{2} AC} \quad \cancel{AC}}$$

$$\begin{cases} 15^2 R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 AC^2 \\ AC^2 + 16^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC^2 = \left(\frac{15 \cdot 2}{17}\right)^2 R^2 \\ \left(\frac{30}{17}\right)^2 R^2 + 16^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$$2^2 R^2 - \left(\frac{30}{17}\right)^2 R^2 = 16^2$$

$$\left(2 - \frac{30}{17}\right)\left(2 + \frac{30}{17}\right) R^2 = 16^2$$

$$\frac{4}{17} \quad \frac{64}{17} R^2 = 16 \cdot 16 = 4 \cdot 4 \cdot 16 = 4 \cdot 64$$

$$R = 17 \qquad AC = \frac{15 \cdot 2}{17} \cdot 17 = 30$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

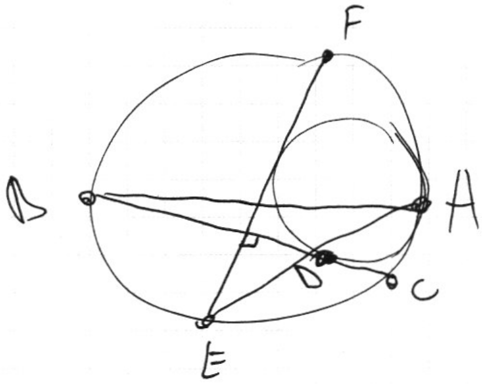
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R, 2 \quad \angle AFE,$

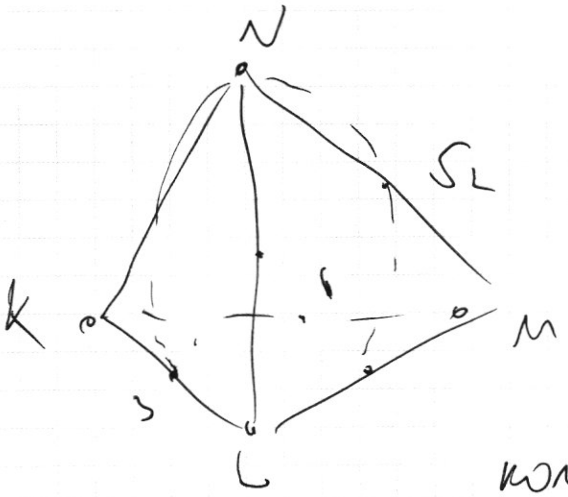


$16x - 16 \,\big|\, 4x-5$

$\underline{16x - 20} \quad 4$

$0 + 4$

$LM = ? \quad R_{min} = ?$



$a, b \in D(f) \in R_{>0}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \quad p$ - пр.

кол-во $(x, y) \quad 2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(2) = 0 \qquad f(13) = 3$

$f(3) = 0 \qquad f(17) = 4$

$f(5) = 1 \qquad f(19) = 4$

$f(7) = 1 \qquad f(23) = 5$

$f(11) = 2 \qquad f(1) = 0$

$f(2) = f(2) + f(1) = \quad 0 = 0 + f(1)$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 продолжение

3) $BK \cdot BA = BD^2$ — степень т. B отн ω

$(2R - 2r) \cdot 2R = BD^2$

$(34 - 2r) \cdot 34 = \frac{17^2}{2^2}$

$34 - 2r = \frac{17}{8}$ $\quad 17 - r = \frac{17}{8}$ $\quad r = 17 \cdot \frac{7}{8} =$

$\cancel{2r = 34 - \frac{17}{8} = 17\left(2 - \frac{1}{8}\right) =}$ $\quad = \frac{70+49}{8} = \frac{119}{8}$

4) $AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{15^2}{4} + 30^2} = 15\sqrt{\frac{1}{4} + 4} =$

$= 15\frac{\sqrt{17}}{2}$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$ED = \frac{\frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2}}{\cancel{15}\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

из подоб. $XD = DC \cdot \frac{ED}{AD} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{15\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow BX = XC = 8$

значит $\angle EAF = 90°$ т.к. EF — диаметр т.к. $\perp BC$ и делит пополам

4.

5) $\angle EFA = 90 - \angle AEF = 90 - \angle DAC$

$tg\,\angle DAC = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{5}{2}}{50} = \frac{1}{4}$

$\angle EFA = 90^\circ - arctg\,\frac{1}{4}.$

6) $S_{EFA} = EA \cdot AF\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2} EA \cdot \sqrt{(2R)^2 - EA^2} =$

$= \frac{1}{2}\, 8\sqrt{17}\,\sqrt{34^2 - 8^2 \cdot 17} = 4 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17}\sqrt{4 \cdot 17 - 8^2} =$

$EA = \frac{\sqrt{17}}{2} + 15\,\frac{\sqrt{17}}{2} = 16 \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$

$= 8 \cdot 17\,\sqrt{17 - 4^2} = 8 \cdot 17 = 80 + 56 = 136$

5) $\sin\angle EFA = \frac{EA}{EF} = \frac{EA}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{2 \cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Ответ: $R = 17$, $z = \frac{119}{8}$, $\sin\angle AFE = \frac{4}{\sqrt{17}}$,

$S_{EFA} = 136.$

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad 2 \le x \le 25$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p - простое $\qquad 2 \le y \le 25$

$$f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + f(a) = f(1) = 0$$

т.к. $f(2) = f(1) + f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0 \quad f(1) + 0 = 0$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

~~$f(1) = 0$~~

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 1$

итого всего

10 нулей

8 ед.

2 дв.

1 тр.

2 четв.

1 пят.

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

1) ~~$x \ne 0$~~ $f(x) = 0$ $\quad 10 \cdot 14$ способ.

2) $f(x) = 1$ $\quad 8 \cdot 6$ сп.

3) $f(x) = 2$ $\quad 2 \cdot 4$ сп

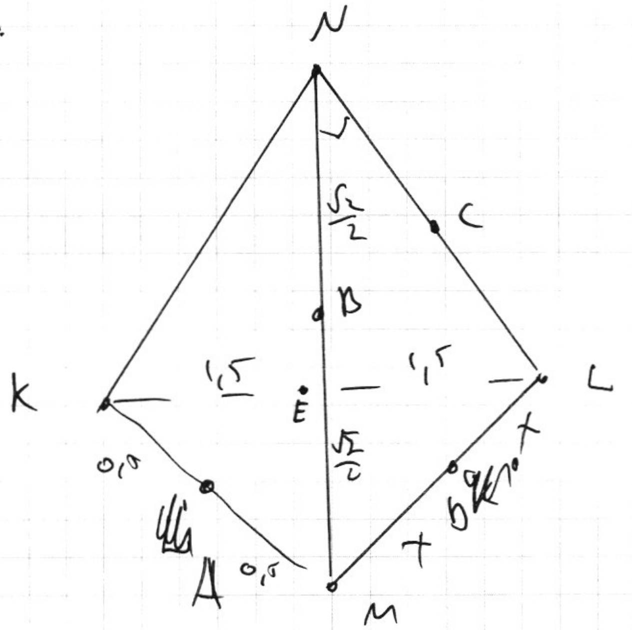
4) $f(x) = 3$ $\quad 1 \cdot 3$ сп

5) $f(x) = 4$ $\quad 2 \cdot 1$ сп

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~8.~~

7.



$KL = 3$ $KM = 1$

$MN = \sqrt2$

$LM = ?$

$R_{min} = ?$

1) $AE \parallel ML$, $BC \parallel ML$, $AB \parallel KN$, $EC \parallel KN$

как ср. линии значит $ABCE$ — прямоуг.

т.к. вписан в сферу и A, B, C, E лежат в 1 пл-ти

Тогда т.к. $AB \perp BC$, то $KN \perp ML$ и ||.

Тогда центр O сферы лежит на прямой l, $l \perp ABCD$ и l проходит через O' - пересеч диаг. прямоуг. $ABCE$.

~~$KN \perp ML$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. продолж.

Тогда всего способов $140+48+8+3+2=$

$=140+50+11=$

$=201$

Ответ: 201

5. $10x+|x^2-10x|^{\log_5 4} = x^2+5^{\log_5(10x-x^2)}$

ОДЗ:

$10x-x^2>0$

$x(x-10)<0$

$x\in(0;10)$

$x^2-10x=t<0$

$(-t)^{\log_5 4} = t+5^{\log_5(-t)}$

~~$(-t)^{\log_5 4} = t + t^{\log}$~~

$(-t)^{\log_5 4} = t+(-t)^{\log_5 5}$

$-t=k>0$

$k^{\log_5 4} = -k+k^{\log_5 5}$

$k^{\log_5 \frac{4}{3}}+1 = k^{\log_5 \frac{5}{3}}$

1. продолжение

1) $2tg^2\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$tg^2\alpha = -3$ не подх

2) $2tg^2\alpha - 2 + 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha = 1$

$tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

2. $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$(x-6)^2 - 36 + 9(4y^2 - 4y + 1) - 9 = 45$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$(x-6) = a \qquad a - 6b = x - 6 - 12y + 6 = x - 12y$

$(2y-1) = b$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{(x-6)(2y-1)} = \sqrt{ab} > 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \qquad 90 - 13ab + 27b^2 = 0$

$a = \frac{90 + 27b^2}{13b} = 9 \cdot \frac{10 + 3b^2}{13b}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~5. $f(ab) = f(a) + f(b)$~~ $\quad 2 \le x \le 25$

~~$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$~~ $\quad 2 \le y \le 25$

~~$f(x/y) < 0$~~

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

2. продолжение

$$9^2 \left(\frac{10+3b^2}{13b}\right)^2 + 9b^2 = 90 \qquad b \ne 0$$

~~$9(10+3b^2)^2 + 13^2 b^4 = 10b^2$~~

~~$9(100+60b^2+9b^4) + b^4 = 10b^2$~~

~~$900 + 540b^2 + 81b^4 + b^4 = 10b^2$~~

~~$82b^4 + 530b^2 + 900 = 0$~~

~~$41b^4 + 225b^2 + 450 = 0$~~

$$9(10+3b^2)^2 + b^2 \cdot (13b)^2 = 10 \cdot (13b)^2$$

$$9(100+60b^2+9b^2) + 169b^4 = 1690b^2 \qquad 169+81 = 170+80 = 250$$

$$900 + 540b^2 + 81b^4 + 169b^4 = 1690b^2 \qquad 1690 - 540 = 1150$$

$$250 b^4 - 1150b^2 + 900 = 0 \qquad 1150 = 5 \cdot 10 \cdot 23 =$$

$$10b^4 - 46b^2 + 36 = 0 \qquad = 46 \cdot 25$$

$$5b^4 - 23b^2 + 18 = 0 \qquad 900 = 9 \cdot 25 \cdot 4 = 36 \cdot 25$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\cancel{D = 121 - 5\cdot4\cdot18 = 121 - 20\cdot18 =}$

$23^2 = 529$

$460 + 69 = 529$

$D = 23^2 - 5\cdot4\cdot18 = 529 - 360 = 129 + 40 = 169$

$b^2_{12} = \dfrac{23 \pm 13}{10}$

$b_1^2 = 1 \qquad b_2^2 = \dfrac{36}{10}$

$b = \pm 1 \qquad b = \pm\dfrac{6}{\sqrt{10}}$

$\cancel{a = 9\,\dfrac{10 + 3\cdot\frac{36}{10}}{13\cdot b}}$

$a = 9\cdot\dfrac{10+3}{13\cdot b} =$

$\cancel{a = 9\ 10+}$

$= \dfrac{9}{b}$

$a = 9\cdot\dfrac{10+3\cdot\frac{36}{10}}{13\cdot\frac{6}{\sqrt{10}}} =$

$b=1 \quad a=9 \quad \rightarrow \quad x=15, \ y=1$

$b=-1 \quad a=-9 \quad \rightarrow \quad x=-3, \ y=0$

$\uparrow$

не подх т.к. $a-6b>0$

но $-9+6<0$

$= 9\,\dfrac{10+108}{13\cdot6\cdot\sqrt{10}} =$

$= \cancel{9}^{3}\,\dfrac{\cancel{118}\ \cancel{59}\ 2\cdot59}{\cancel{13}\cdot\cancel{6}\cdot\sqrt{10}} =$ (13, 2)

$= \dfrac{3\cdot59}{13\sqrt{10}}$

Ответ: $(15;1)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$a^{\log_b c} = \cancel{b^{\log}}\ \cancel{c}^{\log_a c}$

$a^{\log_a c} = c$

~~$\log_c a \log_a c = 1$~~

~~$a = c^{\log_a c}$~~ ~~$a = a^{\log_b c}$~~

$a^{\log_b c \log_b a \log_a b} = \cancel{b^{\log}}\ b^{\log_b c \log_b a} =$

$= c^{\log_b a}$

$|t|^{\log_3 4} = 4^{\log_3 |t|}$

$5^{\log_3 -t} = (-t)^{\log_3 5}$

$|t|^{\log_3 4} + t^{\log_3 5} \geq 2t$

$|t|^{\log_3 4 - 1} + t^{\log_3 5 - 1} \geq 1$

$|t|^{\log_3 \frac{4}{3}} + t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 1$

$XD = DC \frac{ED}{HD} = \cancel{\frac{15}{2} \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{}} = \frac{\sqrt{17}}{5}$

$= \frac{15}{2} \frac{\cancel{\frac{\sqrt{17}}{2}}}{15 \cancel{\frac{\sqrt{17}}{2}}} = \frac{1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(a, b) ,

6 $\quad \dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] = A$

~~$\dfrac{16(x-1)}{4x-5} \le ax+b \le -32x(x-1)+4x-3$~~

$f(x)\ ax+b$ при $x \in A$ — отрезок

$g(x)\ -32x^2+36x-3$ — парабола ветви вниз

отрезок лежит ниже параболы $\Leftrightarrow$

границы отрезка лежат внутри параболы.

$f(1) \le g(1) \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) \le g\left(\frac{1}{4}\right)$

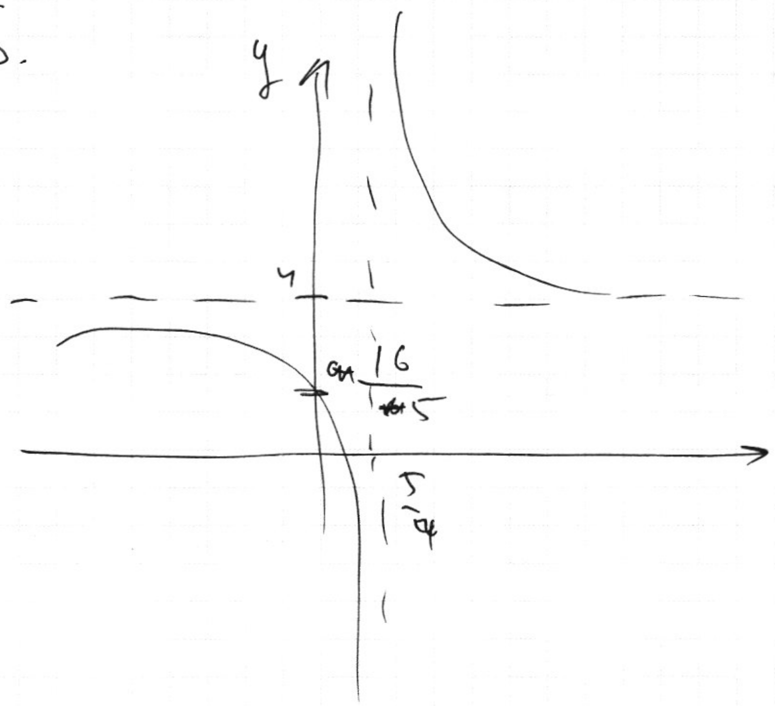
$\begin{cases} a+b \le -32+36-3 = 1 \\ \frac{a}{4}+b \le -32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3 = -2+9-3 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b \le 1. \\ \frac{a}{4}+b \le 4 \end{cases}$

$p(x) = \dfrac{16x-16}{4x-5}$ — гипербола асимптоты $x = \frac{5}{4}$, $y = 4$

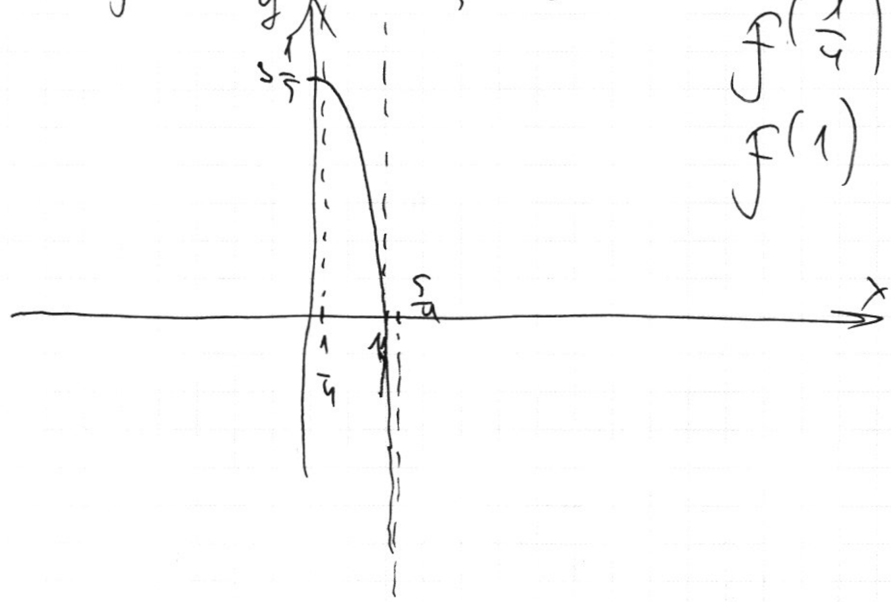
$p(0) = \dfrac{-16}{-5} \quad p(x) = 0$ при $x = 1$

6.



Заметим, что отрезок $f(x) \geq g(x)$

при [illegible]



$f\left(\frac{1}{4}\right) \geq g\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(1) \geq g(1)$

7.

точки $D, B, C, N \in$ окр-ти

по т.к. $BN \parallel DC$ $BN = DC$, то

$DBNC$ − пар-м $\Rightarrow$ н/у

тогда $BD = \sqrt{MD^2 + MB^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + x^2}$

и $\angle MNL = 90^\circ$

~~тогда~~

$\cancel{MN^2 + NL^2 = ML^2}$

$\cancel{2 + 4BD^2 = 4x^2}$

$\cancel{2 + 4\left(\frac{1}{2} + x^2\right) = 4x^2}$

$\cancel{2 - 2 + 4x^2 = 4x^2}$

~~тогда $ND \perp BC$ значит~~

~~$AECB \perp NBDC$~~

~~т.к. средняя линия ц/д $AECB$ ∥ AB~~

~~такая, что $L \parallel AB$, $L \perp BC$ и $L \perp ND$.~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

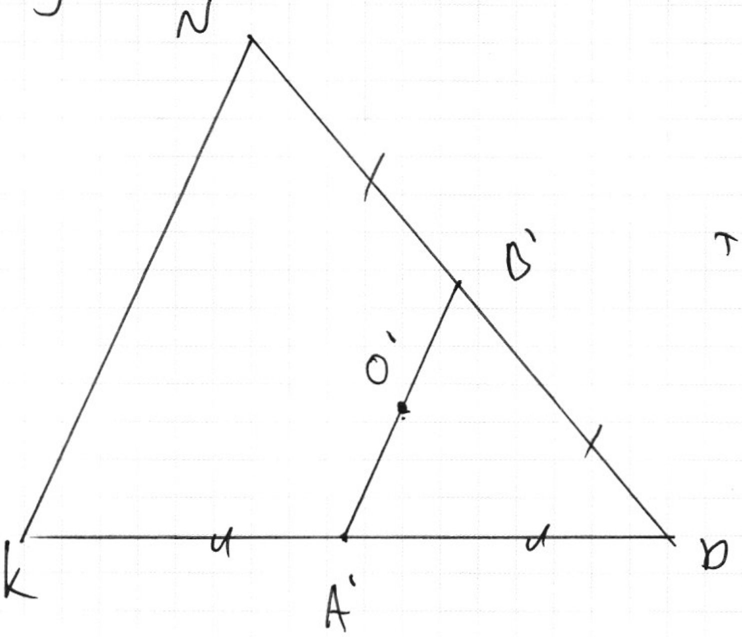
ШИФР
(заполняется секретарём)

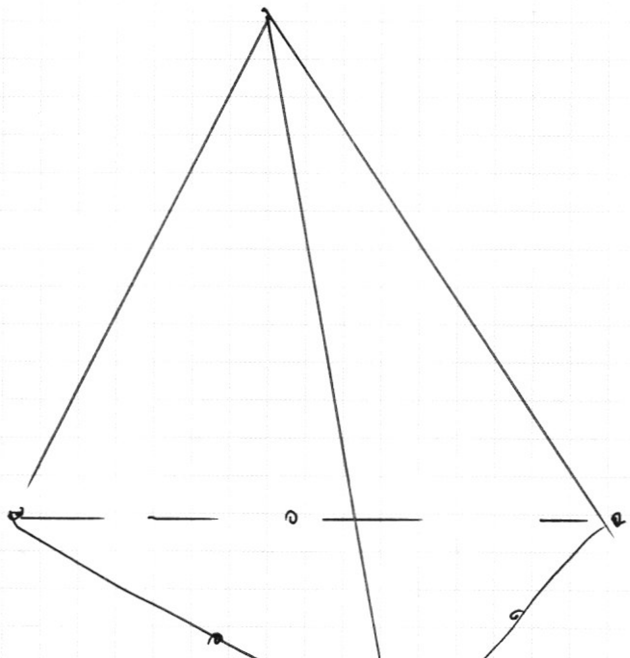
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассмотрим пл-ть KND A' - сер KD
B' - сер ND

тогда O' - сер. $A'B'$

т.к. A' - проекция





$27b^2 + 9a - 11ab = 0$

(a, b) были для всех $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$$

a

x^2-

$$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

$x(2y-1) - 6(2y-1) =$

$= (x-6)(2y-1)$

$4y^2 - 4y + 1$

$32x^2 - 36x + 3$

$D_1 = 18^2 - 32 \cdot 3 = 324 - 96 = 228$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(2\alpha + 2\beta)$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$tg\alpha =$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$1 - 2tg^2\alpha + tg^4\alpha + 4tg^2\alpha = 1 + 2tg^2\alpha + tg^4\alpha$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\cos 2\beta$$

$$\sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$

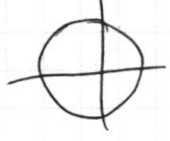
$\sin 2\alpha +$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»	ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^2+ab^2=$ $\quad t^2-6z^2=tt \quad t^4+9z^4=90$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad tg\,\alpha=?$ $\quad$ 23 рис.



$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta=$

$=-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta\pm\frac{2}{\sqrt5}\sin2\beta$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$(x-6)^2-36+36y^2-36y=45$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}=x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$f(9)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)$

$t^{\log_3 4}=$

$t^{\log_t 3\,\log_3 t}$ $\qquad \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=f($ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)+f(2)=f\left(\frac{1}{8}\right)+f$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)