МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b)=f(1)+f(1\cdot b) \Rightarrow f(1)=0$

$f(x\cdot\frac{1}{x})=f(1)=0 \Rightarrow f(x)=-f(\frac{1}{x})$

$f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

$f(x)$	0	1	2	3	4
x	1	2,3	4,5,6,9	7,8,10,12,15,18	14,16,20,21
	20	18	14	8	4

$f(x)$	5	6	8	9
x	11	13	17	19
	3	2	1	0

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

посчитаем кол-во пар: $\overset{20}{20\cdot 1}+\overset{36}{18\cdot 2}+\overset{56}{14\cdot 4}+$

$+\underset{48}{6\cdot 8}+\underset{16}{4\cdot 4}+\underset{3}{1\cdot 3}+\underset{2}{1\cdot 2}+\underset{1}{1\cdot 1}+\underset{0}{1\cdot 0}=\underset{56}{20+36}+56+\underset{120}{\overset{64}{48+16}}+\overset{6}{3+2+1}=$

126

$=126+56=182$

Ответ: 182

$p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}\cup\{1\}$

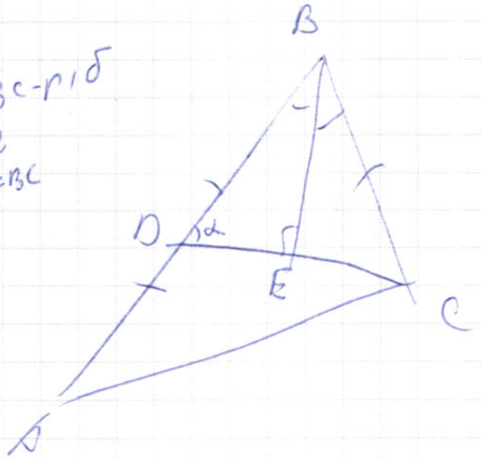
$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4=x$

$f(x)=f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)+f(p_4)$ $\quad [\frac{p_1}{2}][\frac{p_2}{2}][\frac{p_3}{2}][\frac{p_4}{2}]$

p_1	p_2	p_3	p_4	x	$f(x)$	$f(p_1)$	$f(p_2)$	$f(p_3)$	$f(p_4)$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	3	1	1	0	0	0
2	2			4	2	1	1		
5				5	2	2			
2	3			6	2	1	1		
7				7	3	3			
2	2	2		8	3	1	1	1	
3	3			9	2	1	1		
5	2			10	3	2	1		
11				11	5	5			
3	2	2		12	3	1	1	1	
13				13	6	6			
7	2			14	4	3	1		
5	3			15	3	2	1		
2	2	2	2	16	4	1	1	1	1
17				17	8	8			
3	3	2		18	3	1	1	1	
19				19	9	9			
2	2	5		20	4	1	1	2	
3	7			21	4	1	3		

№7.

~~Если у треугольника стороны целые~~



$\left.\begin{array}{l} AD=DB \text{ (по усл.)} \\ DC \perp BE \text{ (по усл.)} \\ BE - \text{бис. (по усл.)} \end{array}\right] \Rightarrow DBC - \text{р/б} \Rightarrow DB=BC$

$AD=DB=BC \Rightarrow AC = 1200-3a$

$AD=a$

$\angle BDC=\alpha \Rightarrow DE = a\cos\alpha \Rightarrow DC = 2\cos\alpha \Rightarrow \cos(\angle ADC) = -\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\cos(\angle ADC) AD \cdot DC = a^2 + 4\cos^2\alpha a^2 + 4\cos^2\alpha a^2 =$

$= a^2 + 8\cos^2\alpha a^2 = 1200^2 - 7200a + 9a^2$

$\cos(\alpha) = c$

$8c^2a^2 = 1200^2 - 7200a + 8a^2$

$c^2a^2 = 180000 - 900a + a^2$

$c^2 = \frac{180000}{a^2} - \frac{900}{a} + 1$

$a \neq 0$, т.к. ~~...~~ если $a=0$, то $0+0<1200$, ($\Rightarrow$ противореч. кнер-ву Δ)

$0 \le c \le 1$

$\frac{1}{a} = z$

$0 \le 180000z^2 - 900z + 1 \le 1$

$x_в = \frac{-(-900)}{2 \cdot 180000} = \frac{1}{400}$

$y_в = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = 1$

ветви вверх $\Rightarrow z = \frac{1}{400}$ - ед. решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 400 \Rightarrow$ Ответ - ~~...~~ 0, если ~~самостоятельно~~ бис. и мед. из разных углов.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

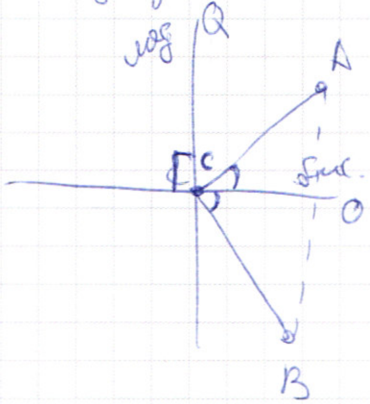
ШИФР

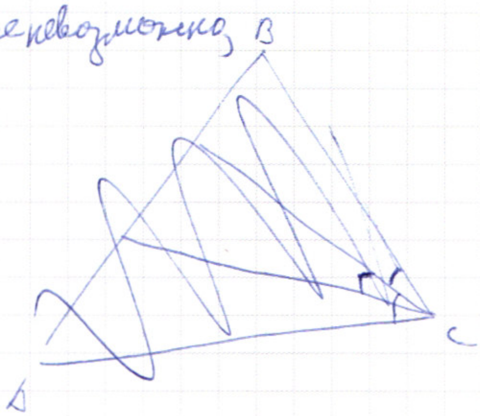
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если из одного: - то тоже невозможно,

т.к.





точки A и B будут лежать по одну сторону от медианы (1)

где A и B - точки, ~~лежащие~~ ~~вершины~~ - вершины

Δ, CO - бис. CQ - мед.

(1) - т.к. все точки лучей CA и CB лежат по одну сторону,

т.к. симметрия.

Ответ: таких нет

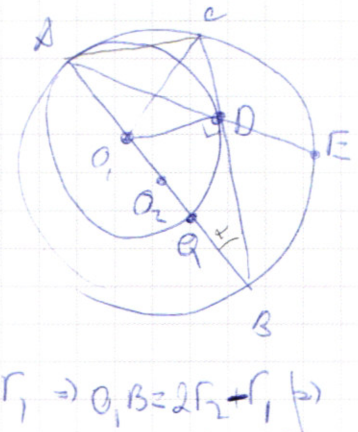
№ 5.

O_2 - центр Ω

O_1 - центр ω

$O_1 \in AB$, т.к. $AB \perp$ общей касательной и проходит

из точки касания



$CD = 1$; $BD = 3$ $AO_1 = r_1$ $AO_2 = r_2$ $\Rightarrow O_1O_2 = r_2 - r_1 \Rightarrow O_1B = 2r_2 - r_1 \Rightarrow$

$O_1B^2 = O_1D^2 + BD^2$

$O_1C^2 = CD^2 + O_1D^2$

$\Rightarrow$ ~~$r_1^2 + 1 = O_1C^2$~~

~~$r_1^2 + 9 = r_2^2$~~

□ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1.

a, b, c, d $\qquad$ d - корень $\Rightarrow ad^2+2bd+c=0$

$b=a\cdot q$

$c=a\cdot q^2$

$d=aq^3$

$\Downarrow$

$ad^2+2aqd+aq^2=0$

$d^2+2qd+q^2=0$

$a^2q^6+2aq^4+q^2=0$

$a^2q^4+2aq^2+1=0$

$aq^2=t$

$t^2+2t+1=0$

$(t+1)^2=0$

$t=-1$

$aq^2=-1$

Ответ: -1.

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

возведем обе части в кв.

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$y^2+(1-5x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=1-10x+25x^2-16x^2-8x+8=9-18x+9x^2=3^2(1-x)^2$

$y=\frac{5x-1\pm3(1-x)}{2}=\left[\begin{array}{l}4x-2\\x+1\end{array}\right.$

$$\begin{cases} xy-2x-y+2\geqslant0 \\ y=\left[\begin{array}{l}4x-2\\x+1\end{array}\right. \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=2 \end{cases}$$ - эллипс $\Rightarrow$ не более 4х точек.

$3(x-1)^2=2$

$|x-1|=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x=\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\sqrt{\frac{2}{3}}+1\end{array}\right.$

$2(x-1)^2+16\cdot2(x-1)^2=2$

$|x-1|=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$xy-2x-y+2\geqslant0$

$x^2+x-2x-x-1+2\geqslant0$

$x^2-2x+1\geqslant0$

$(x-1)^2\geqslant0$

$xy-2x-y+2\geqslant0$

$4x^2-2x-2x-4x+2+2\geqslant0$

$4x^2-8x+4\geqslant0$

$(x-1)^2\geqslant0$

$\Downarrow$

$x=\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{\frac{2}{3}}\\1+\sqrt{\frac{1}{2}}\end{array}\right.$ $\quad y=\left[\begin{array}{l}2+\sqrt{\frac{2}{3}}\\2+4\sqrt{\frac{1}{2}}\end{array}\right.$

Ответ: $(1+\sqrt{\frac{2}{3}};\ 2+\sqrt{\frac{2}{3}})$; $(1+\sqrt{\frac{1}{2}};\ 2+4\sqrt{\frac{1}{2}})$

☐ черновик $\quad$ ☒ чистовик $\qquad$ Страница №5

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha =$

$AC^2 = 4r_2^2 + 16 - 16\cos\alpha \cdot r_2 = 4r_2^2 - 32$

$\cos\alpha = \frac{3}{r_2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{r_1}{r_2}$

$\angle ACB = 90°$, т.к. опир. на диа. $\Rightarrow \angle CAB = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1C^2 = AC^2 + AO_1^2 - 2\cos(90-\alpha) \cdot AC \cdot AO_1 =$

$= 4r_2^2 - 32 + r_1^2 - 2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot r_1 \cdot (2\sqrt{r_2^2 - 8})$

$r_1^2 + 1 = 4r_1^2 + 36 - 32 + r_1^2 - 2\frac{r_1^2}{\sqrt{r_1^2+9}} \cdot 2\sqrt{r_1^2+1}$

$4r_1^2 + 3 = 4r_1 \sqrt{\frac{r_1^2+1}{r_1^2+9}}$

$r_1 + \frac{3}{4r_1} = \sqrt{\frac{r_1^2+1}{r_1^2+9}}$

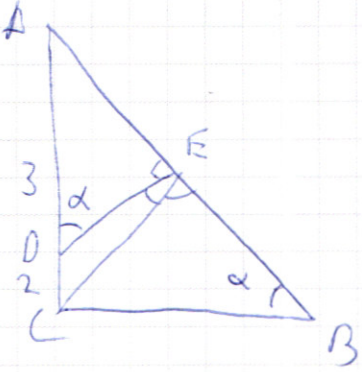
$r_1^2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{16r_1^2} = \frac{r_1^2+1}{r_1^2+9}$ $\qquad r_1^2 = a$

$16r_1^4 + 24r_1^2 + 9 = \frac{16r_1^4 + 16r_1^2}{r_1^2+9}$

$16a^3 + 24a^2 + 9a + 144a^2 + 216a + 81 = 16a^2 + 16a$

$16a^3 + 152a^2 + 209a + 81 = 0$

№ 4.



$\angle DEC = 45 \Rightarrow \angle CEB = 45$ (т.к. $\angle DEB = 90^\circ$)

$DEBC$ – впис. т.к. $\angle DCB = 90^\circ$ и $\angle DEB = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CDB$ – р/б, т.к. $\angle CDB = \angle CEB$ и $\angle CBD =$

$= \angle CED$ (как впис. опир. на одну дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB = 2 \Rightarrow tg\,\angle CAB = \frac{2}{5}$

$DE = 3 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\sin\angle CDE = \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$S(CDE) = \frac{CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{30}{29}$

Ответ: $\frac{30}{29}$ и $tg = \frac{2}{5}$

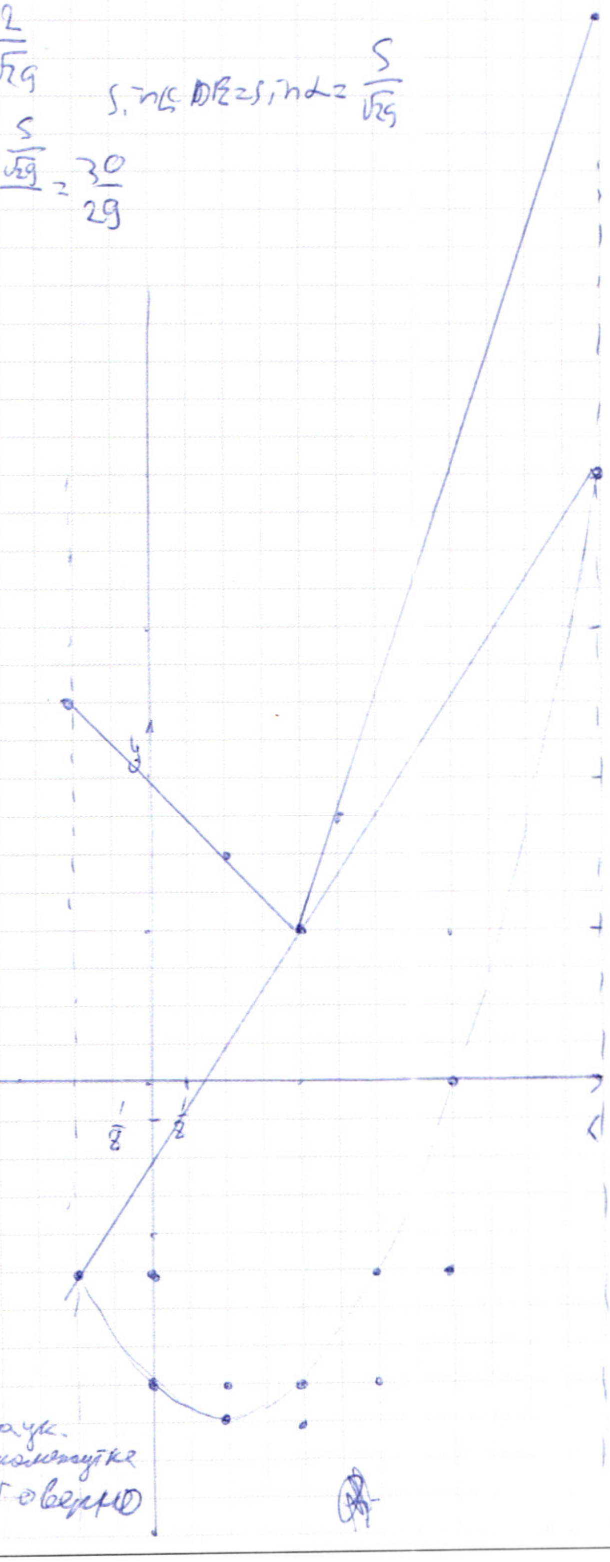
№ 6.

Ответ: $b = -\frac{1}{4}$; $a = \frac{3}{2}$

Если точки a и b $\exists \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1{,}5$ всё должно

работать $\Rightarrow$ $\begin{cases} b - \frac{a}{4} \geq -\frac{5}{8} \\ b + \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} \\ b + 1{,}5a \geq 2 \end{cases}$



решив систему получим

$a = \frac{3}{2}$ и $b = -\frac{1}{4}$

подставим и проверим!

$2x^2 - x - 1 \leq 1{,}5x - 0{,}25 \leq x + |2x-1|$

$2x^2 - 2{,}5x + 0{,}75 \leq 0$

$\Updownarrow$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ ($x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{2}$ – корни)

$|2x-1| - 0{,}5x + 0{,}25 \geq 0$

$|8x-4| - 2x + 1 \geq 0$

$x \leq \frac{1}{2}$: $4 - 8x - 2x + 1 \geq 0$; $\frac{1}{2} \geq x$ – верно $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$x \geq \frac{1}{2}$: $8x - 4 - 2x + 1 \geq 0$; $\frac{1}{2} \leq x \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ на ук. промежутке это верно

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 +
2 +
3 +
4 +
5
6 +
7 +

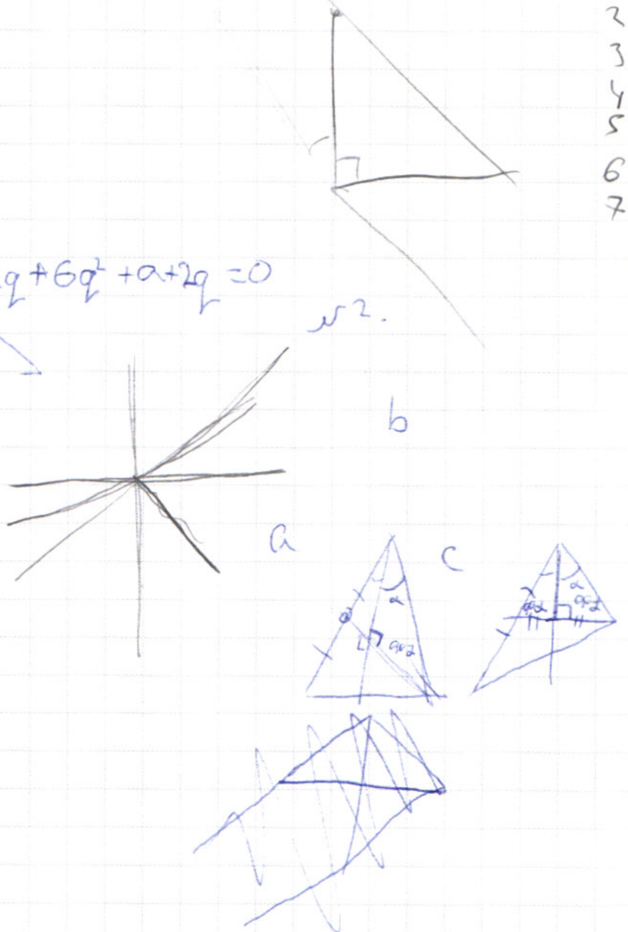
~~a, b, c~~

~~$a, a+q, a+2q, a+3q$~~

~~$ax^2+2ax+2qx+a+2q=0$~~

~~$a(a^2+6aq+q^2)+2a^2+6aq+2aq+6q^2+a+2q=0$~~

~~$a^3+6a^2q+aq^2+$~~



a, b, c

a, aq, aq^2, aq^3

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$a^2q^6+2aq^4+q^2=0$

$a^2q^4+2aq^2+1=0$

$aq^2=t$

$t^2+2t+1=0$

$(t+1)^2=0$

$t=-1$

$\sqrt{3}$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=2$

эллипс.

$y^2+(1-5x)y+4x^2+2x-2=0$

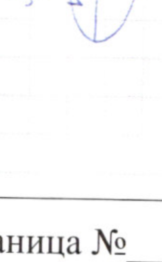
$D=1-10x+25x^2-16x^2-8x+8$

$=9-18x+9x^2=$

$=3^2(1-x)^2$

$y=\frac{5x-1\pm 3|1-x|}{2}$

$2x^2+y^2=2$



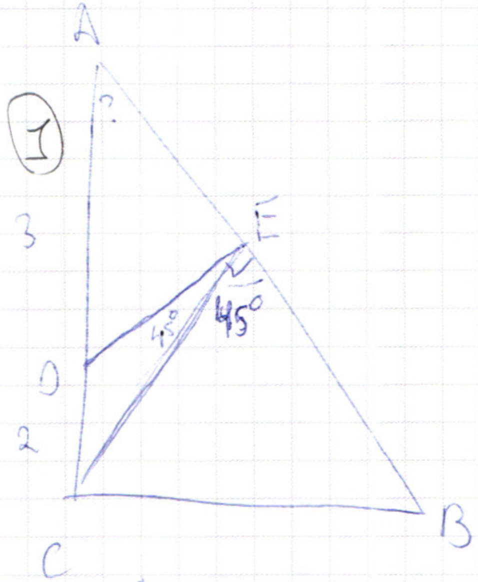
☒ черновик ☐ чистовик

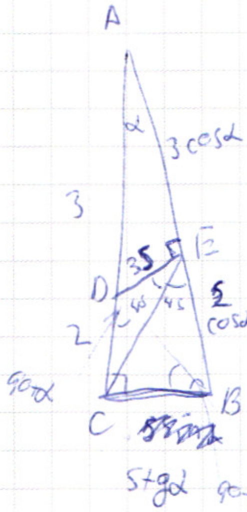
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

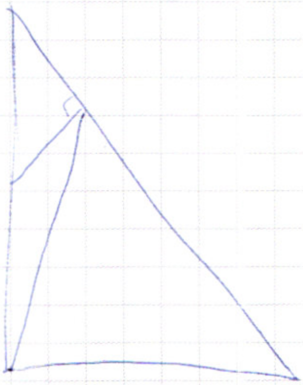
DE:3sinα

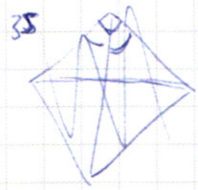


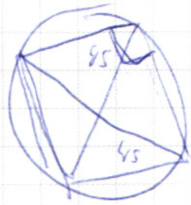


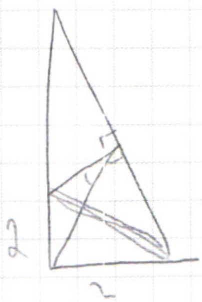
$\frac{5}{\cos\alpha} - 3\cos\alpha$

$= 3S\,tg + 2$

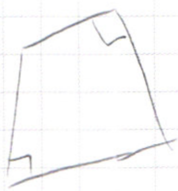




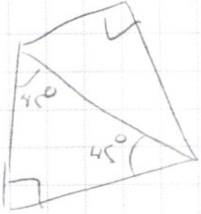


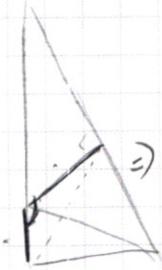


2-впис. т.к



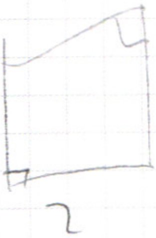
3





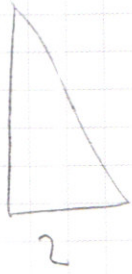
=) 5

4

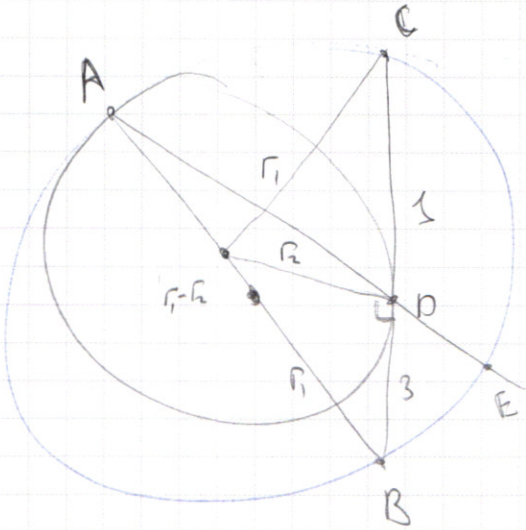


5

=) 5



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y=\frac{5x-1 \pm 3|x-1|}{2}$$

$\Downarrow$

$$y=\frac{5x-1\pm(3x-3)}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{8x-4}{2}\\ \frac{2x+2}{2}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}4x-2\\ x+1\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y=\left[\begin{array}{l}4x-3\\ x+1\end{array}\right. \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=2 \\ 2+xy-2x-y\geq 0 \end{cases}$$

$\sqrt{3}$

$r_2^2+1=r_1^2 \Rightarrow (r_1+r_2)(r_1-r_2)=1$

$r_2^2+9=4r_1^2-4r_1r_2+r_2^2$

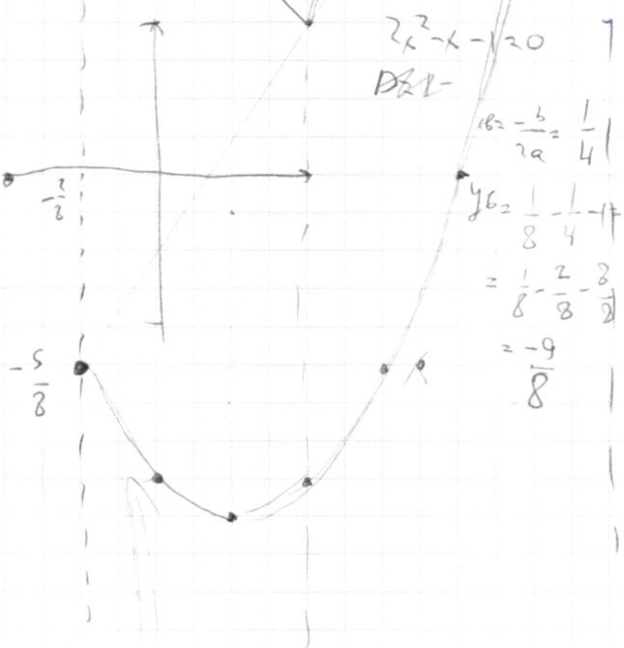
$9=r_1(4r_1-r_2)$

№6

$\frac{1}{2}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=-\frac{5}{8}$

$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}$

$=\frac{4}{2}=2$



$2x^2-x-1=0$

$x_в=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$

$y_в=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$

$=\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=$

$=-\frac{9}{8}$

$x+|2x-1|$

$x=+0,5$

$x\geq 0,5$: $x+2x-1=3x-1$

$x\leq 0,5$: $x-2x+1=1-x$

$$\begin{cases} b-\frac{3}{8}a\geq -\frac{5}{8} \\ b+\frac{1}{2}a\leq\frac{1}{2} \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$

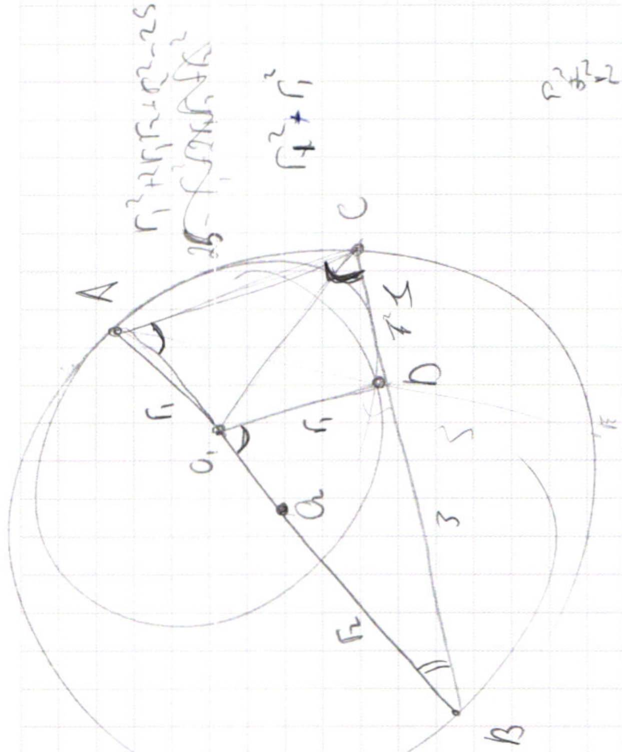
$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

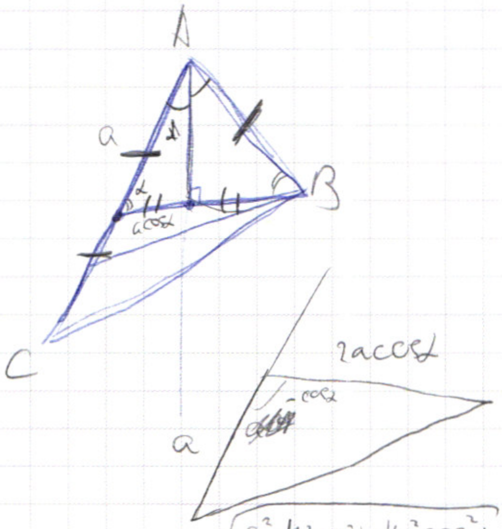
$f(a\cdot\frac{1}{a})=0=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow \boxed{f(a)=-f(\frac{1}{a})}$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

1200   1

$a^2+b^2-2\cos^2\alpha\, ab=c^2$





$\sqrt{a^2+4a^2\cos\alpha+4a^2\cos^2\alpha}=$

$=a\sqrt{1+8\cos^2\alpha}=$

$1200-3a$

$a^2+8\cos^2\alpha\, a^2=1200^2-1200\cdot 6a+9a^2$

$\cos^2\alpha\, a^2=\frac{1200^2}{8}-900a+a^2$

$180000-900a+a^2=\cos\alpha\, a^2$

$\cos^2\alpha=\frac{180000}{a^2}-\frac{900}{a}+1$

$0\le 180000z^2-900z+1\le 1$

$9-\cancel{18}+\cancel{8}=\frac{8}{8}$

$\frac{1}{a^2}=z$

$\frac{180000}{(400)^2}=\frac{18}{16}+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+1$

$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{400}$

$\frac{1}{8}=\frac{1}{400}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)