МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\{a_n\}: a, b, c, x$, где $\{a_n\}$ - геом. прогрессия

x - корень: $ax^2-2bx+c=0$.

c - ?

Решение:

1. $\{a_n\}$ - геом. прогр. $\Rightarrow$ $b=a\cdot q$, $c=aq^2$; $x=aq^3$, $a\neq 0$.

где $q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{x}{c}=\ldots$

2. $ax^2-2bx+c=0$;

$\left.\begin{array}{l}\frac{D}{4}=b^2-a\cdot c\\ b=a\cdot q\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{D}{4}=a^2\cdot q^2-a\cdot c=a\cdot \underbrace{a\cdot q^2}_{=c}-ac=ac-ac=0$

Тогда корень: $\left.\begin{array}{l}x=\frac{b}{a}\\ b=a\cdot q\end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{a\cdot q}{a}=q$

3. $x=a\cdot q^3=q \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a\cdot q^2=1\\ c=a\cdot q^2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$

Ответ: 1.

№3) $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (2)\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (1)\end{cases}$

Решение:

1. (1) $x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \Leftrightarrow x^2-12x+36-36+2y^2-4y+2-2+20=0$

$\Leftrightarrow (x-6)^2-36+2(y-1)^2-2+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+2(y-1)^2=18$

2. (2) $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \Leftrightarrow x-6-6y+6=\sqrt{(x-6)(y-1)} \Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

3. Пусть $x-6=a$; $y-1=b$, тогда:

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$;

(1) $a-6b=\sqrt{ab} \Rightarrow a-6b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 6b$,
$ab \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} (1) \end{array}\right.$

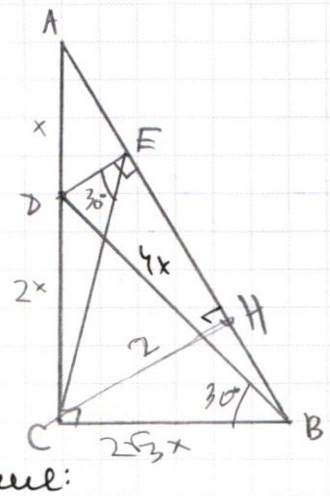
(1) Если $a<0$; $b<0$, то $\left.\begin{array}{l} f(a)=a^2 \Downarrow \\ f(b)=2b^2 \Downarrow \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)+f(b) \Downarrow$ $\Big\} \Rightarrow$
$f(x)=18$ – не возр. и не убыв.

$\Rightarrow a^2+2b^2=18$ – имеет не более одного реш:
если $a=-4$; $b=-1$, то $16+2=18$ (и)
$-4+6=\sqrt{4}$ (и) – подходит.

т.е. $x-6=-4 \Leftrightarrow x=2$
$y-1=-1 \Leftrightarrow y=0$ $\Rightarrow (2;0)$ – решение.

Ответ: $(2;0)$

№4)



Дано:
$\triangle ABC$; $\angle C=90°$
$D \in AC$; $AD:AC=1:3$
$E \in AB$; $DE \perp AB$
$\angle CED=30°$
~~длина~~ $AC=\sqrt{7}$

а) $tg\angle BAC$ – ?
б) $S_{\triangle CED}$ – ?

Решение:

а) 1. $\left.\begin{array}{l} AD:AC=1:3 \\ D\in[AC] \end{array}\right\} \Rightarrow AD:DC=1:2$; Пусть $AD=x$, $DC=2x$.

2. $DE \perp AB$ (по усл) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle DEB=90° \\ \angle DCB=90° \end{array}\right\} \Rightarrow DEBC$ – вписанный (по пр. впис. чет.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DBC=\angle DEC=30°$ (как опир. на одну дугу углы)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\triangle DBC$: $\angle C=90°$; $\angle DBC=30°$; $DC=2x \Rightarrow CB=DC\cdot ctg\angle DBC=$
$=DC\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot x$

4. $\triangle ABC$; $\angle C=90°$; $AC=DC+AD=3x$; $BC=2\sqrt{3}x \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{3}x}{3x}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

б) 1. $AC=\sqrt{7}$; $AC=3x \Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\Rightarrow BC=2\sqrt{3}x=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\triangle ABC$: по т. Пифагора: $AB^2=AC^2+BC^2=7+\frac{4\cdot\cancel{21}^{7}}{\cancel{9}_3}=$
$=\frac{21+28}{3}=\frac{49}{3} \Rightarrow AB=\frac{7\sqrt{3}}{3}$;

2. Опустим высоту CH, тогда $CH=\frac{AC\cdot CB}{AB}=$
$=\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=\frac{2\cdot 7}{7}=2$;

3. $DE\perp AB$; $CH\perp AB \Rightarrow DE\parallel CH \Rightarrow \angle ADE=\angle ACH$ (соотв.) $\Big\}\Rightarrow$
$\angle DAE$ – общ.

$\Rightarrow \triangle DAE \sim \triangle CAH$ (по дв. углам) $\Rightarrow \frac{DE}{CH}=\frac{AD}{AC}$, т.е.
$\frac{DE}{2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow DE=\frac{2}{3}$;

4. $\triangle DEC$; $\angle DEC=30°$; $DE=\frac{2}{3}$; $DC=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\sqrt{7}$

По т. косинусов:

$DC^2=DE^2+EC^2-2\cdot DE\cdot EC\cdot\cos\angle DEC$, т.е.

$\frac{4}{9}\cdot 7=\frac{4}{9}+EC^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot EC\cdot\cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{\cancel{9}_3}\cdot\cancel{6}^2=EC^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot EC \Leftrightarrow EC^2-\frac{2}{\sqrt{3}}EC-\frac{8}{3}=0$

$\Leftrightarrow 3EC^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot EC-8=0$;

$\frac{D}{4} = 3 + 3\cdot 8 = 27$; $EC_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{3}$;

$EC_1 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} < 0$ – не подх

$EC_2 = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} > 0$ – подх $\Rightarrow EC = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

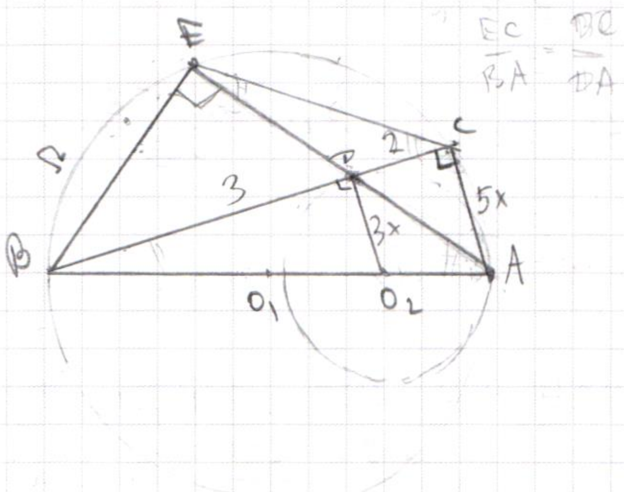
5. $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot CE\cdot \sin\angle DEC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} =$

$= \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5.)



Дано:
ω кас Ω в т. A ; $CD = 2$
внутр. обр. $BD = 3$
BA – диам Ω
BC – хорда Ω
BC кас ω в т. D
$AD \cap \Omega = E$
R – рад Ω ; O_1 – ц. Ω
r – рад ω ; O_2 – ц. ω

R – ? ; r – ? ; S_{BACE} – ?

Решение:

1. BC – кас. к ω в D (по усл), O_2 – центр ω $\Big\} \Rightarrow O_2D \perp BC$; O_2D – радиус ω (по т. о рад. к кас)

2. BA – диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90°$ (опир. на д.)

$\omega \cap \Omega = A$, AB – диам Ω $\Big\} \Rightarrow O_1; O_2 \in AB$.

3. $AC \perp BC$; $O_2D \perp BC \Rightarrow O_2D \parallel AC \Rightarrow \angle DO_2B = \angle CAB$ (соотв), $\angle CBA$ – общ. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DBO_2 \sim \triangle CBA$ (по 2м уг) $\Rightarrow \frac{DO_2}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$

Тогда: пусть $DO_2 = r = 3x$; $AC = 5x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $\triangle BDO_2$; $\angle D = 90^\circ$; по т. Пифагора: $BO_2^2 = DO_2^2 + BD^2$, т.е.

$9 + 9x^2 = (2R - r)^2$, т.е. $9 + 9x^2 = (2R - 3x)^2$ (1)

~~ΔBCA~~ 5. $\triangle DBO_2 \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{DO_2}{AC} = \frac{3}{5}$, т.е.

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$, т.е. $\frac{2R - 3x}{2R} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 1 - \frac{3x}{2R} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{2R} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4R}{15}$; (2)

Подставим x в (1) ур-е: $9 + 9\cdot\frac{16R^2}{225} = \left(2R - \frac{4R}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 + \frac{16R^2}{25} = \left(\frac{6R}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 9 + \frac{16R^2}{25} = \frac{36R^2}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = \frac{20R^2}{25} \Leftrightarrow 9 = \frac{4R^2}{5} \Leftrightarrow R^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow \boxed{R = \frac{3\sqrt{5}}{2}}$

6. $r = 3x = 3\cdot\frac{4R}{15} = \frac{4R}{5} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{\cancel{2}}}{5} = \boxed{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$

7. $\triangle DCA$; $\angle DCA = 90^\circ$; $DC = 2$; $AC = 5x = 5\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

по т. Пифагора: $DA^2 = DC^2 + AC^2$, т.е. $DA^2 = 4 + 20 = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow DA = \sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = 2\sqrt{6}$

8. $\left.\begin{matrix} BC \text{ и } EA - \text{хорды } \Omega \\ BC \cap EA = D \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD\cdot DE = BD\cdot DC$, т.е.

$2\sqrt{6}\cdot DE = 3\cdot\cancel{2} \Leftrightarrow DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

$AE = DE + DA = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$;

9. $\triangle BEA$; $\angle BEA = 90^\circ$ (оп. на диам. AB); по т. Пифагора:

$BE^2 = BA^2 - EA^2$, т.е. $BE^2 = 9\cdot 5 - \frac{25\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}} = 45 - \frac{75}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = \sqrt{\frac{15}{2}}$

10. $\left.\begin{matrix} \angle CEA = \angle CBA \text{ (оп. на одну дугу)} \\ \angle CDE = \angle BDA \text{ (верт.)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle CED \sim \triangle ABD$ (по 2м угл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{DC}{DA} \Leftrightarrow EC = \frac{AB\cdot DC}{DA}$, т.е. $EC = \frac{3\cdot\sqrt{5}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{6}} = \frac{3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

11. $\triangle BEC$: по т. синусов: $\frac{BC}{\sin\angle BEC} = 2R$, т.е.

$\frac{5}{\sin\angle BEC} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sin\angle BEC = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

12. $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot EC\cdot \sin\angle BEC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{15}{2}}\cdot\frac{\sqrt{30}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{30}}{2}\cdot\frac{\sqrt{30}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\cancel{30}^{10}\cdot\sqrt{5}}{\cancel{8}_{4}\cdot\cancel{3}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

13. $S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot CA = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 5\cdot\cancel{2}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

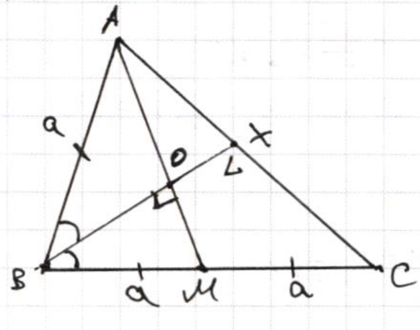
14. $S_{BACE} = S_{\triangle BCA} + S_{\triangle BEC} = \frac{5\sqrt{5}}{4} + 5\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{5}+5\sqrt{5}}{4} = \boxed{\frac{25\sqrt{5}}{4}}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$;
$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$;
$S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

№2) $P = 900$; $\triangle ABC$; $AB; AC; BC \in \mathbb{Z}$; одна из бисс. перп. одн. из мед.

$N - ?$

Решение:



1. $\triangle ABC$; AM – медиана; BL – бисс.
Пусть $AM \cap BL = O$
По усл. $BL \perp AM \Rightarrow \angle BOM = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMB$ – острый

2. $\triangle AMB$; BO – бисс, $BO \perp AM$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle AMB$ – р/б на AM (по пр. р/б тр.)

$\Rightarrow BM = BA = a$

3. AM – мед. $\Rightarrow BM = MC = a = BA$;
Пусть $AC = x$, тогда по нерав. треугольника:

$AB + BC > AC$; $3a > x$
$BC + AC > AB$; $2a + x > a$
$AC + AB > BC$; $x + a > 2a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{3a > x > a}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $P=900$, т.е. $AB+BC+AC=3a+x=900 \Rightarrow x=900-3a$.

5. Т.о. $3a > 900-3a > a \Rightarrow 6a > 900 > 4a \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{150 < a < 225}$

6. Предположим, что мы нашли все такие треугольники, тогда пусть $\angle ABC = \alpha$; по т. косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$, т.е.

$(900-3a)^2 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9(300-a)^2 = 5a^2 - 4a^2 \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow 9(90000 + a^2 - 600a) =$
$= 5a^2 - 4a^2 \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 5400a + 4a^2 \cdot \cos\alpha + 810000 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+\cos\alpha)a^2 - 1350a + 202500 = 0$;

$D/4 = 675^2 - (1+\cos\alpha) \cdot 202500 = 455625 - (1+\cos\alpha) \cdot 202500$

$0 \le 1+\cos\alpha \le 2 \Rightarrow 0 \le (1+\cos\alpha) 202500 \le 405000 < 455625 \Rightarrow$

$\Rightarrow D/4 > 0$ при любом $\alpha \Rightarrow$ в этом ур-ии при любом α ровно два корня

Причем по т. Виета: $a_1 + a_2 = \frac{1350}{1+\cos\alpha} > 0$, $a_1 \cdot a_2 = \frac{202500}{1+\cos\alpha} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1$ и a_2 – положительные. $\Rightarrow$ оба подходят.

$\Rightarrow$ Таким образом мы имеем два вида треугольников, подходящих под условие $\Rightarrow$

6. ~~XXXXXX~~ $150 < a < 225$, $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow N = 2 \cdot (224 - 151 + 1) = 2(224-150) = 2 \cdot 74 = \boxed{148}$

Ответ: 148

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\{a_n\}: a, b, c, x$; $b = a\cdot q$
геом. прогр.

$c = a\cdot q^2$; $x = a\cdot q^3$

x - корень: $ax^2 - 2bx + c = 0$, $a \neq 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac$; $= a^2\cdot q^2 = a\cdot \underbrace{a\cdot q^2}_{c} = a\cdot c$

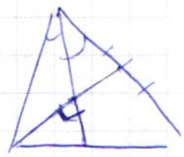
$ac - ac = \underline{0}$; $x = \frac{b\pm 0}{a}$; $\frac{b}{a} = \frac{a\cdot q}{a} = q$

$\{a_n\}: a, b, c, q$

$a, a\cdot q; a\cdot q^2; q$

$q = a\cdot q^3$

$1 = aq^2$



№3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x^2 - 12x + 36 - 36 =$
$= (x-6)^2 - 36$

$2y^2 - 4y =$
$= 2(y^2 - 2y + 1) - 2 =$
$= 2(y-1)^2 - 2$

$x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$ -

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 - 12x + 36 - 36$

$2 \quad\quad -2. \quad -38 + 20 = -18$

$x - 6 + 6 - 6(y-1) - 6$

$(x-6) - 6(y-1)$

$x - 6 = a$, $y - 1 = b$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \mid 18 \\ a\geq 6b \end{cases}$ $a\geq 6b$

$\oplus\ 2a^2-13ab+38b^2-18=0$

$\ominus\ -13ab+34b^2+18=0$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2=18$

$b\geq 0 \Rightarrow a\geq 0$ как кв. относ b.

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ a\geq 6b \end{cases}$ $a^2\geq 36b^2$

$34b^2-13ab+18=0$

$a^2+2b^2+a-6b=\sqrt{ab}+18$

$D=(13a)^2-4\cdot 34\cdot 18=$
$=169a^2-2448$

$18\cdot 4=72$, $72\cdot 34$: 288, 216, 2448

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $a^2-\sqrt{ab}+\frac{1}{4}b^2$

$18=a^2+2b^2\geq 38b^2$ $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$a^2=18-2b^2$

$a-6b\geq 0$

$a^2+2b^2\leq 18$

$b^2\leq$

$2448:13=188{,}3$
-13, 114, -104, 108

~~$a>0:\ a=\sqrt{18-2b^2}$~~

~~$b>0:\ \sqrt{18-2b^2}-6b=\sqrt{\sqrt{18-2b^2}\cdot b}$~~

$\sqrt{18-2b^2}-6b=\sqrt[4]{18b^2-2b^4}$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ | $a^2-12ab+36b^2=ab$

$a\geq 6b$

$a>0 \Rightarrow b>0 \Rightarrow$

$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$

$a^2\geq 36b^2$

$-13ab+34b^2+18=0$ $18\geq a^2+2b^2\geq 38b^2$

$b=\frac{13\pm\sqrt{169a^2-2448}}{68}$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$ $a=\sqrt{ab}+6b$

$38b^2\leq 18$

$b^2\leq\frac{18}{38}$ $0\leq b\leq\frac{18}{38}$

$2a^2-13ab+38b^2-18=0$

~~$ab+36b^2+12b\sqrt{ab}+2b^2-18=0$~~

$18a^2+36b^2-18^2=0$

$-\ a^2-13ab+36b^2=0$

| $17a^2-13ab-18^2=0$

$\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{225}{4}+\frac{6}{4}$ $\frac{15}{2}$, $\frac{6}{6}$ $\frac{36}{4}=9$ $53{,}4x$

$16x^2-4x^2=12x^2$

$x\sqrt{12}=x2\sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \ (1) \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ | $a^2-a+2b^2+6b=18-\sqrt{ab}$

(1) $a^2-12ab+36b^2=ab$; $\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2 \ldots +2b^2-18=0 \end{cases}$

$-13ab+34b^2+18=0$

$D=169a^2-4\cdot34\cdot18=169a^2-2448 \geq 0$

$b_{1,2}=\dfrac{13a\pm\sqrt{169a^2-2448}}{68}$

$34\cdot 4=136$; $136\cdot18$: $1088+136=2448$

$a-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{ab}+\frac{1}{4}b=\left(\sqrt{|a|}-\frac{1}{2}\sqrt{|b|}\right)^2$

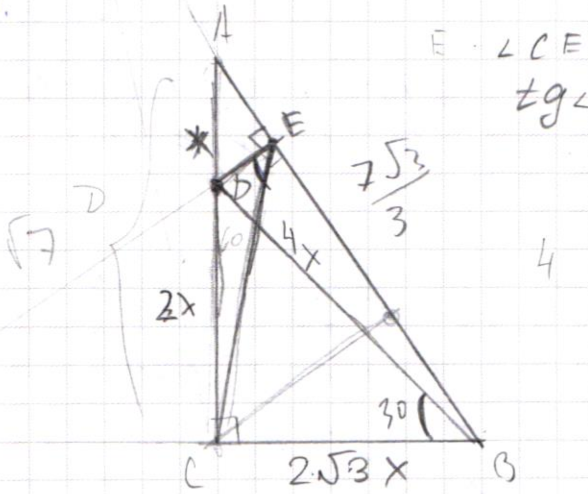
$\dfrac{BO_2}{BA}=\dfrac{3}{5}$

$9+9x^2=(2R-r)^2$; $\begin{cases} 9+9x^2=4R^2-4R\cdot3x+9x^2 \\ 25+25x^2=4R^2 \end{cases}$

$25+25x^2=4R^2$

$9=4R^2-12\cdot Rr$

№4.



$\angle CED=30°$

$tg\angle BAC-?$

$\dfrac{2R-r}{2R}$ $\quad \dfrac{225}{78}\Big|\dfrac{9}{25}$

$1-\dfrac{r}{2R}=\dfrac{3}{5}$

$3x=\sqrt7$; $x=\dfrac{\sqrt7}{3}$

$BC=2\sqrt3x=2\sqrt3\cdot\dfrac{\sqrt7}{3}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

$AB^2=7+\dfrac{4\cdot21}{9}=7+\dfrac{28}{3}=\dfrac{49}{3}\Rightarrow AB=\dfrac{7}{\sqrt3}$

$\sqrt7\cdot\dfrac{2\sqrt7}{\sqrt3}=\dfrac{14}{\sqrt3}$

$\dfrac{D}{4}=3+3\cdot8=(\sqrt{27})^2=(3\sqrt3)^2$

$\dfrac{r}{2R}=\dfrac{2}{5}$

$2\cdot\dfrac{7\sqrt3}{3}=\dfrac{14}{\sqrt3}$

$EC^2-\dfrac{2}{\sqrt3}EC-\dfrac{8}{3}=0$

$3EC^2-2\sqrt3EC-8=0$

$EC=\dfrac{\sqrt3\pm3\sqrt3}{3}$ $\quad \dfrac{3x}{2R}=\dfrac{2}{5}$

$3x=\dfrac{4R}{5}$; $x=\dfrac{4R}{5\cdot3}$

CD = 2, BD = 3   R - ?
r - ?

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$3x = r$

$\sqrt{ab} \le \frac{|a|+|b|}{2}$

$a - 6b = \frac{|a|+|b|}{2}$

$$\begin{cases} 9 + 9x^2 = (2R-r)^2 \\ 25 + 25x^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$9 + 9x^2 = 4R^2 + r^2 - 4R \cdot r$

$25 + 25x^2 = 4R^2$

$16 + 16x^2 = r^2 - 4R \cdot r$

$$\begin{cases} 9 + 9x^2 = 4R^2 + 9x^2 - 4R \cdot 3x \\ 25 + 25x^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$25 + 25x^2 = 4R^2$

$16 + 16x^2 = 9x^2 - 12Rx$

$$\begin{cases} 9 = 4R^2 - 12R \cdot x \\ 25 + 25x^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$16 + 7x^2 = -12Rx$

$$\begin{cases} 7x^2 + 12Rx + 16 = 0 \\ 25 + 25x^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$16 + 25x^2 = 12R \cdot x$

$$\begin{cases} 4R^2 - 12R \cdot x - 9 = 0 \\ 4R^2 - 25x^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$4R^2 + 16 - 25 = 12 \cdot Rx$

$4R^2 - 9 = 12 \cdot Rx$

$$\begin{cases} 4R^2 - 25x^2 - 25 = 0 \\ 16 + 25x^2 = 12R \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4R^2 - 25x^2 - 25 = 0 \\ 16 + 25x^2 - 12R \cdot x = 0 \end{cases}$$

$4R^2 - 12R \cdot x - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = 36x^2 + 4 \cdot 9 = 36x^2 + 36 = 36(x^2+1)$

$R_{1,2} = \frac{6x \pm 6\sqrt{x^2+1}}{4}$

$\frac{6 \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + 6\sqrt{\frac45 + 1}}{4} = \frac{\frac{12\sqrt5}{5} + \frac{18\sqrt5}{5}}{4} = \frac{6\sqrt5}{4} = \frac{3\sqrt5}{2}$

$3a \ge x = 900 - 3a$

$6a \ge 900$

$3a + x = 900$

$x \le 450$

$6a > 900 \Rightarrow a > 150$

$4a < 900$

$a < 225$

$3a + x = 900,\ x = 900 - 3a$

$3a > x > a$

$3a > 900 - 3a > a$

$6a > 900 > 4a$

$a + x > 2a$

$2a \le a + x$

$a \le x$

$\alpha + \beta = 2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

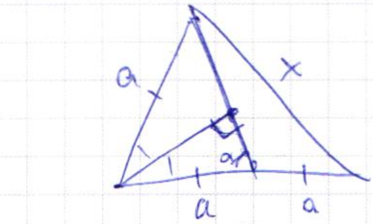
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$a \le 3\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}&3a > x\\&2a+x > a\\&a+x > 2a\end{aligned}\right\} \Rightarrow 3a > x > a$$

$3a + x = 900$

$a^2 \le \sqrt{18}$

$b \le \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$3a = 900 - x$

$x = 900 - 3a$

$\boxed{b \le 3}$

$900 - x > x > \frac{900-x}{3}$

$900 > 2x > 300 + \frac{2x}{3}$

$b \le 3$

$3a > x > a$

$6a > 900 > 4a$

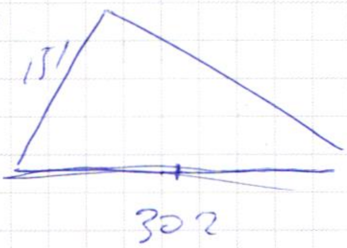
$$\begin{cases} a > 150 \\ a < 225 \end{cases} \Rightarrow 150 < a < 225.$$

$a - 6b \ge 0$

$a \ge 6b$

$x = 900 - 3a$

151:



$151 \cdot 3 = 453$

$x^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos\varphi$

$a \ge 6b > 0$

$a^2 \ge 36b^2$

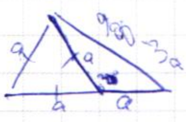
$18 = a^2 + 2b^2 \ge 38b^2$

$b^2 \le \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$

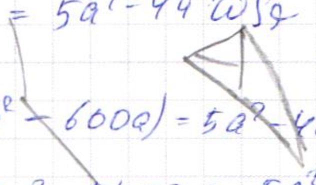
$b \le \frac{3}{\sqrt{19}}$

$6b \le \frac{18}{\sqrt{19}} \le a$

$x^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x^2 =$

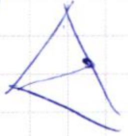


$9(300-a)^2 = 5a^2 - 4a^2\cos\varphi$



$a \ge \frac{18}{\sqrt{19}}$

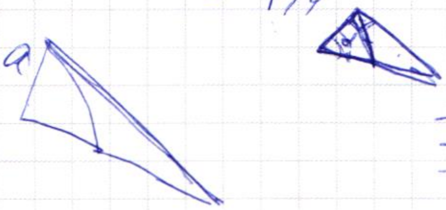
$b \le \frac{3}{\sqrt{19}}$



$9(90000 + a^2 - 600a) = 5a^2 - 4a^2\cos\varphi$

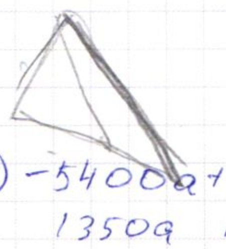
$810000 + 9a^2 - 5400a = 5a^2 - 4a^2\cos\varphi$

$4a^2 - 5400a + 4a^2\cos\varphi + 810000 = 0$



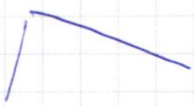
$5400 : 4 = 1350$

$810000 : 4 = 202500$



$4a^2(1+\cos\varphi) - 5400a + 810000$

$1350a \quad 202500$



$(1+\cos\varphi)a^2 - \cancel{5400a + 810000}$
$-1350a + 202500$

$$1350 \,|\, 2 \quad 675$$
$$-12$$
$$15$$

$$675^2 - (1+\cos\varphi)\cdot 202500 > 0$$

$$\times\ 675$$
$$675$$
$$3375$$
$$4725$$
$$4050$$
$$455625$$

$$\times\ 202500$$
$$2$$
$$405000$$

$$224$$
$$-150$$
$$74$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a \geq 6b \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

a

$$1 \leq |a| \leq 2$$

$$2a^2+38b^2-13ab-18=0$$

a

$$12x-4y+20=19$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ 12x-4y+20=18 \end{cases}$$

$$12x-4y+2=0$$

$$6x-2y+1=0$$

$$y=\frac{6x+1}{2}=3x+\frac{1}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$a-6b$

$a\geq 6b$

$-4 \quad -1$

$34b^2-13ab+18=0$

$a-6b\geq 0$

$D=169a^2-4\cdot 34\cdot 18$

$a\geq 6b$

$b_{12}=\dfrac{13a\pm\sqrt{169a^2-4\cdot 34\cdot 18}}{68}$

-4

$\cancel{a^2+a+2b^2+ab}$ $\quad -4 \quad -1$

$a-6b\geq 0$

$a\geq 6b$

$a^2+2a+2b^2-12b=18+2\sqrt{ab}$

$a>b>0$

$a\geq 6b$

$a^2=(\sqrt{ab}+6b)^2=$ $\quad a^2\geq 36b^2$

$=ab+36b^2+12b\sqrt{ab}$

$2a-12b=2\sqrt{ab}$

$a-2\sqrt{ab}+b+a-13b=0$ $\quad a^2+b^2+b^2=18$

$(|a|-|b|)^2+a-13b$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)