МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

~~Пусть a, b, q - a, b, c, d члены~~

1) $a \neq 0$:

Пусть a, b, c, d - первые 4 члена геометрической прогрессии. Тогда:

$$a = a_0$$
$$b = q \cdot a_0 = q \cdot a$$
$$c = q^2 \cdot a_0 = q^2 a$$
$$d = q^3 a_0 = q^3 a$$

При этом d - решение уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ так как уравнение $ax^2 - 2bx + c = 0$ имеет решения, оно представимо в виде $a(x - x_1)(x - d) = 0$, где x_1 может быть равно d, (~~если $a \neq 0$~~)

тогда:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -a(x_1 + d) = -2b \quad (2) \\ ac = x_1 d \cdot a \quad (3) \\ D = 4b^2 - 4ac \geq 0 \quad (1) \end{cases} \\ a = 0 \end{array}\right.$$

(1) $D = 4b^2 - 4ac = 4 \cdot (qa)^2 - 4(a \cdot q^2 a) = 0$

тогда $d = x_1$, ~~если $a \neq 0$~~

~~(2) $ac = x_1 d = d^2$~~

~~$a^2 q^2 = d^2 = (q^3 a)^2 = a^2 \cdot q^6$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

② $a(2d) = 2b$

$ad = b$

$q^3a^2 = qa$

$q^2a(aq) = aq$

$aq(q^2a - 1) = 0$

③ $c = d^2a$

$q^2a = q^6a^3$

$q^2a = (q^2a)^3$

Из утверждений 2 и 3 получаем: $\left[\begin{array}{l} q^2a = 0 \\ q^2a = 1 \end{array}\right.$

~~1) Если $a=0$~~

~~$q^2a = 0$~~

~~Заметим, что случай $\begin{cases} a \neq 0 \\ q = 0 \end{cases}$ невозможен, так как уравнение ax^2~~

2) Если $a = 0$

$q^2a = 0$

Проверка: 1) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$:

0 является корнем уравнения $0 = 0$

2) $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$

1 является корнем уравнения $x^2 - 2x + 1 = 0$

Ответ: 0; 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

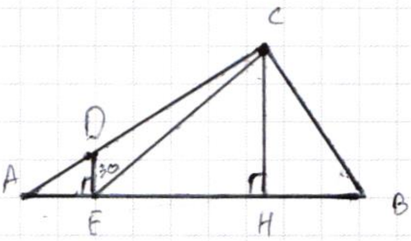
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^0$

$AD:DC = 1:3$, $D \in AC$

$E \in AB$; $ED \perp AD$

Найти: $tg \angle BAC = ?$

Решение

1) Проведём $CH \perp AB$

введём $AD = a$

$BC = b$

тогда $CD = 3AD = 3a$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(4a)^2 + b^2} = \sqrt{16a^2 + b^2}$

2) $\angle ACH + \angle HCB = 90^0$ по условию

$\angle ACH + \angle CAH = 90^0$ по сумме углов $\triangle CAH$

$\angle HCB = \angle CAH$

3) $\triangle HCB$ и $\triangle ACH$

1) $\angle CHB = \angle ACB = 90^0$

2) $\angle HCB = \angle CAB$ по пункту 2

$\triangle HCB \sim \triangle ACH$ по 2м углам

4) из $\triangle HCB \sim \triangle ACH$ следует:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{BH}{BC}$$

$$BH = \frac{BC^2}{AB} = \frac{b^2}{\sqrt{16a^2+b^2}}$$

Аналогично $AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{16a^2}{\sqrt{16a^2+b^2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

5) $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{EH}$, т.к. $DE \parallel CH$ (теорема о пропорциональных отрезках)

$\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{3}$

$EH = 3AE = \frac{3}{4}AH = \frac{3}{4} \cdot \frac{16a^2}{\sqrt{16a^2+b^2}} = \frac{12a^2}{\sqrt{16a^2+b^2}}$

6) $\angle DEC = \angle ECH = 30^\circ$ как накрест лежащие при $DE \parallel CH$ и секущей CE

7) $\triangle CEH$

$CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \frac{4ab}{\sqrt{16a^2+b^2}}$ по свойству высоты в прямоугольного треугольника

$\angle CEH = 30^\circ \Rightarrow \frac{CH}{HE} = \cancel{ct}tg \angle 30^\circ = \sqrt{3}$

$\frac{4ab}{12a^2} = \sqrt{3}$

$\frac{b}{3a} = \sqrt{3}$

$b = \sqrt{3} \cdot 3a$

8) $tg \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{4a} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3a}{4a} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

~~9) Если $AC = \sqrt{7}$~~

~~$BC = AC \cdot tg \angle CAB = \frac{3\sqrt{21}}{4}$~~

~~$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{8}$~~

~~Ответ: а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, б) $\frac{21\sqrt{3}}{8}$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

10) Пусть $AC = 4a = \sqrt{7}$

тогда $BC = AC \cdot tg \angle CAB = \frac{3\sqrt{3}}{4} = b$

11) $\triangle ADE \sim \triangle ACH$:

1) $\angle DEA = \angle CHA = 90^\circ$

2) $\angle A$ - общий

тогда $\frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{4} = \frac{AE}{AH}$

$DE = \frac{1}{4} CH \qquad AE = \frac{1}{4} AH$

12) $S_{DEC} = S_{CHA} - S_{ADE} - S_{CHE} = \frac{1}{2}\left(\frac{4ab \cdot 16a^2}{16a^2+b^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{4ab \cdot 16a^2}{16a^2+b^2} - \frac{4ab \cdot \frac{3}{4} \cdot 16a^2}{16a^2+b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{12a^2 \cdot ab}{16a^2+b^2}\right) = \frac{6a^3b}{16a^2+b^2} =$

$= \frac{6\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{4}\right)}{16 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}\sqrt{7}}{4}\right)^2} \quad \frac{6 \cdot \frac{7\sqrt{7}}{16} \cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{16 \cdot 7 + \cancel{16} \cdot 27 \cdot 7} =$

$= \frac{\frac{6 \cdot 7^2}{16} \cdot 3\sqrt{3}}{16 + 27} = \frac{42 \cdot 3\sqrt{3}}{16(43)} = \frac{21 \cdot 3\sqrt{3}}{8 \cdot 43} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

б) $\frac{63\sqrt{3}}{344}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

1) $x-6y=(x-6)-6(y-1)$

2) $xy-6y-x+6=x(y-1)-6(y-1)=(x-6)(y-1)$

3) $x^2+2y^2-12x-4y+20=(x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)-18$

Тогда исходная система:

$$\begin{cases}(x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}\\(x-6)^2+2(y-1)^2=18\end{cases}$$

Заменим $(x-6)=a$

$(y-1)=b$

$$\begin{cases}a-6b=\sqrt{ab}\\a^2+2b^2=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-12ab+36b^2=ab\\a>6b\\a^2+2b^2=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}18+34b^2=13ab\\a>6b\\a^2+2b^2=18\end{cases}$$ ①

① $\cancel{a^2+2b^2=18}$

$a=\cancel{\frac{\pm\sqrt{2b^2+48}-2b}{1}}$

$$\begin{cases}a=\dfrac{34b+\frac{18}{b}}{13}\\a>6b\\a^2+2b^2=18\end{cases}$$ ($b=0$ - не решение)

$(34)^2b^2+\frac{(18)^2}{b^2}+26b^2=18\cdot13^2$

$4\cdot17^2b^2+\frac{4\cdot9^2}{b^2}+13^2\cdot2b^2=9\cdot2\cdot13^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1156 b^2 + \frac{324}{b^2} + 338 b^2 = 3042$$

$$\cancel{1156}\ 1494 b^4 - 3042 b^2 + 324 = 0$$

$$747 b^4 - 9\cdot 13^2 b^2 + 162 = 0$$

$$83 b^4 - 169 b^2 + \overset{18}{\cancel{54}} = 0$$

$$b^2 = \frac{\pm\sqrt{169^2 - 4\cdot 83\cdot 18} + 169}{166}$$

н3

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$a = 0$ – не решение

$$6\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 = 0$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\pm\sqrt{25} - 1}{12}$$

т.к. $\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 0$, $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{9}$$

тогда $a^2 + 2b^2 = 81b^2 + 2b^2 = 18$

$$b^2 = \frac{18}{83}$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$a = \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}$$

тогда $x = 6 \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$y = 1 \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$. *

~~* решение $6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}}$; $1 - \sqrt{\frac{18}{83}}$ не подходит. $-9\sqrt{\frac{18}{83}} - 6\sqrt{\frac{18}{83}} - \sqrt{ab} < 0$~~

* решение $\left(6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}}; 1 - \sqrt{\frac{18}{83}}\right)$ противоречит уравнению:

$$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$-9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6\sqrt{\frac{18}{83}} = -3\sqrt{\frac{18}{83}} < 0$$

противоречие

Ответ: $\left(6 + 9\sqrt{\frac{18}{83}}; 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}\right)$; ~~$\left(6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}}; 1 - \sqrt{\frac{18}{83}}\right)$~~

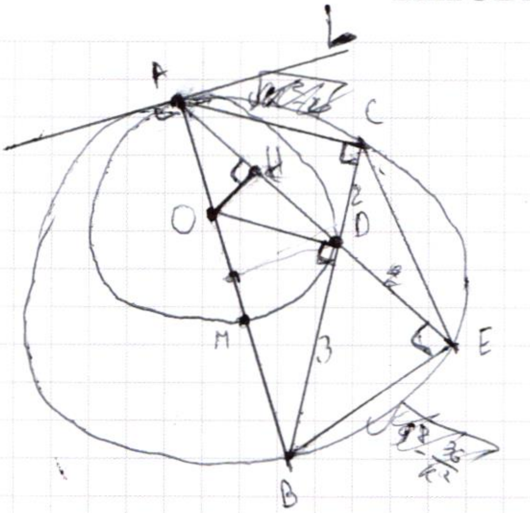
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

Дано: Ω, ω

$\Omega \cap \omega = A$

BA – диаметр Ω

BC – хорда Ω

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = \{A; E\}$

$CD = 2$; $BD = 3$; O – центр ω

Найти: S_{ACEB}

Решение

1) $BD^2 = BM \cdot BA$, т.к. BD – касательная, BA – секущая,

пусть r – радиус ω

R – радиус Ω

$BD^2 = BM \cdot (BM + 2r)^* = 9$ (1)

* заметим, что AM – диаметр, так как AB – диаметр Ω

$BA \perp AL \Rightarrow BM \perp AL$ (т.к.)

(AL – касательная) $\Rightarrow$ BM – диаметр

2) $\triangle ACB \sim \triangle OPB$

1) $\angle ODB = 90°$ (угол между радиусом и касательной)

$\angle ACB = 90°$ как вписанный в Ω опирающийся на диаметр AB

2) $\angle B$ – общий

$\triangle ACB \sim \triangle OBD$ по 2м углам

тогда $\frac{AO}{OB} = \frac{CD}{DB}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

2) $\frac{r}{r+HB} = \frac{2}{3}$

$2HB = r$

$BM = \frac{r}{2}$

подставим в выражение (1):

$\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} + 2r\right) = 9$

$\frac{r}{2} \cdot \frac{5r}{2} = 9$

$\frac{5}{4} r^2 = 9$

$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$BM = \frac{r}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

3) $BM \cdot (BA) = 9$ (1)

$2R \cdot BM = 9$

$2R \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 9$

$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) Опустим из O $OH \perp AD$. так как $A, D \in \omega$, O равноудалена от A и D, т.е. $AH = HD$ (OH - ср. пер. к AD)

5) ~~так как $\angle AHO = \angle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow$~~

$\angle AHO = 90^\circ$ по построению

$\angle AEB = 90^\circ$ как вписаный в Ω опирающийся на AB.

тогда $\begin{cases} OH \perp AE \\ BE \perp AE \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

6) Из теоремы о пропорциональных отрезках ($OH \parallel BE$):

$$\frac{AO}{OB} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{AD}{2}+DE}$$

$$\frac{r}{r+\frac{r}{2}} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{AD}{2}+DE}$$

7) из теоремы о степени точки D относительно Ω:

$$AD \cdot DE = CD \cdot BD = 6$$

8) $$\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{AD}{AD+2DE} \\ AD \cdot DE = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4DE = AD \\ AD \cdot DE = 6 \end{cases}$$

$DE = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$AD = 2\sqrt{6}$

9) $S_{ACEB} = S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BDE} + S_{CDE} = \frac{1}{2}(AC \cdot BD + AC \cdot CD + DE \cdot BE + S_{CDE})$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

10) $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4 \cdot 6 - 4} = 2\sqrt{5}$

$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$

11) $$\frac{S_{DCE}}{S_{ABD}} = \frac{\sin\angle CDE}{\sin\angle ADB} \cdot \frac{CD \cdot DE}{AD \cdot BD} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

12) $S_{ABD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \cdot 3 = 3\sqrt{5}$

$S_{DCE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

13) $S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = 2\sqrt{5}$

$S_{BDE} = \frac{1}{2} BE \cdot DE = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$

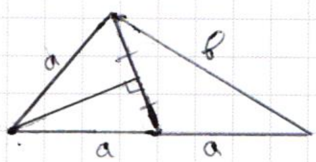
$S_{ACEB} = 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + \frac{5}{4}\sqrt{5} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: а) $\frac{6}{\sqrt{5}}$; $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

б) $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

№2



Заметим, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы в треугольнике медиана была перпендикулярна биссектрисе другого угла ~~другого~~ треугольника — одна из сторон треугольника больше другой в 2 раза*

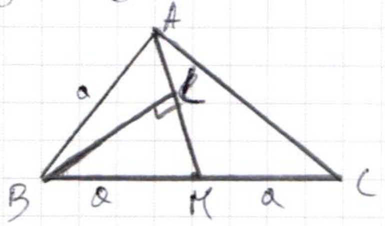
*так как ~~высота~~ биссектриса не может быть ⊥ медиане, опущенной из того же угла, в противном случае в треугольнике один из углов $> 180^0$

~~Тогда~~ Доказательство:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Если условие выполнено*, проведём к стороне в 2a медиану AM:



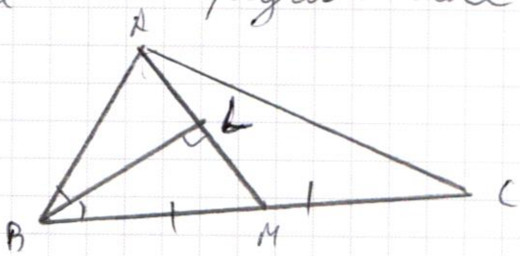
но так как условие выполнено, найдётся сторона, равная a (Н.У.О. BA = a)

тогда BL — биссектриса в равнобедренном $\triangle ABM$ $(AB = BM = a)$

тогда $BL \perp AM$, ч.т.д.

* условие — если в треугольнике найдутся стороны a и $2a$, где $a \in \mathbb{N}$ — любое число

Если в треугольнике биссектриса $BL \perp AM$:



BL — биссектриса и высота в $\triangle ALM$. Тогда $AB = BM$

Но $BM = \frac{1}{2} BC$

тогда $BC = 2AB$, т.е. условие* выполнено.

Найдём всевозможные тройки натуральных чисел $(a; 2a; 900-3a)$ такие, что:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 2a < a + 900 - 3a \\ a < 2a + 900 - 3a \\ 900 - 3a < 2a + a \end{cases}$$ – тогда искомый треугольник существует

$$\begin{cases} 4a < 900 \\ 2a < 900 \\ 900 < 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 225 \\ a > 150 \end{cases}$$

тогда таких троек $(a; 2a; 900-3a)$ ровно 74

Ответ: 74

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

1) $f(a\cdot 1) = f(a) + f(1) = f(a)$

$f(1) = 0$

2) $f(1) = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(1) = 0$ по ①, откуда $f(a) = -f(\frac{1}{a})$

3) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

тогда ~~из~~ в ~~паре~~ паре $\{f(\frac{x}{y}); f(\frac{y}{x})\}$:

или оба числа равные 0 или одно из чисел >0, а второе меньше, причём оба числа равные 0 $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(y)$

~~Выпи~~

Выпишем значения $f(i)$ для $2 \le i \le 22$:

$f(2) = [2/2] = 1$
$f(3) = [3/2] = 1$
$f(4) = 2f(2) = 2$
$f(5) = [5/2] = 2$
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$
$f(7) = [7/2] = 3$
$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$
$f(10) = f(5) + f(2) = 3$
$f(11) = [11/2] = 5$
$f(12) = f(6) + f(2) = 3$
$f(13) = [13/2] = 6$
$f(14) = f(7) + f(2) = 4$
$f(15) = f(5) + f(3) = 3$

$f(16) = 2f(4) = 4$
$f(17) = [17/2] = 8$
$f(18) = f(9) + f(2) = 3$
$f(19) = [19/2] = 9$
$f(20) = f(10) + f(2) = 4$
$f(21) = f(7) + f(3) = 4$
$f(22) = f(11) + f(2) = 6$

~~f(1) = 1 ; 2 ...~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

тогда пусть x_a — количество чисел i, для которых $f(i) = a$ $(i \in \mathbb{N};\ 2 \le i \le 22)$

тогда
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 1 \\ x_6 = 2 \\ x_7 = 0 \\ x_8 = 1 \\ x_9 = 1 \end{cases}$$

тогда Вычислим количество упорядоченных пар $(x;y)$, и вычтем из него количество упорядоченных пар $(x;y)$ таких, что $f(x) = f(y)$, где $\{x \neq y\}$

получим: $A_{21}^2 - A_{x_1}^2 - A_{x_2}^2 - \dots - A_{x_9}^2 = 21\cdot 20 - 2\cdot 1 - 4\cdot 3 - 6\cdot 5 - 4\cdot 3 - 2\cdot 1 =$
$= 2(210 - 1 - 6 - 15 - 6 - 1) = 2(181)$

из оставшихся чисел $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ровно половина < 0, а вторая - больше 0, (по пункту 3)

Ответ: 181

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f(x/y) < 0$; $\begin{cases} 2 \le x \le 22 \\ 2 \le y \le 22 \end{cases}$

$f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{a^2}) + f(a)$

$f(\frac{1}{a^2}) = 2f(\frac{1}{a})$

$-f(\frac{1}{a}) = f(a)$

$\boxed{f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)}$

$x \ne y$

$(\frac{x}{y}; \frac{y}{x})$

$f(\frac{x}{y}) = -f(\frac{y}{x})$

$f(a) = f(a) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = 3$

$f(13) =$

$f(2) = 1$ $f(9) = 2$ $f(16) = 4$

$f(3) = 1$ $f(10) = 3$ $f(17) = 8$

$f(4) = 2$ $f(11) = 5$ $f(18) = 3$

$f(5) = 2$ $f(12) = 3$ $f(19) = 9$

$f(6) = 2$ $f(13) = 6$ $f(20) = 4$

$f(7) = 3$ $f(14) = 4$ $f(21) = 4$

$f(8) = 3$ $f(15) = 3$ $f(22) = 6$

f(2) f(3)	f(4) f(5) f(6) f(9)	f(7) f(8) f(10) f(15) f(18) f(12)	f(14) f(16) f(20) f(21)	f(11)	f(13) f(22)	f(17)	f(19)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

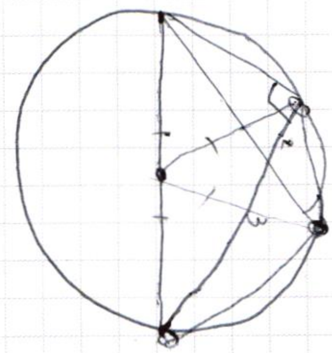
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2; 4; 6; 4; 1; 2; 1; 1$

$(\quad \underline{21\cdot 20 - 2\cdot 1 - 4\cdot 3}$

$$\frac{\frac{21\cdot 20}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} - \frac{4\cdot 3}{2} - \frac{6\cdot 5}{2} - \frac{4\cdot 3}{2} - \frac{2\cdot 1}{2}}{2}$$



$$\frac{210 - 1 - 6 - 15 - 6 - 1}{2}$$

$$\frac{\frac{21\cdot 20}{2} - 2 - 12 - 30 - 12 - 2}{2} = \frac{210 - 4 - 24 - 30}{2} =$$

$$= 105 - 15 - 2 - 12 = 90 - 14 = 76$$

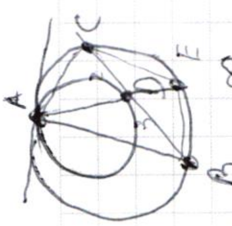
$CA\cdot BD = AD\cdot BE$

$AC\cdot CD$

$-\frac{1}{2} =$

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

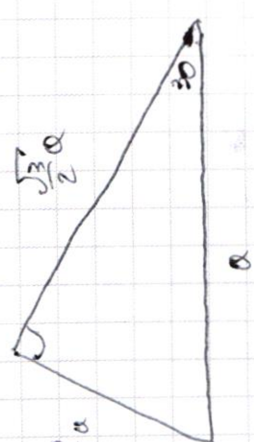
1) $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$



$8x - 6(1-2x) \le ax+b \le 8x^2+6x+7$ $\quad x=0$

$20x - 6 \le ax+b \le 8x^2+6x+7 =$ $\quad x = -\frac{3}{4}$

$x = -\frac{3}{8}$ – верш



$\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH} = \frac{BC}{AC}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{BH}{BC}$

$8x^2+6x = x(8x+6) = x(4x+3)$

$\frac{2}{k} = \frac{6}{3k}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = a$

$b = qa$

$c = q^2 a$

$d = q^3 a$

$+\frac{3}{8} - \frac{18}{8} + 7 \quad x=0$

$\frac{91}{8}$

$-2+3+7 = 8$

$\boxed{x = -\frac{3}{8}}$

$ax^2 - 2bx + c = a(x - q^3 a)(x - x_1)$

$-(q^3 a + x_1)\cdot a = -2b = -2qa$

$q^3 a^2 x_1 = c = q^2 a$

1) $q \neq 0;\ a \neq 0$

$qax_1 = 1$

$x_1 = \frac{1}{qa}$

$-\left(q^3 a + \frac{1}{qa}\right)a = -2qa$

$\cancel{q^4 a^2 + 1 = 2qa^2}$

$q^3 a + \frac{1}{qa} = +2q$

$q^4 a^2 + 1 = 2q^2 a$

$(q^2 a - 1)^2 = 0$

$q^2 a - 1 = 0$

$\boxed{q^2 a = 1} = c$

2° Если $q = 0 \ // \ a = 0$: $q^2 a = 0 = c$

$-8+6+7 = 5$

$2R(2R - 2r) = 9$

$9 = BO^2 - R^2$

$BO + r = 2R$

$BM + 2R = 9$

$BM + 2r = 2R$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6) - 6(y-1) =$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 =$

$8x - 12x + 6$

$-4x + 6$

$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$

□ черновик □ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$(x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)-18=0$$

$$\begin{cases} (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \\ (x-6y)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \end{cases}$$

$$\cancel{((x-6)+(y-1))^2+}$$

$$\cancel{(x-6)(y-1)\geq 0}$$

$$x-6y\geq 0$$

$$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

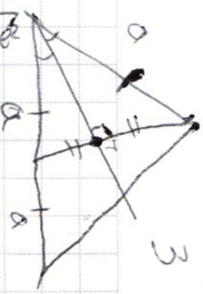
$$(x+y-7)^2$$

< 5

$$\frac{16a^2}{\sqrt{16a^2+b^2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4ab}{\sqrt{16a^2+b^2}}$$

$$\frac{4a\cdot 3}{4}=\sqrt{3}\,b$$

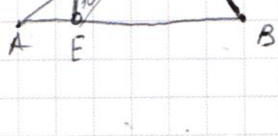
$$3a=\sqrt{3}\,b$$

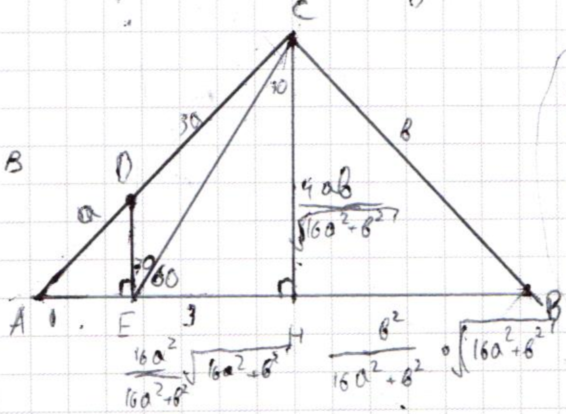


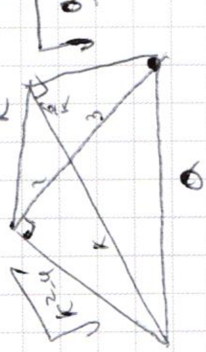
a)

tg $BAC=?$

$$\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{DE}{AE}=\frac{CH}{AH}=\frac{BC}{AC}$$







$$\frac{4a}{4a}=\frac{\sqrt{3}a}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)