МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

1.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2y \\ x^2-x(5y-1)+(y+1)(4y-2)=0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ \left[\begin{array}{l} x=y+1 \quad (1) \\ x=4y-2 \quad (2) \end{array}\right. \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} x \geq 2y \\ x=y+1 \\ 10(y-1)^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2y \\ x=y+1 \\ y=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ Здесь удовлетворяет пара только $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

(2) $\begin{cases} x \geq 2y \\ x=4y-2 \\ 11(y-1)^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2y \\ x=4y-2 \\ y=1\pm\frac{5}{\sqrt{11}} \end{cases}$ В этом случае удовлетворяет только $\left(2+\frac{20}{\sqrt{11}}; 1+\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; $\left(2+\frac{20}{\sqrt{11}}; 1+\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$.

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

Запишем ограничения на x:

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ |x^2+18x|>0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18. \end{array}\right.$

Пусть $x^2+18x=y>0$

$5^{\log_{12}y}+y \geq y^{\log_{12}13}$ $|: y>0.$

$y^{\log_{12}5-1}+1-y^{\log_{12}13-1} \geq 0.$ так как $f(t)=\log_{12}t$ возрастает при $t>0$

Теперь $\log_{12}5<\log_{12}12=1$

Но тогда $\log_{12}5-1<0$, значит $g(y)=y^{\log_{12}5-1}$ убывающая функция, а с другой стороны $\log_{12}13>\log_{12}12=1$, тогда $\log_{12}13-1>0$, значит $w(y)=y^{\log_{12}13-1}$ возрастает при $y>0$, но тогда $M(y)=g(y)+1-w(y)$ убывает при $y>0$

Но тогда $M(y)=0$ имеет единственное решение. Оно легко угадывается $y=144$

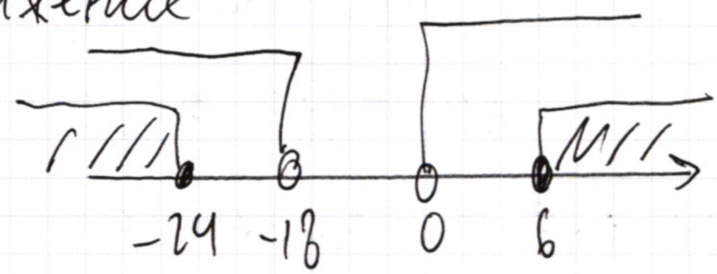
проверим $144^{\log_{12}5-1}+1-144^{\log_{12}13-1}=\frac{25}{144}+\frac{144}{144}-\frac{169}{144}=$ $=0$. Тогда получим $y\leq 144$. Вернемся к x:

$x^2+18x-144\leq 0$ $\left[\begin{array}{l} x\geq 6 \\ x\leq -24 \end{array}\right.$ с учетом ограничений получим:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 продолжение

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 6 \\ x \leq -24 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -18 \end{array}\right. \end{cases}$$



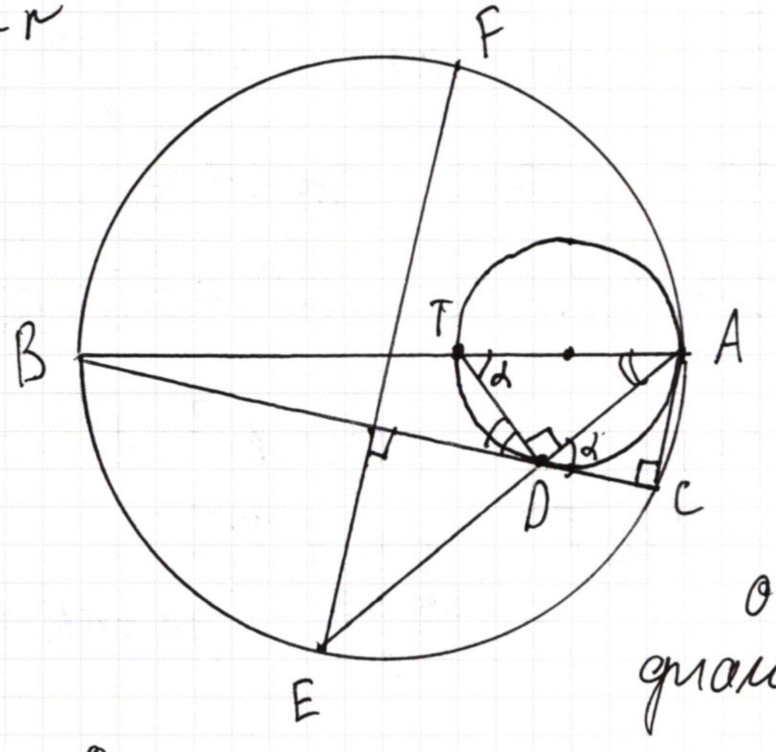
Ответ: $x \leq -24$; $x \geq 6$.

№4

Пусть $AB \cap \omega =$ т. T,

$\forall\ \Omega - R$

$\forall\ \omega - r$



Заметим что TA – диаметр ω, тк AB является линией центров (ось симметрии) $\angle BCA = 90°$ опирается на диаметр BA, и

$\angle TDA = 90°$ опирается на диаметр TA

Тогда пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда и $\angle ATD = \alpha$ как угол между касательной и хордой в $\triangle TDA$.

№4 продолжение

В $\triangle ABC$: $\angle ABC = 90^0 - \angle BAC = 90^0 - \angle BAD - \angle DAC =$
$= 90^0 - 90^0 + \alpha - 90^0 + \alpha = 2\alpha - 90^0$.

Тогда в $\triangle ABC$: $tg\angle ABC = \frac{AC}{BC} = tg(2\alpha - 90^0)$

в $\triangle DAC$: $tg\angle ADC = \frac{AC}{DC} = tg\alpha$

Откуда $tg\alpha \cdot 8 = -ctg2\alpha \cdot 25$.

$\frac{8\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha} \cdot 25 \Big| \cdot \sin2\alpha$.

$16\sin^2\alpha = -25\cos2\alpha = -25 + 50\sin^2\alpha$

$-34\sin^2\alpha = -25$

$\sin^2\alpha = \frac{25}{34}$, так как $\alpha < 90^0$, то

$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$, тогда $ctg\alpha = \frac{3}{5}$.

$AC = \frac{1}{ctg\alpha} \cdot DC = \frac{8 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3}$ $AD = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{40\sqrt{34}}{15}$

По теореме Пифагора $AB^2 = BC^2 + AC^2 =$
$= 625 + \frac{1600}{9} = \cancel{\frac{25 \cdot 15^2}{9}}$, $\cancel{AB = \frac{5 \cdot 15}{3}} =$
$= \frac{25 \cdot 265}{9}$, $AB = 2R = \frac{5}{3}\sqrt{265}$

$R = \frac{5}{6}\sqrt{265}$.

В $\triangle TAD$: $TA \cdot \sin\alpha = AD$ $TA = \frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin^2\alpha} =$
$= \frac{\cancel{40}^{\,8} \cdot 34}{3 \cdot \cancel{25}^{\,5}} = \frac{272}{15} = 2r$; $r = \frac{136}{15}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение.

Как мы уже получили $\angle BAE = \angle EAC = 90^\circ - \alpha$, но тогда равны дуги $\smile BE = \smile EC$, значит EF – серединный перпендикуляр к BC, но тогда $EF \cap AB =$ т. O – центр окружности Ω.

$\angle AFE = 90^\circ - \angle FEA = \alpha = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$, так как $\angle FAE = 90^\circ$ – опирается на диаметр.

$EF = 2R = \frac{5}{6}\sqrt{265}$

$AE = EF \cdot \sin\alpha$

$AF = EF \cdot \cos\alpha$. $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} AE \cdot AF =$

$= EF^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{4} = \frac{25}{36} \cdot 265 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{125 \cdot 265}{24 \cdot 34}$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{5}{6}\sqrt{265}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$;

$S_{\triangle AFE} = \frac{34325}{816}$

N5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

Пусть $b = \frac{1}{a}$, тогда $f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

но если $a=1$, а $b=2$, то $f(2) = f(1) + f(2)$,

Откуда $f(1) = 0$, тогда $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$.

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

Откуда $f(y) > f(x)$.

Теперь найдем значение $f(x)$, для $1 \leq x \leq 24$.

$f(1) = 0$, $f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$; $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$;

$f(4) = 2f(2) = 0$; $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$;

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$; $f(8) = f(4) + f(2) = 0$; $f(9) = 2f(3) = 0$;

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$; $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$;

$f(12) = f(4) + f(3) = 0$; $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$;

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(3) + f(5) = 1$;

$f(16) = 0$; $f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(18) = 0$; $f(19) = [\frac{19}{4}] =$

$= 4$; $f(20) = f(4) + f(5) = 1$; $f(21) = f(3) + f(7) = 1$;

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$; $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$;

$f(24) = f(4) + f(6) = 0$.

Таким образом на $1 \leq x \leq 24$ $f(x) \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолжение

Тогда $f(x)=5$ при $x=23$

$f(x)=4$ при $x=17$, $x=19$

$f(x)=3$ при $x=13$

$f(x)=2$ при ~~трех~~ двух значениях x: $x=22$; $x=11$.

$f(x)=1$ при семи значениях x.

$f(x)=0$ при 11 значениях x

Тогда возможные случаи

1) $f(x)=5$ подходит 23 значение y.

2) $f(x)=4$ подходит $24-2-1=21$ значение y.

3) $f(x)=3$ подходит $24-1-2-1=20$ значений y.

4) $f(x)=2$ подходит $24-1-2-1-2=18$ значений y.

5) $f(x)=1$ подходит $24-1-2-1-2-7=11$ значений y.

Всего пар $(x;y)$ $23+21+20+18+11=$
$=93$ пары.

Ответ: 93 пары $(x;y)$

№5 продолжение.

Нам нужно $f(y) > f(x)$

Для каждого значения $f(y)$ найдем кол-во подходящих x.

1) $f(y)=5$ 23 x подходят пар $1\cdot 23=23$.

2) $f(y)=4$ 21 x подходит пар $2\cdot 21=42$.

3) $f(y)=3$ 20 x подходит пар $1\cdot 20=20$

4) $f(y)=2$ 18 x подходит пар $2\cdot 18=36$.

5) $f(y)=1$ 11 x подходят пар $7\cdot 11=77$.

6) $f(y)=0$ таких x нет

Всего $23+42+20+36+77=162+36=$
$=198$ ~~$(x;y)$~~ пар $(x;y)$.

Ответ: 198 пар $(x;y)$ подходят.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6.

Рассмотрим $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

это гипербола, которая убывает на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$.

Рассмотрим $g(x) = -8x^2 - 30x - 17$, это парабола с ветвями вниз, причем наименьшее значение достигает она в крайних точках $g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 =$
$= 22 - 17 = 5$

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17 = 1$

Построим эскизно наши функции.

Тогда $y = ax + b$ должно лежать ниже прямой проходящей через точки $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$; $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ или совпадать с ней.

Найдем эту крайнюю прямую

$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ 1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases}$ $a = -2$ $b = \frac{1}{2}$.

Получим прямую $y = -2x + \frac{1}{2}$.

Проверим касается или пересекается она с $f(x)$ или нет вообще не пересекается.

$-2x + \frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$; $12x + 11 = -8x^2 + 2x - 6x + \frac{3}{2}$

$8x^2 + 16x + \frac{19}{2} = 0$

$8x^2 + 16x + 8 + \frac{3}{2} = 0$; $8(x+1)^2 + \frac{3}{2} = 0$ решений нет то есть такая прямая $y = -2x + \frac{1}{2}$ нам подходит $(-2; \frac{1}{2})$.

Теперь рассмотрим крайний случай, это случай касания прямой $y = ax + b$ с $f(x)$ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ причем при $a = -2$ для этого

$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x + b$, $12x + 11 = -8x^2 + 4xb - 6x + 3b$

$8x^2 + x(18 + 4b) + 11 - 3b = 0$.

$D = 324 + 144b + 16b^2 - 44 + 12b = 280 + 156b + 16b^2$

$D \le 0$ тогда $4b^2 + 39b + 70 \le 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продолжение $b^2 + \frac{39}{4}b + \frac{70}{4} \le 0.$

$-\frac{35}{4} \le b \le -1.$

Мы нашли значения b когда прямая $y = -2x + b$ не будет пересекаться с $f(x)$ очевидно эти значения b нам будут подходить так как они меньше чем $\frac{1}{2}$.

Таким образом $(-2; \frac{1}{2})$ и $(-2; b)$ где $-\frac{35}{4} \le b \le -1.$

Ответ: точно подходит пара $(-2; \frac{1}{2})$

N 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = -\frac{2\cdot\sqrt5}{5\cdot(-1)} = \\ = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha.$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \mid \cdot\sqrt5.$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ при } \cancel{\text{этих}}\ \text{их}\ \alpha\ \ \text{tg}\alpha \text{ не определен} \\ 4\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0;\ 2\,\text{tg}\alpha = -1;\ \text{tg}\alpha = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 продолжение

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

Тогда $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \mid \cdot \sqrt5.$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1;$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$

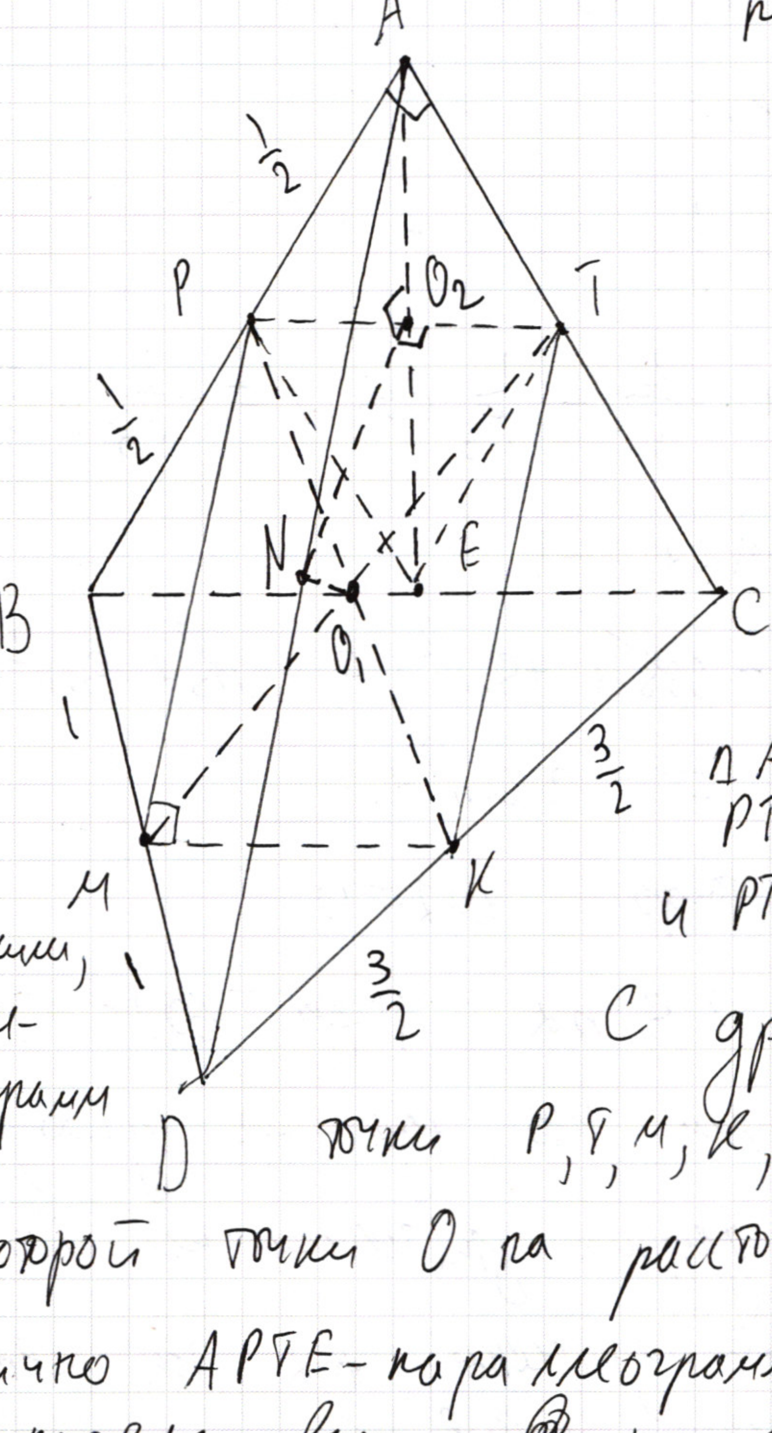
$4\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \quad \text{тогда} \quad tg\alpha = 0 \\ 4\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha = -2\sin\alpha \quad \text{тогда} \quad tg\alpha = -2. \end{array}\right.$

Мы получили что $tg\alpha = -2$; $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = -\frac{1}{2}$. и других значений нет. По условию таких значений $tg\alpha$ не менее 3, значит это они и есть.

Ответ: $tg\alpha = -\frac{1}{2}$; $tg\alpha = -2$; $tg\alpha = 0$.

№7



Обозначим соответствующие ~~вер~~ середины ребер, как показано на рисунке.

С другой стороны $PT \parallel MK$ и $PT = MK$, как средние линии в $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$: $PT = MK = \frac{1}{2}BC$, и $PT \parallel MK \parallel BC$.

Мы получили, что PTKM-параллелограмм

С другой стороны точки P, T, M, K, E, A равноудалены от некоторой точки O на расстояние R.

Аналогично APTE-параллелограмм.

при проецировании ~~O~~ на соответствующие плоскости (APTE) и (PTKM) точка O попадет в точки которые равноудалены от вершин.

Это следует из теоремы Пифагора $h \triangle R$ в h, R равная $\triangle$ полученная.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 продолжение

Но тогда, чтобы была точка в параллелограмме равноудалённая от вершин, ~~в него~~ около него можно тогда описать окружность, но тогда наши параллелограммы это прямоугольники должны быть.

Это значит, что $\angle BAC = \angle$ ~~BDC~~ $PMK = 90^\circ$.

Тогда $BC^2 = AB^2 + AC^2$ по теореме Пифагора.

Но тогда O лежит на пересечении перпендикуляров к плоскостям (PAT) и (PTK) через точки O_1 и O_2 - где O_1 и O_2 ~~-~~ точки пересечения диагоналей прямоугольников $PTKM$ и $PATE$. Тогда эти перпендикуляры пересекаются в точке O. O_1N - это перпендикуляр к $(PTMK)$ в точке O_1. И из симметрии относительно AD прямых PM и TK этот перпендикуляр пересекает AD в середине.

№7 продолжение.

то плоскость $(ANO_1) \perp (PTK)$ из симметрии прямых PM и TK относительно AP.

Тогда O_2N' обязано пересекать эту плоскость, но тогда точки N и N' совпадают.

Значит искомая точка O – это ~~центр~~ точка N.

Но тогда.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\left(-\frac{11}{4}; 5\right)\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$.

$5 = k\cdot\left(-\frac{11}{4}\right) + b$

$1 = -\frac{3}{4}k + b$

$4 = -2k; \quad k = -2$

$1 = -\frac{3}{2} + b; \quad b = \frac{5}{2}$.

$12x + 11 = -8x^2 - 6x + 2x + \frac{3}{2}$.

$8x^2 + 16x +$

$12x + 11 = \left(-2x + \frac{5}{2}\right)(4x + 3)$.

$12x + 11 = -8x^2 - 6x + 10x + \frac{15}{2}$.

$8x^2 + 8x - \frac{7}{2} = 0$.

$D = 64 + 28\cdot 8 = 16(4 + 12) = 16^2$.

$x = \frac{-8 \pm 16}{16} = -\frac{1}{2} \pm 1$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ нелепо.

Решение пара одна $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$.

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$,

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3}=1$

$4x+3=-1$

$x=-1$

парабола

вершина в $x_0=\frac{30}{-16}=$

$=-\frac{15}{8}$ $y_0=-8\cdot\frac{900}{\cancel{256}\ 32}+$

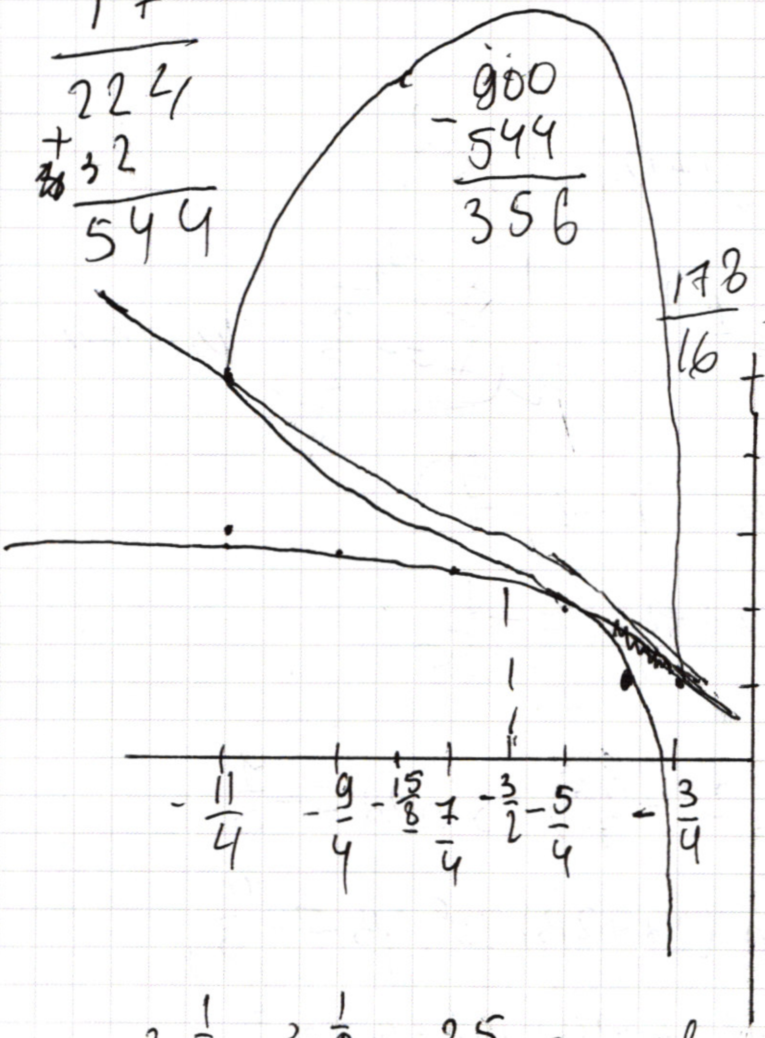
$+\frac{900}{16}-17=$

$=\frac{900}{32}=\frac{356}{32}$

$\frac{178}{16}=\frac{89}{8}$

$\times\ 32$
17
224
$+32$
544

-900
544
356



$3-\frac{1}{4}$ $3-\frac{1}{3}$ $2,5$ 2 $+8$

$-\frac{11}{4}$ $-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17=$

$=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=$

$=5$

$-\frac{3}{4}$: $-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=$

$=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(y) = y^{\log_{12}5} + y - y^{\log_{12}13} \geq 0.$

$\cancel{144}$ 144 25 169.

$y = 144.$

12^3

$125+$

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

1728 - 2197.

$f'(y) = \log_{12}5 \cdot y^{\log_{12}5-1} + 1 - \log_{12}13\, y^{\log_{12}13-1}$

$\log_{12}5 <$

$\sqrt{5} + \sqrt{12} - \sqrt{13} \geq 0.$

$5 + 12 + 2\sqrt{60} \vee 13$

13^3

169×13: 507 + 169 = 2197

$144 = 12 \cdot 12 = 24 \cdot 6.$

24×34: 96 + 72 = 816

125×265: 625 + 870 + 250

~~250~~

~~8 2 5~~

625 + 870 + 250 = 34325

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(1) = f(2) = f(3) = 0.$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - f(a).$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$CD = 8$

$f(6) = 0.$

$BD = 17.$

$f(7) = 1.$

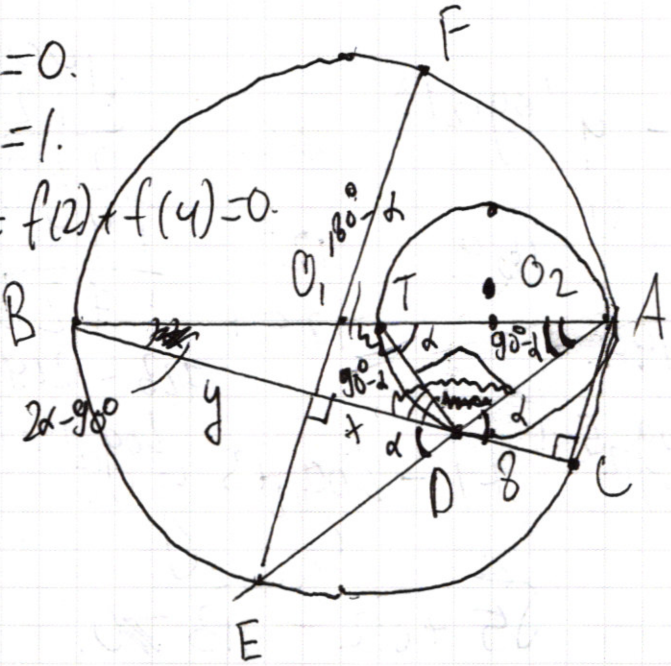
$f(8) = f(2) + f(4) = 0.$

$\frac{BD}{TA} = \frac{BT}{TD} = \frac{TD}{AD}.$

$f(9) = 0.$

$f(10) = 1$

f



$BC = 25.$

$\frac{AC}{\cancel{BC}} = \frac{DC}{BC}.$

AC

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

$ctg^2\alpha = \frac{34}{25} - 1 = \frac{9}{25} \qquad ctg\alpha = \frac{3}{5}.$

$25 \cdot (200 + 25) = 25 \cdot 15^2$

$\times \begin{array}{r} 625 \\ 9 \\ \hline 5625 \end{array}$

$25 \cdot (240 + 25) = 25 \cdot 265$

$\times \begin{array}{r} 34 \\ 8 \\ \hline \end{array}$

$1 - \frac{25}{34} = \frac{9}{34}$

$+ \begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 272 \end{array}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$+$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha=-\frac{4}{5}-\sin2\alpha$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta)+\sin4\beta+\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta+\sin2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}-\frac{4}{5}$

$-2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta)-\sin2\alpha=\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt5}$

№2.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $(x-2)^2+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x\geqslant 2y$ $\quad x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y=2$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0.$

$x^2-x(5y-1)+(y+1)(4y-2)=0.$

$\left[\begin{array}{l} x=y+1 \\ x=4y-2. \end{array}\right.$

1) $(y-1)^2+9(y-1)^2=25.$

$(y-1)^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}.$

2) $2(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$y=1\pm\sqrt{\frac{25}{11}}$

$\begin{cases} y=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$\cancel{2}\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \vee \cancel{2}\pm 2\sqrt{\frac{5}{2}}$

Тогда

$4+\frac{20}{\sqrt{11}}-2=2+\frac{20}{\sqrt{11}}$ $\quad 2+\frac{10}{\sqrt{11}}$

$4-\frac{20}{\sqrt{11}}-2=2-\frac{20}{\sqrt{11}}$ $\quad 2-\frac{10}{\sqrt{11}}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Пусть $x^2+18x=y$ $\quad y>0.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18. \end{array}\right.$

$y^{\log_{12}5}+y-y^{\log_{12}13}\geq 0.\ |:y.$

$y^{\log_{12}5-1}-y^{\log_{12}13-1}+1\geq 0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

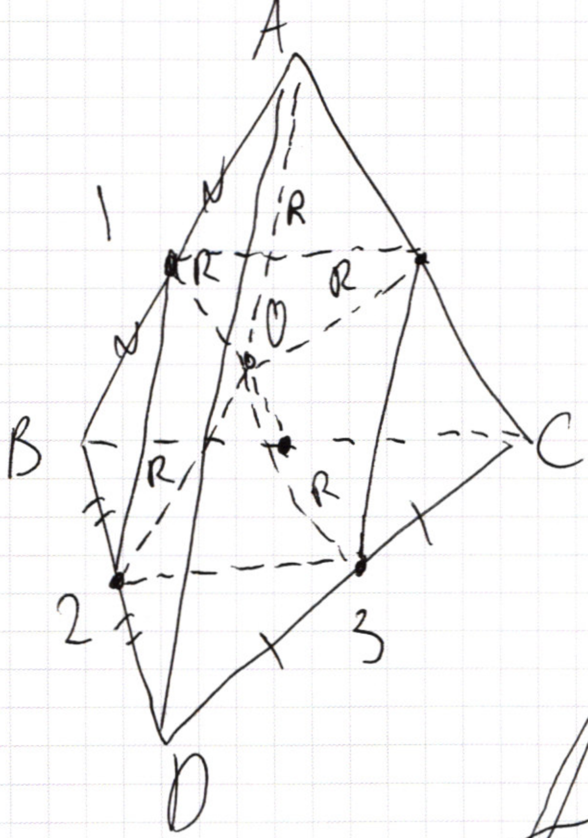
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

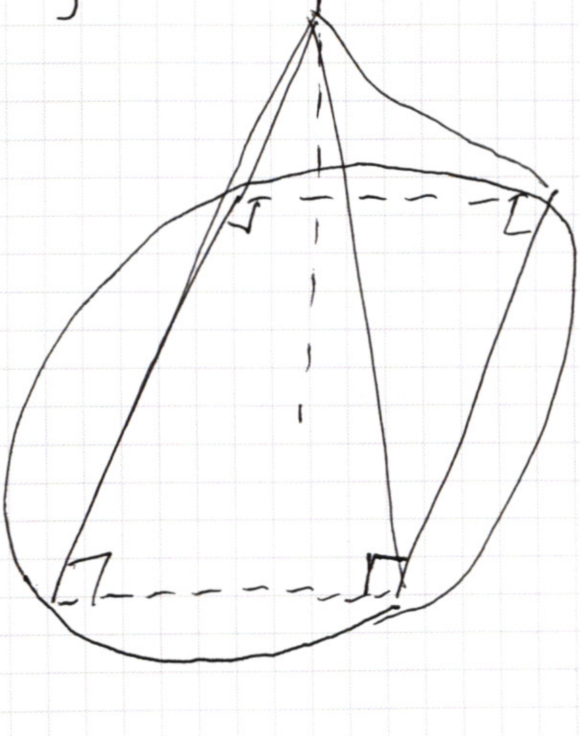
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)