МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$\cancel{y^2}-5xy+4x^2+\cancel{4}\;2x+y-2=0$

$2x^2+\cancel{y^2}-4x-4y+3=0$

y

$y>2x$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$ теперь $y>2$

~~Если $y=$ $(y-2)$~~

функция $x\geq 1$ тогда

$y\geq$

$y=kx$

$y-$

$(x-1)^2\geq 1$, то есть $x\in(2,+\infty)\cup(-\infty;0)$

1) $x\in(2;+\infty)$, то

$(y-2)^2\geq 4$

Если $x\in(-\infty,0)$, то

$(y-2)^2\geq 4$

Значит $(x-1)^2\leq 1$, а $(y-2)^2\geq$

$x\in[0;2]$ $y\geq 2x$

$\cancel{A}$ $\cancel{y}\,2(x-1)^2\leq 2$

$(y-2)^2\geq 1$

$y\geq 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $b = aq$; $c = aq^2$

$ax^2 + bx + c = 0$

$D = \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = aq^3 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = aq^3 \end{array}\right.$$

1) $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = aq^3$

$-b + \sqrt{b^2 - 4ac} = 2a^2q^3$

$2a^2q^3 + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$

$4a^4q^6 + b^2 + 4a^2q^3b = b^2 - 4ac$

$a^4q^6 + a^2q^3b + ac = 0$

$a^3q^6 + aq^3b + c = 0$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{b^2 - ac}\right)^2$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-2b + 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = -\dfrac{b}{a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ x_2 = \dfrac{-2b - 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{array}\right.$$

1) $x = -\dfrac{b}{a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = aq^3$

$aq^3 = -q + \sqrt{\dfrac{a^2q^2 - a^2q^2}{a}} = -q$

$aq^3 = -q$

$c = aq^2 = -1$

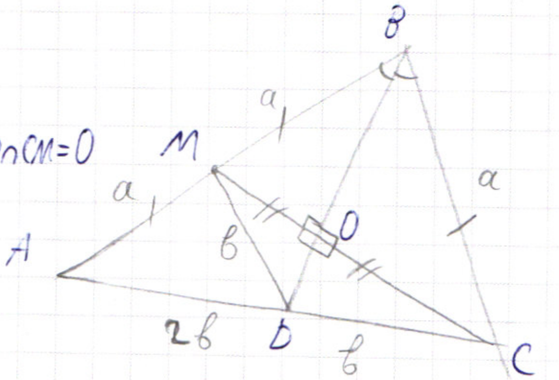
2) $x = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \cancel{aq} - q - 0$

$c = aq^2 = -1$

Ответ: $c = -1$

2. 1) BD – биссектриса $\triangle ABC$;

CM – медиана $\triangle ABC$; $BD \perp CM$; $BD \cap CM = O$



2) В $\triangle BMO$ и $\triangle CBO$: $\angle MBO = \angle CBO$, $\angle BOM = \angle BOC = 90°$, BO – общая сторона, значит по УСУ $\triangle BOM = \triangle BOC \Rightarrow$

$MB = CB = MA = a$; $MO = CO$; $b = CD = \dfrac{AD}{2}$ по теореме о биссектрисах.

3) В $\triangle DOM$ и $\triangle DOC$: DO – общая сторона, $MO = CO$, $\angle MOD = \angle COD = 90°$, значит по СУС $\triangle MOD = \triangle COD \Rightarrow CD = MD = b$

4) По теореме косинусов в $\triangle AMD$:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

$AM^2 = MD^2 + AD^2 - 2MD\cdot AD\cdot\cos\angle MDA \Leftrightarrow a^2 = 5b^2 - 4b^2\cos\alpha \Leftrightarrow$

$a = b\sqrt{5-4\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{3}\sqrt{5-4\cos\alpha} = BC$

$AC = 1200 - BC - AD = 1200 - 3a$

$(400-a)\sqrt{5-4\cos\alpha} = a$

$\sqrt{5-4\cos\alpha} = \frac{a}{400-a}$

$\sqrt{5-4\cos\alpha} \in (1;3) \Rightarrow 3 > \frac{a}{400-a} > 1$, т.к. $\cos\alpha \in (-1;1)$

$\begin{cases} \frac{a}{400-a} > 1 \\ \frac{a}{400-a} < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 400-a \\ a < 1200-3a \end{cases} \quad \begin{cases} a > 200 \\ a < 300 \end{cases}$

$a \in (200;300)$; Всего 99 вариантов выбрать a.

Ответ: 99

№3. $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-4xy+4x^2 = xy-2x-y+2 \\ (x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+x^2-8+3=0 \end{cases}$

$y-2x>0 \Leftrightarrow y>2x$

$\begin{cases} \\ (x-2)^2+(y-2)^2 = 5-x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2(x^2-2x+1)-2+(y^2-4y+4)-4+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2 = xy-2x-y+2 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

1) $xy-2x-y+2 = x(y-2)-(y-2) = (x-1)(y-2) \Rightarrow$ либо $(x\geq 1; y\geq 2)$, либо $(x\leq 1; y\leq 2)$

2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \Leftrightarrow 2(x^2-2x+1)-2+(y^2-4y+4)-4+3=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

3) ~~Пк~~ $y-2x = (y-2)-2(x-1)$

4) Пусть $y-2=b$; $x-1=a$. Тогда:

$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ b^2+2a^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \quad (1) \\ b^2+2a^2=3 \quad (2) \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1): $b^2-5ab+4a^2=0$

$D=25a^2-16a^2=(3a)^2$

$b_1=\frac{5a-3a}{2}=a$ ~~$\Leftrightarrow x-1=y-2 \Rightarrow x=0$~~

$b_2=\frac{5a+3a}{2}=4a$ ~~$\Leftrightarrow \; ; \; (b-2a)-2a$~~

(2): а) $b=a$

$b^2+2a^2=3a^2=3 \Rightarrow$ ~~$x=1; y=$~~ $a^2=(x-1)^2=1$

$\left[\begin{array}{l} x=2; y=3 \leftarrow \text{случай, где } a=1 \\ x=0; y=1 \leftarrow \text{случай, где } a=-1 \end{array}\right.$ Проверка устно

б) $b=4a$

$b^2+2a^2=18a^2=3 \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{6}$

$\left[\begin{array}{l} x-1=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ x-1=\frac{-\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1+\frac{\sqrt{6}}{6} \leftarrow \text{случай, когда } a=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ x=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \leftarrow \text{случай, когда } a=-\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=1+\frac{\sqrt{6}}{6}; y=\cancel{2+\frac{2}{3}\sqrt{6}} \; 2+\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ x=1-\frac{\sqrt{6}}{6}; y=\cancel{2-\frac{2}{3}\sqrt{6}} \; 2-\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{array}\right.$ Проверка устно.

Ответ: $(2;3)$; $(0;1)$, $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$; $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{6}; 2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$

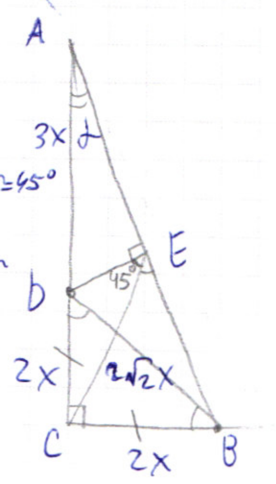
4. а) 1) Пусть $AD=3x$, тогда $CD=5x-3x=2x$

2) Четырёхугольник $CDEB$ вписанный, так как $\angle DCB+\angle DEB=180°$, значит $\angle DEC=\angle DBC=45°$

3) $\angle BDC=180°-90°-45°=45°$ (в $\triangle DCB$), значит $\triangle DCB$ - р/б ($CD=CB=2x$)

4) $tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$



б) 1) ~~sin~~ Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{5}\cos\alpha =$
$= \sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow$ ~~$\frac{29}{25}\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha =$~~ $\frac{29}{25}\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$; $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

2) $DE = \sin\alpha \cdot AD = \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

~~3) По теореме синусов в $\triangle CDE$:~~

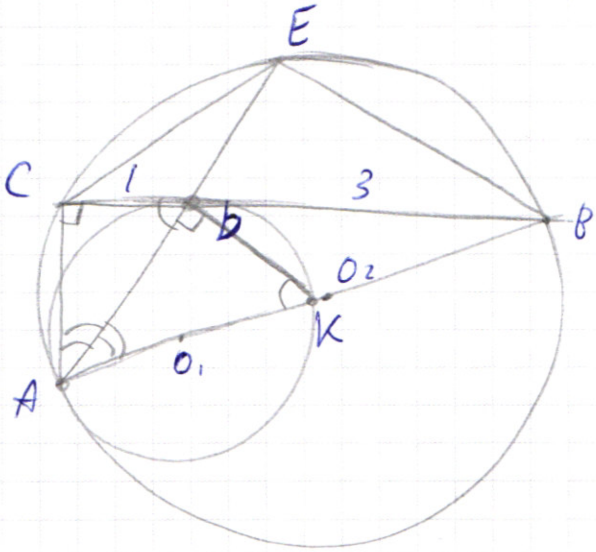
3) $\angle EDC = 180° - (90° - \alpha)$ ~~$-45° = 45° + \alpha$~~ $90° + \alpha$

$\sin\angle EDC = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

4) $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}\sin\angle EDC \cdot CD \cdot ED = \frac{1}{2}\frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: 1,2

5. 1) Раз окружности Ω и ω касаются в A, то A, O_1, O_2 лежат на одной прямой (O_1, O_2 – центры ω и Ω соответственно)



2) Пусть $AB \cap \omega = K$;
$AK = 2r$; $AB = 2R$;
r – радиус ω; R – радиус Ω

3) BC – касательная к $\omega \Rightarrow \angle CDA = \angle DKA$; $\angle ACB$ опирается на диаметр AB окр. $\Omega \Rightarrow \angle ACB = 90°$; $\angle KDA$ опирается на диаметр AK окр. $\omega \Rightarrow \angle KDA = 90°$

4) $\angle CAD = 180° - 90° - \angle CDA$ (в $\triangle CAD$); $\angle DAK = 180° - 90° - \angle DKA$ (в $\triangle DAK$), значит $\angle CAD = \angle KAD$ и AD – биссектриса $\angle CAB$.

5) По теореме о биссектрисах в $\triangle ACB$: $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{3} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = 3AC$

6) По теореме Пифагора в $\triangle ACB$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 + 16 = 9AC^2$
$\Rightarrow AC = \sqrt{2}$; $AB = 3\sqrt{2} = 2R \Rightarrow \boxed{R = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

7) По теореме Пифагора в $\triangle CDA$: $AD = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

8) в $\triangle ADK$: $AK = \frac{AD}{\sin\angle DKC} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\angle ADC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2r \Rightarrow \boxed{r = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) По свойству пересекающихся хорд в окружности, то в Ω:

$AD \cdot DE = CD \cdot BD \Leftrightarrow 1 \cdot 3 = \sqrt{3} \cdot DE \Rightarrow DE = \sqrt{3} \Rightarrow AE = 2\sqrt{3}$

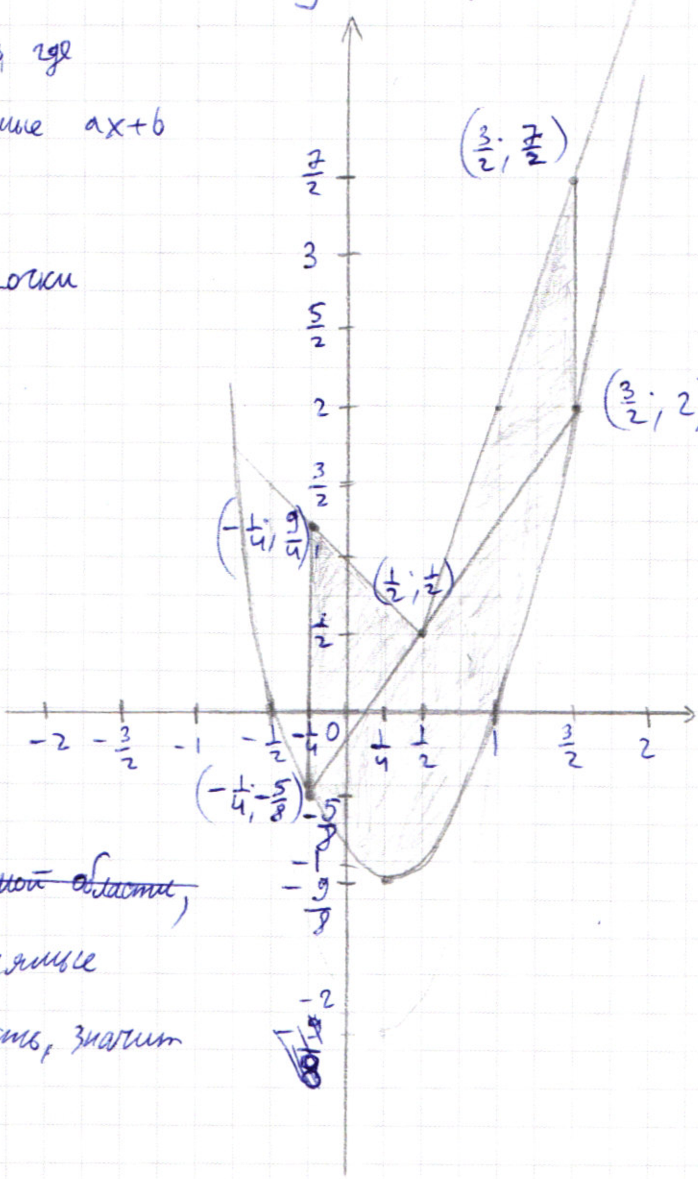
10) $S_{BACE} = \sin\angle CDA \cdot AE \cdot CB = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$

Ответ: $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{BACE} = 8\sqrt{2}$

6. $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

Построим графики $f(x) = 2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ и $g(x) = x + |2x-1|$

Закрашенная область – та область где ~~могут~~ должны находиться все прямые $ax+b$



Рассмотрим крайний случай:

Прямая $ax+b$ проходит через точки $(\frac{3}{2}; 2)$ и $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$. Тогда:

$\begin{cases} a \cdot \frac{3}{2} + b = 2 \\ a \cdot (-\frac{1}{4}) + b = -\frac{5}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$

В этом случае при $x = \frac{1}{2}$:

$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, т.е.

~~прямая, имеющая $a > \frac{3}{2}$ и~~
~~имеющая $y(-\frac{1}{4}) \ge -\frac{5}{8}$ будет~~
~~иметь часть, выходящую из допустимой области,~~
~~и прямая, где~~ все другие прямые
не попадут в допустимую область, значит
$a = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{1}{4}$

Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$

7. $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=0$

1) $f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f(7)=3$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

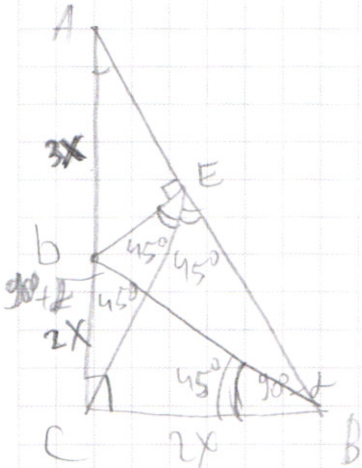
2) Пусть S – составное число, тогда $f(S)=f(p_1)+f(p_2)+\dots+f(p_n)$, где p_i – простой множитель S. Например, для числа 9: $f(12)=f(4)+f(3)=f(2)+f(2)+f(3)=3$; $f(S)\geq 0$ всегда.

3) $f\left(\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a^2}\right)* = 2f(a)+f\left(\frac{1}{a^3}\right)=nf(a)+f\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right)$, т.е. чем меньше k, тем ~~больше~~ меньше $f(k)$.

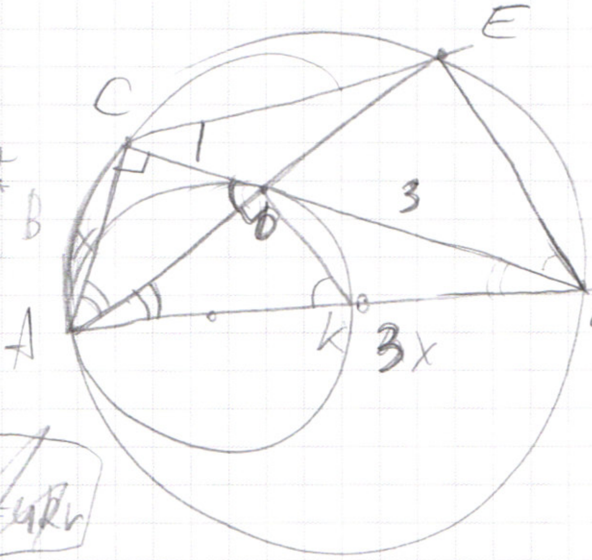
4) $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{4}\right)=1+f\left(\frac{1}{4}\right)=2+f\left(\frac{1}{8}\right)$

~~Но заметим~~ В какой-то момент $nf(k)$ окажется больше $f\left(\frac{1}{k}\right)$, тогда $f\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right)<0$.

$bB = \frac{2}{5}\sqrt{29}\cdot\sqrt{2} = \frac{2}{5}\sqrt{58}$



$\frac{bE}{\sin\angle DCE} = \frac{2}{5}\sqrt{58}$



$tg = \frac{2}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \cos\alpha\,\frac{2}{5}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{5}\cos\alpha$

$1-\cos^2\alpha = \frac{4}{25}\cos^2\alpha$

$1 = \frac{29}{25}\cos^2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$ $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$bE = \frac{3}{5}\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

~~$\angle EBD =$~~

$\sin\angle EBD =$

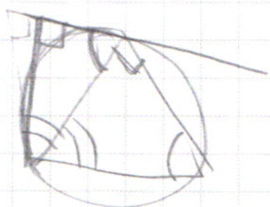
$\sin(45°-\alpha) =$

$\sin\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha) =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{29}}$

~~$3 = AD\cdot AK = 4Rr$~~

$3 = (2R-2r)2R = 4R(R-r)$



$x^2+4^2 = 9x^2$

$8x^2 = 16$

$x = \sqrt{2}$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{4}{2}$

$2x^2 - x - 1 \le ax + 6 \le x + |2x-1|$; $(2x^2-x-1) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

$-\frac{1}{2}$ 1 x

1) ~~$x \ge 0$~~ $x \in -\frac{1}{2}$

$x + |2x-1|$

$-\frac{1}{2}+2=$

x	$\frac{1}{2}$	1	0	1,5	$-\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	2	1	3,5	1,5

$2x^2 - 4x$

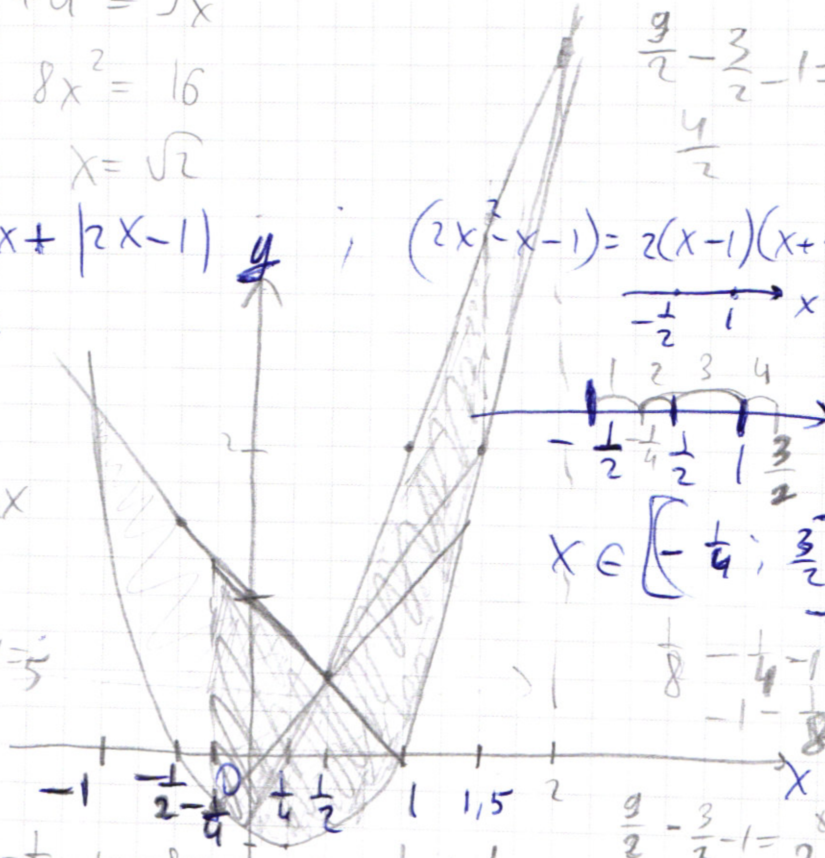
$3x - 1 = 2x^2 - x - 1$

$3-2-1=5$

$2x^2 - 4x = 0$

$2x(x-2) = 0$

$a\frac{1}{2} + 6 \le \frac{1}{2}$



1 2 3 4

$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ x

$x \in \left[-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right]$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$-1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1+2-8}{8} = -\frac{5}{8}$; $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{-8+1-2}{8}$ $-\frac{9}{8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2-5xy+4x^2-2x^2-y^2+4x+4y-3= \quad 2x^2-5xy+4x\cancel{+4y}\ 4y-3=$

$(\sqrt{2}x)^2 - \sqrt{2}x\cdot 2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}x$

$-\frac{1}{4} \Big| -\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$

$\boxed{\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=}$

$(y-2x)^2 = \cancel{2x^2+y^2-4x-4y-xy+2x+y-2=} \quad 2x^2$

$x=\frac{1}{2} \Big| y=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$xy-2x-y+2\geq 0$

$x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)\geq 0$

1) $x\geq 1;\ y\geq 2$

2) $x\leq 1;\ y\leq 2$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a+b=2 \\ -\frac{1}{4}a+b=-\frac{5}{8} \end{cases}$

$\left\{ \frac{7}{4}a=\frac{21}{8} \right.$

$a=\frac{3}{2}$

$x-1=a;\ y-2=b \quad ; \quad y-2-2(x-1)=y-2x$

$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \quad (1) \\ \cancel{2b^2\ 2a^2}\ b^2+2a^2-3=0 \quad (2) \end{cases}$

$b=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}$

(1): $D=25a^2-16a^2=(3a)^2$

$b_1=\frac{5a-3a}{2}=\cancel{2}\,a$

$\frac{9}{4}a+b=2$

$b=-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=$

$-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=-\frac{5}{8}$

$b=y-2=4x-4$

$y=4x-2=4+\frac{2}{3}\sqrt{6}-2=2+\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$\cancel{y=4x} \quad y-2=4x-4 \Leftrightarrow y=4x-2=4-\frac{2}{3}\sqrt{6}-2=2-\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$\cancel{x} \quad y-2x=\frac{1}{3}\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\ \cancel{9}\ \frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{9}$

$4x-4=y-2$

$y=4x-2=4+\frac{4\sqrt{6}}{6}-2=2+\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$y-2x=2+\frac{2}{3}\sqrt{6}-2-\frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(8) = \cancel{f(2)+f(2)+}$ $f(4)+f(2) = f(2)+f(2)+f(2)$

$\cancel{P_3 \left(\frac{1}{d}\right)}$ $f(\frac{1}{d}) = f(a) + f\left(\frac{1}{a^2}\right) + f(a)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a^2}\right) + f(a) + f(a) + f\left(\frac{1}{a^3}\right)$ и т.д.,

т.е. чем меньше a_k ~~$f(k)$~~, тем ~~больше f~~ меньше $f(k)$

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \underbrace{f(k) + f(k) + \dots + f(k)}_{n} + f\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right)$$

в какой-то момент $f(k)$ станет больше

$f \quad f(\frac{1}{2}) = t$

t

$$f\left(\frac{1}{t^n}\right) = (n-1) f(t) + f\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right)$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{f(x)}$ $1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{f(x) \cdot f}\ f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$y \ge 1$ $\quad f(x) \in (0; +\infty)$

Значит $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

~~либо f(x)~~ какое-то из них точно меньше 0.

$\cancel{f(x) + f(t)}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

$\cancel{-1 + \frac{f(ab)}{f(b)} = f\left(\frac{a}{b}\right)}$

$\cancel{f(p\,2)}$ $f(2) = 1$

$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(5)=2$
$f(7)=3$
$f(11)=5$
$f(13)=6$
$f(17)=8$
$f(19)=9$
$f(1)=0$

Пусть оба числа простые. Тогда ничего не получится. Значит какое-то число. Пусть S — составное число

$f(S) = f(p \cdot q) = f(p) + f(q) = f(p_2 \cdot p_3) + f(q) =$

$\cancel{f(1)}$ $f(S)$ — сумма $f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) =$

$\left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right] + \left[\frac{p_n}{2}\right] = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{2} - \frac{1}{2} \cdot p_n$ (кроме 2)

$f(7 \cdot 1) = f(7) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \cancel{f}\left(p \cdot \frac{1}{p_2}\right) =$

$f\left(p_1 \cdot \cancel{p_2} \cdot \frac{1}{p_2}\right) =$

$f\left(\frac{15}{18}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) +$ $f(p_1) + f\left(\frac{1}{p_2}\right) = f(p_1) + f(p_2) + f\left(\frac{1}{p_2}\right)$

$f(5) +$

$f\left(\frac{a}{a}\right) = f\left(a^n \cdot \frac{1}{a^{n+1}}\right) = f(a^n) + f\,\frac{1}{a^{n+1}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)