МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

a, b, c – посл. члены геом. прогрессии.

Пусть q – знаменатель геом. прогрессии $\Rightarrow$

$\Rightarrow b = aq, \quad c = aq^2$

Перепишем уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$

1) Если $a = 0 \Rightarrow c$ (3 член) $c = aq^2 = 0 \cdot q^2 = 0$

2) Пусть $a \neq 0 \Rightarrow (x+q)^2 = 0 \Rightarrow x = -q$

x – 4 член геом. прогрессии $\Rightarrow x = aq^3$ $\Big\} \Rightarrow -q = aq^3$

$aq^3 + q = 0 \Rightarrow q(aq^2 + 1) = 0$

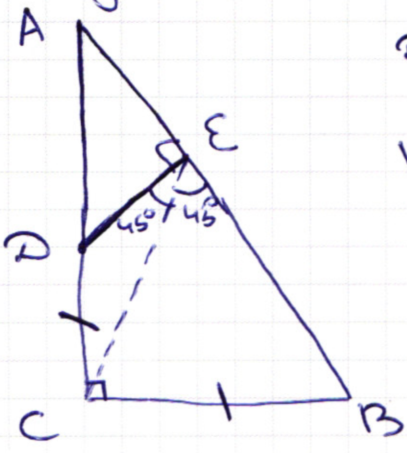
I $q = 0 \Rightarrow c = aq^2 = a \cdot 0^2 = 0$

II $aq^2 = -1 \Rightarrow c = aq^2 = -1.$

Ответ: $c = 0, -1.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 4



Дано: $\triangle ABC - \triangle 90°$ $\angle C = 90°$
$D \in AC$, $AD : AC = 3:5$, $E \in AB$, $DE \perp AB$
$\angle CED = 45°$

Найти: а) $tg\angle BAC$
б) S_{CED}, если $AC = \sqrt{29}$

Решение:

а) 1) $DE \perp AB \Rightarrow \angle AED = \angle BED = 90°$
$\angle BEC = \angle BED - \angle CED = 90° - 45° = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BEC = \angle CED = 45°$

2) $\underset{\text{(противоположные)}}{\angle DEB + \angle BCD} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow DEBC$ - вписанный (признак впис. 4∠) $\Rightarrow \angle EDC = 180° - \angle EBC$ (против. в впис. 4∠)

3) по Т sin $\triangle DEC$ и $\triangle EBC$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{DC}{\sin 45°} = \frac{EC}{\sin\angle EDC} = \frac{EC}{\sin(180° - \angle EBC)} = \frac{EC}{\sin\angle EBC}\\ &\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{EC}{\sin\angle EBC}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{DC}{\sin 45°} = \frac{BC}{\sin 45°} \Rightarrow$$

$\Rightarrow BC = DC$

4) $\frac{CD}{AC} = \frac{AC - AD}{AC} = 1 - \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

5) $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{2}{5}$ (п.3; п.4)

б) 1) $\frac{CD}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow CD = \frac{2AC}{5} = \frac{2\sqrt{29}}{5} = BC$

2) по Т Пиф. $\triangle ACB$
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 + \left(\frac{2\sqrt{29}}{5}\right)^2} = \sqrt{29 + \frac{4 \cdot 29}{25}} = \sqrt{\frac{29^2}{25}} = \frac{29}{5}$

3) $AD = AC - CD = \sqrt{29} - \frac{2\sqrt{29}}{5} = \frac{3\sqrt{29}}{5}$

4) $\sin\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{29}}{5}}{\frac{29}{5}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 (продолжение)

5) $\triangle ADE$ – $\triangle 90^\circ$ ($\angle DEA = 90^\circ$)

~~$\frac{AE}{AD} = \sin\angle BAC \Rightarrow AE = AD\sin\angle BAC = \frac{3\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{29} = \frac{6}{5}$~~

$\frac{DE}{AD} = \sin\angle BAC \Rightarrow DE = AD\sin\angle BAC = \frac{3\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{29} = \frac{6}{5}$

$\frac{DE}{AE} = \operatorname{tg}\angle BAC \Rightarrow AE = \frac{DE}{\operatorname{tg}\angle BAC} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{5}} = 3$

6) $S_{CED} = S_{ACE} - S_{ADE} = \frac{1}{2}AC\cdot AE\cdot\sin\angle BAC - \frac{1}{2}DE\cdot AE =$

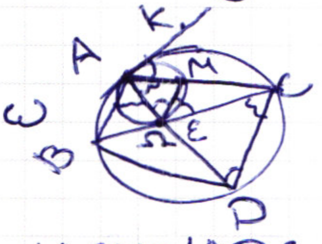
$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt{29}}{29} - \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot 3 = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5} = 0{,}4$

б) $S_{CED} = 1{,}2$

Задача 5.

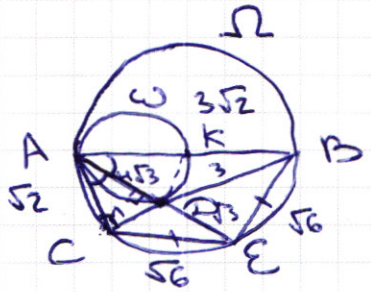
Докажем следующее утверждение: если 2 окружности касаются внутренним образом и хорда большей окружности касается меньшей окружности, то прямая, проходящая через точки касания окружностей и хорды и окружности делит дугу, стягиваемую хордой пополам (лемма Архимеда)



ω и Ω кас. в A, AK общая кас.
BC – хорда ω, E – т. кас. $AE \cap \omega = D$
$AC \cap \Omega = M$

1) $\angle KAM = \smile AM\cdot\frac{1}{2} = \angle AEM$ (уг. между хор. и кас, впис. $\angle$)
$\angle KAM = \smile AC\cdot\frac{1}{2} = \angle ADC$ (анал.)

$\angle AEM = \angle ADC \Rightarrow ME \parallel DC$ (су, при ME, ED, AD – сек.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MEC = \angle ECD$ (нлу); $\angle ECD = \angle BAD$ (опир. на BD)
$\angle MEC = \frac{1}{2}\smile ME = \angle CAD$ ($\angle$ хор. и кас, вп.) $= \angle ECD = \angle BAD$
$\angle CAD = \angle BAD \Rightarrow \smile BD = \smile CD$ ч.т.д.



Дано: ω и Ω кас. в A
AB – диаметр Ω
BC – хорда Ω BC кас ω в D
$AD \cap \Omega = E$
$CD=1$, $BD=3$

Найти: радиусы ω и Ω R_ω, R_Ω
S_{BACE}

Решение: 1) По Лемме Архимеда (доказанной выше)

$CE=BE$, $\angle CAE=\angle BAE \Rightarrow AD$ – б-са $\angle CAB$

2) AB – диаметр $\Rightarrow \angle ACB=\angle AEB=90^\circ$ (впис. ∠, опир на диам)

3) AD – б-са $\angle CAB \Rightarrow$ по св-ву б-сы.

$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{3}$ Пусть $AC=x \Rightarrow AB=3AC=3x$

4) По Т Пиф. $\triangle ACB$ $AB^2=AC^2+CB^2=AC^2+(CD+BD)^2$

$(3x)^2=x^2+(3+1)^2 \Rightarrow 9x^2=x^2+16 \Rightarrow 8x^2=16 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

$AC=x=\sqrt{2}$; $AB=3x=3\sqrt{2}$

$R_\Omega=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5) По Т Пиф $\triangle ACD$ $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}$

$AD=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

$AD\cdot DE=CD\cdot BD$ (св-во отрезков хорд) $\Rightarrow$

$DE=\frac{CD\cdot BD}{AD}=\frac{1\cdot 3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=AD \Rightarrow DE=AD$

6) $AB\cap\omega=K \Rightarrow BD^2=BK\cdot AB$ (св-ва ~~произ~~ кас и сек.)

$BK=\frac{BD^2}{AB}=\frac{3^2}{3\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$AK=AB-BK=3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=BK \Rightarrow AK=BK$

7) $\left.\begin{array}{l} AD=DE \text{ (п. 5)} \\ AK=BK \text{ (п. 6)} \end{array}\right\} \Rightarrow$ DK – ср. л. $\triangle AEB \Rightarrow$
$DK=\frac{1}{2}BE$; $DK \parallel BE$

$\angle ADK=\angle AEB=90^\circ$ (СУ, при $DK\parallel BE$, AE – сек.)

$\angle ADK=90^\circ \Rightarrow$ AK – диаметр $\omega \Rightarrow R_\omega=\frac{AK}{2}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (продолжение)

8) По Т. Пиф. $\triangle AEB$ $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}$

$BC = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{18-12} = \sqrt{6} = CE$ (п.1)

9) $CH \perp AE$ Пусть $AH = x \Rightarrow HE = 2\sqrt{3} - x$

По Т. Пиф. $\triangle ACH$ и $\triangle CHE$

$AC^2 - AH^2 = CH^2 = CE^2 - HE^2$

$2 - \cancel{x^2} = 6 - (2\sqrt{3} - x)^2 = 6 - 12 + 4\sqrt{3}x - \cancel{x^2}$

$4\sqrt{3}x = 8 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

10) $S_{ACEB} = S_{ACE} + S_{AEB} = \frac{1}{2} CH \cdot AE + \frac{1}{2} AE \cdot BE =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cancel{2}\sqrt{3} + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R_{\Omega} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $R_{\omega} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{ACEB} = 4\sqrt{2}$

Задача 6

Построим графики функций $y = 2x^2 - x - 1$;

$y = x + |2x - 1|$

1) $y = 2x^2 - x - 1$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

$y_в = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

$y = 0$: $x = 1$

$x = -\frac{1}{2}$

2) $y = x + |2x - 1|$

I $x \geq \frac{1}{2}$

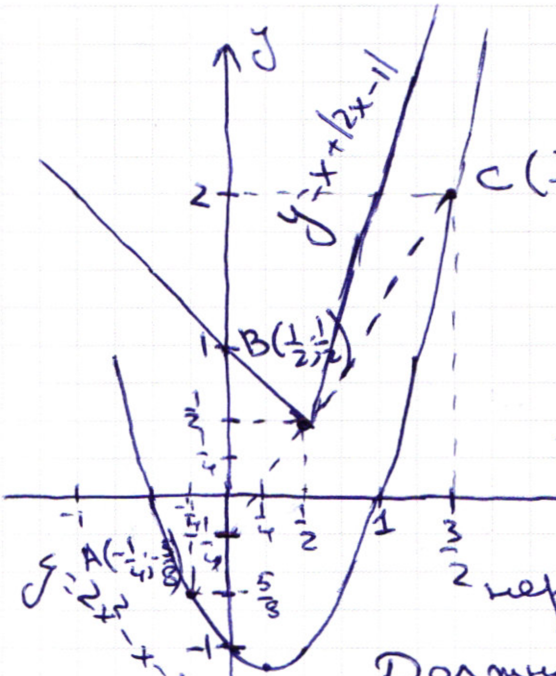
$y = 3x - 1$

x	1	2
y	2	5

II $x < \frac{1}{2}$

$y = 1 - x$

x	0	-1
y	1	2



1) Точки $A(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$, $B(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ $C(\frac{3}{2}; 2)$ лежат на одной прямой $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

(Нетрудно в этом убедиться, подставив координаты точек)

2) Прямая $y=ax+b$, для того чтобы удовлетворяла двойному неравенству при $x\in[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ должна лежать выше или пересекать параболу $y=2x^2-x-1$ а также лежать ниже графика функции $y=x+|2x-1|$ или пересекать.

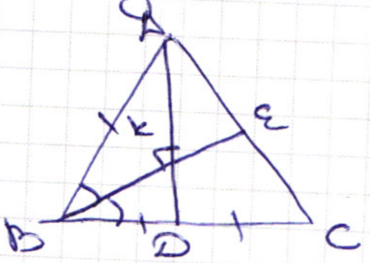
Этому условию удовлетворяет только прямая y_2: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

~~Действительно, пусть у нас найдется ещё одна такая прямая y_1. Тогда, если $y_1 \parallel y_2$, то y_1 должна лежать выше чем y_2 => будет в некоторых точках выше графика функции $f(x)$ $x+|2x-1|=y$ при $x\in[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$. Пусть $y_1 \parallel y_2$~~

Пусть у нас найдется прямая y_1, удовлетворяющая условиям. ~~Тогда y_2~~ Пусть $y_1 \parallel y_2$ => y_1 если ниже y_2, то при $x=-\frac{1}{4}$ неравенства не будет верно, а если выше, то при $x=\frac{1}{2}$ неравенство не верно.

Пусть $y_1 \nparallel y_2$. Тогда при $x=\frac{1}{2}$ ордината будет меньше или равно, чем $\frac{1}{2}$. Пусть она проходит через точку $D(\frac{1}{2}; a)$. Вращая прямую относительно точки D, получаем, что точки A и C будут по разные стороны от прямой => одна из них выше прямой, что не удовлетворяет неравенству. А если проходит либо через A, либо через C, то другая точка будет лежать выше.

Задача 2



Рассмотрим $\triangle ABC$, где BE - б-са, а AD - медиана.

$BE \perp AD$, $BE \cap AD = K$

В $\triangle BAD$ - BK - высота и медиана $\Rightarrow$

$\triangle BAD$ - р.б.$\triangle$ $\Rightarrow$ $BA = BD$ $\Rightarrow$

$BC = BD + DC = 2BD = 2BA$

Т.е., если в $\triangle$ б-са $\perp$ медиана, то одна из сторон в 2 раза больше другой.

Пусть стороны нашего $\triangle$ a, $2a$, c

$a + 2a + c = 3a + c = 1200$

По неравенству $\triangle$

$3a = a + 2a > c$

$2a + c > a \Rightarrow$ $a + c > 0$

$a + c > 2a \Rightarrow$ $c > a$

$3a + 1200 = 3a + c > 3a + a = 4a \Rightarrow$ $a < \frac{1200}{4} = 300$

$1200 = 3a + c < 3a + 3a = 6a \Rightarrow$ $a > 200$

$300 > a > 200$

Если у нас определена сторона a ~~одна из~~ сторона, то у нас определены и две другие стороны однозначно ($2a$ и $p - 3a$)

Стороны выражаются числа $\in N$

$a \in N \Rightarrow 2a \in N$

$p \in N \Rightarrow p - 3a \in N$

$300 > a > 200$, между 200 и 300 - 99 чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все таких $\triangle$ 99

Ответ: 99.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

1) Возьмем $b=1 \Rightarrow$ $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(a)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

Возьмём $a=m$ и $b=\frac{1}{m}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(m)+f(\frac{1}{m})=f(m\cdot\frac{1}{m})=f(1)=0 \Rightarrow f(m)=-f(\frac{1}{m})$

2) $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$ (п.1)

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$

$f(9)=f(3)+f(3)=1+1=2$

$f(10)=f(2)+f(5)=1+2=3$

$f(11)=5$

$f(12)=f(3)+f(4)=3$

$f(13)=6$

$f(14)=f(2)+f(7)=1+3=4$

$f(15)=f(3)+f(5)=1+2=3$

$f(16)=f(8)+f(2)=3+1=4$

$f(17)=8$

$f(18)=f(9)+f(2)=2+1=3$

$f(19)=9$

$f(20)=f(4)+f(5)=2+2=4$

$f(21)=f(3)+f(7)=1+3=4$

Переберём для x от 1 до 21
y от 1 до 21

1:	20	
2:	18	
3:	18	
4:	14	
5:	14	
6:	14	
7:	8	
8:	8	
9:	14	
10:	8	
11	3	
12:	8	
13:	2	
14:	4	
15:	8	
16:	4	
17:	1	
18:	8	
19:	0	
20:	4	
21:	4	

20
36
42

56
42
98
14
112
48
160
163
16
179
2
181
1
182

Ответ: 182 способа.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a+b\ge 0$

$1\ge a+2b\ge b$

$a+2b\ge 1$

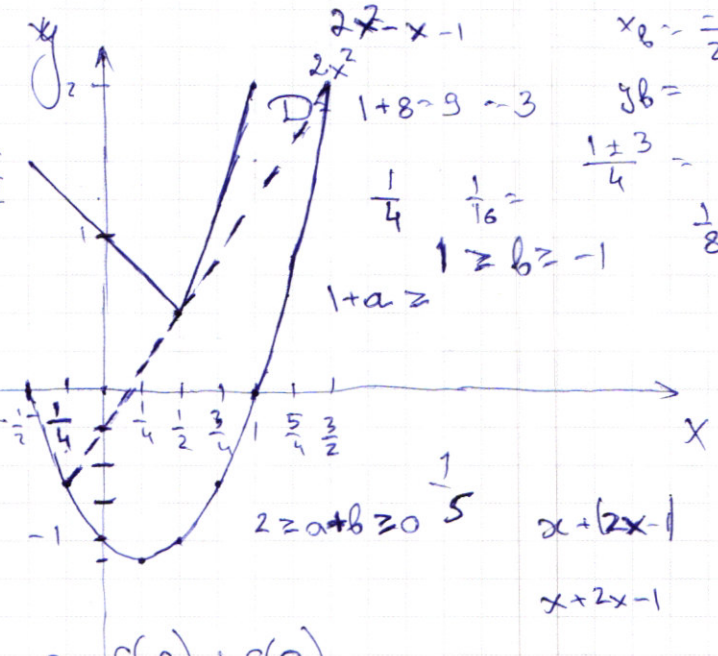
$1\ge b$

$a+4b\ge -\frac{5}{2}$

$a+2b=1$

$a\ge -b$

$b=-\frac{1}{4}$



$2x^2-x-1$

$1+8=9$ -3

$x_b=-\frac{b}{2a}=\frac{-(1)}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

$y_b=$ $\frac{1}{16}$

$\frac{1\pm 3}{4}=1;\ -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}=$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$ $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$

$1\ge b\ge -1$

$\frac{3}{8}-$ $\frac{5}{8}$ $-\frac{1}{8}-1$

$1+a\ge$

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ $=\frac{9}{8}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}$ $\frac{3}{5}$ $-\frac{5}{8}$

$2\ge a+b\ge 0$ $\frac{1}{5}$

$x+|2x-1|$

$x\ge\frac{1}{2}$

$x+2x-1$ $3x-1$ $x\le\frac{1}{2}$

$x-2x+1$ $1-x$

$x=\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}=a\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}a$ $a=\frac{3}{2}$

$f(3)+f(7)$

$\frac{1}{2}a+b\le\frac{1}{2}$

$\cancel{2a}$ $a+2b\le 1$

$f(\cancel{1})=f(3)+f(7)$

$1+3=4$

$a+2b\le 1$

$5(a+2b)\le 5$

$\frac{3}{4}$ $\frac{9}{2}-\frac{3}{2}$ $\frac{6}{2}$ $\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$ $3-1=2$

$-\frac{1}{4}a+b\ge-\frac{5}{8}$

$2a+8b\ge -5$

$f(21)=3$

$x>y$ $f(16)=f(4)+f(4)$

$f(1)=0$

$\frac{3}{2}a+b\ge 2$

$2f(4)=4f(2)=4$

$3a+2b\ge 4$

$2a+a+2b\ge 4$

$f(1)=f(5)+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$5a+10b\ge -1$ $1\ge a+2b$

$f(5)=2$ x

$5(a+2b)\ge -1$

$a+2b=-\frac{1}{5}$

$f(2)=f(4)-$

441 $x>y$

$\frac{x}{y}$

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$ $f(x)<f(y)$

$f(x)-f(y)\le 0$

Для $1\le x,y\le 21$

НОД $(x,y)=d_1$ $x=x_1d_1$ $f(x)$ $f(15)=f(3)+f(5)=1+2$

$(x_1,y_1)=1$ $y=y_1d_1$ $f(14)=f(2)+f(7)=\cancel{1+3}=4$

☑ черновик ☐ чистовик

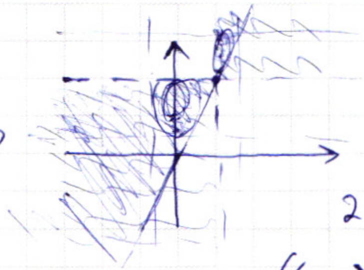
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$



$2x^2+y^2-2x-5y+3+\sqrt{xy-2x-y+2}=0$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2(x-1)^2+(y-2)^2+3=0$

$2((x-1)^2-1)+(y-2)^2-1=0$

$y-2x>0$

$y>2x$

$-\sqrt{3}\le y-2<\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}$ $\quad y<\sqrt{3}+2$

$\cancel{x-1}$

$-\sqrt{\frac{3}{2}}\le x-1\le\sqrt{\frac{3}{2}}$

$1-\sqrt{\frac{3}{2}}\le x\le 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\cancel{(x-1)^2+x-1+y-2}$

$\cancel{y^2-4xy+x^2}$

$2x-2-y+2$

$x-1$

$2\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$

$D=\cancel{\alpha^2-8\alpha^2}$

$-8\alpha^2$

$2x-2-(y-2)$

$2x-2-y+2$

$2x-2$

$2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0$

$\alpha-\beta=x-1-y+2$

$x-y+1$

$(2\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=3+3(y-2x)^2$ $\quad 3(y-2x)^2-3$

$x=\alpha+1$

$2x=2\alpha+2$

$\cancel{\alpha=x-1}$

$(2x-y)(x-y+1)=3+3(y-2x)^2$

$x-1=a$

$y-2=b$

$y=b+2$

$b-2a$

$y-2x$

$b^2-4ab+4a^2=ab$

$b^2-5ab+4a^2=0$

$2a^2+b^2=3$

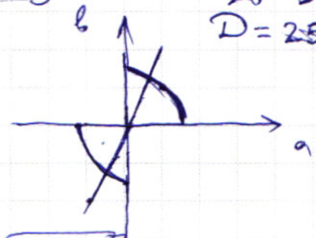
$2b^2-5ab+6a^2=3$

$D=25a^2-48a^2$

$b-2a=\sqrt{ab}$

$\cancel{2a^2+b^2=3}$

$\cancel{b=\sqrt{3-2a^2}}$



$b=\sqrt{3-2a^2}$

$\sqrt{3-2a^2}=\sqrt{a\sqrt{3-2a^2}}+2a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$ 29

$\frac{36}{25}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2y^2 + 6x^2 - 2x - 3y - 5xy + 1 = 0$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x^2 + 16 = 9x^2$

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$8x^2 = 16$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

$\frac{9\sqrt{29}}{25}$

$2y^2 - 3y - 5xy + 6x^2 - 2x + 1 = 0$

$y^2 - 3y - 2x + 1 =$

$y^2 - 5xy + 6x^2 = (y - 3x)(y - 2x)$

$\sqrt{29}$

$2\sqrt{3}$

$\frac{29}{5}$

$6 - x^2 = 2 - (x - 2$

$6 - x^2 = 2 - x^2 + 4\sqrt{3}x +$

$2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \quad \sqrt{\frac{2}{3}}$

$-2x - 3y - 5xy$

$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$

$4\sqrt{2}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{2}{5}\sqrt{29}$ $6 + 12 - 2$

$2\sqrt{3}$

$3\sqrt{2}$

$16 = 4\sqrt{3}x$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin\beta}$

$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin\beta}$

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$

$\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$\sin = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$29 + \frac{4}{25} \cdot 29$

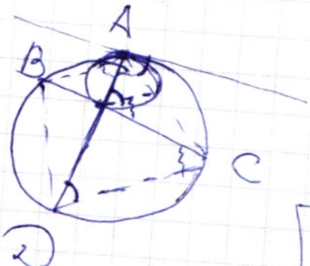
18

$\frac{16}{3}$

$29 - 3 = 26$

$\frac{\sqrt{6}}{9}$

$\frac{29 \cdot 25 + 4 \cdot 29}{25} = \frac{29^2}{25}$



$12 + 18$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

30

$\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$f(3) \cdot f(7) = f(3) + f(7)$

$f(3) \cdot f(7) = 4$

$f(21) = 4$

$\sqrt{6}$

$2 - \frac{4}{3}$

$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{5}}{\frac{29}{5}} = \frac{3}{5}$

$\frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$

$x^2 + 16 = 9x^2$

$16 = 8x^2$

$\frac{1}{2} = x^2$

~~$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$~~

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

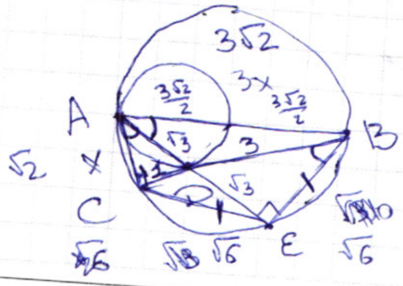
$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25}$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{3}{5} - \frac{9}{50} = \frac{30 - 9}{50} = \frac{21}{50} = 0{,}42$

$\frac{9}{50}$



$9 = x(x + \alpha)$

$p^2 - r^2$

$\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$

$9 = 3\sqrt{2} \cdot x$

$3 = x\sqrt{2}$

$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

6

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте гало… Страница №

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b=aq \quad c=aq^2 \quad x=aq^3 \quad q=aq^3$

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2qax+aq^2=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$(x-q)^2=0 \quad x=q$

$q(aq^2-1)=0$

$q=0 \quad aq^2=1$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$x(y-2)-(y-2)$

$(y-2)(x-1)$

$y-2x$

$\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases}$

$2(x^2-2x+1)+(y-2)^2=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$y>2x \quad y-2x>0$

$x-1=a \quad x=a+1 \quad 2x=2a-2$

$y-2=b \quad y=b+2$

$\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b+2-2a+2=\sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b-2a+4=\sqrt{ab} \end{cases}$

$a<300$

$a>200$

$a\in(200;300)$

$ab=b^2+4a^2+16-4ab+8b-16a$

$b^2+4a^2-5ab+8b-16a+16=0$

$2a^2+b^2=3$

33

$2a^2-5ab+8b-16a+19=0$

$b(8-5a)$

$2a^2-16a+19=0$

64-

38

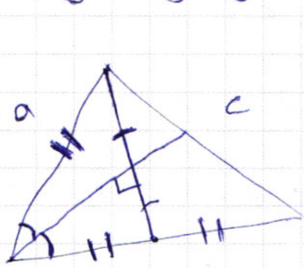
26

$3a+c=1200$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

$y^2-4xy+4x^2=(y-2)(x-1)$

$a+b+c=1200$



$b=2a$

$3a>c$

$a+c>0$

$c>a$

$a+b>c$

$b+c>a$

$c+a>b$

$f(3)=1$

$f(2)=1$

$f(5)=2$

$f(4)$

$4a<1200<6a$

$f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(3\cdot 1)=f(3)+f(1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)