МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$x = \frac{1}{2}$ $\quad -8 \cdot \frac{1}{4} - \frac{6}{2} + 7 =$ $= -2 - 3 + 7$ $= 2$

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

$4 - 6|1-1| = 4$ $\quad -8 \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{2} + 7 = -2 + 7 + 3 = 8$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{30}}{6}$

$-\frac{8}{16} + \frac{6}{4} + 7 = 7 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 8$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Т.к. a, b, c – послед. члены геом. прогрессии, то $b^2=ac$

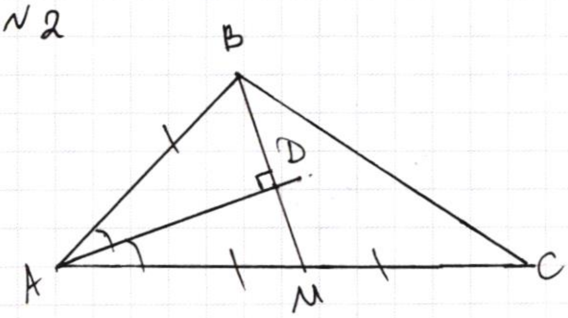
$ax^2 + 2bx + c = 0$: $\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$

$x = \frac{b}{a}$

Так как знаменатель прогрессии – $\frac{b}{a}$, то 4-й член равен $\frac{cb}{a} = x$, значит, $c = 1$

Ответ: 1.

№2



Рассмотрим все такие треугольники, где бисс. $AD \perp BM$ – мед. Тогда по призн. р/б Δ-ка $AB = AM = MC$, то есть условие на перпендикулярность выполняется тогда и только тогда, когда одна из сторон в 2 раза больше другой, значит, т.к. $900 \vdots 3$, подойдут треугольники, где третья сторона $\vdots 3$, ~~которая ст~~ и вторая вдвое больше первой. Т.к. длина стороны от 2 до 898, то всего подходящих треугольников – 299 – столько чисел $\vdots 3$ в этом промежутке.

Ответ: 299.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

Замена: $t=x-6$, $s=y-1$

$$\begin{cases} t+6-6(s+1)=\sqrt{st} \\ t^2+2s^2=18 \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2+2s^2=18 \\ t^2-12st+36s^2=st \quad (*) \\ t\geq 6s \end{cases}$$

$*$ $\quad t^2-13st+36s^2=0$

По т. Виета относительно t, $\left[\begin{array}{l} t=4s \\ t=9s \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4s \\ t=9s \end{array}\right. \\ t\geq 6s \\ t^2+2s^2=18 \end{cases}$$

1) $s\geq 0$

т.к. $t\geq 6s$, $t=9s$

$$\begin{cases} t=9s \\ 81s^2+2s^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=\sqrt{\frac{18}{83}} \\ t=9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

2) $s<0$

т.к. $t\geq 6s$, $t=4s$

$t=4s$

$2s^2+16s^2=18$

$$\begin{cases} s=-1 \\ t=-4 \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

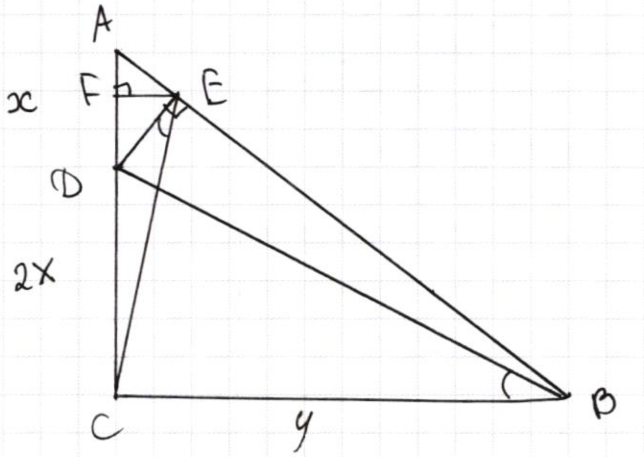
Ответ: $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;\ \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)$; $(2;0)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$

$D \in AC$, $AD : AC = 1:3$

$DE \perp AB$, $\angle DEC = 30°$

$AC = \sqrt{7}$

Найти: а) $tg\, BAC$

б) $S(\triangle CED)$

Решение.

а) Пусть $AD = x$, тогда $DC = 2x$, и $BC = y$

т.к. $\angle DEB = \angle DCB = 90°$, то по призн. $CDEB$ – вписанный,

значит, $\angle DBC = \angle DEC = 30°$.

из $\triangle DBC$: $tg\, 30° = \frac{2x}{y}$

$y = 2\sqrt{3}x$

из $\triangle BAC$: $tg\, BAC = \frac{y}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) ДП: $EF \perp AD$

т.к. $\angle BAC < 90°$, то $\cos BAC = \sqrt{\frac{1}{1 + tg\, BAC}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

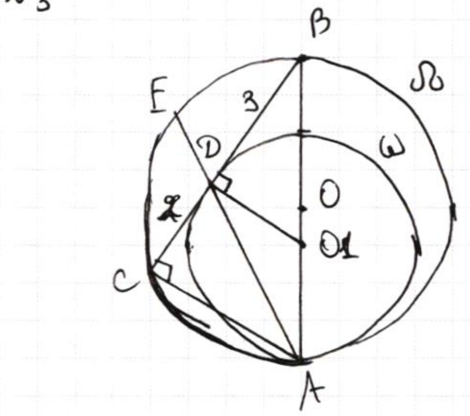
$EF = AD \cdot \sin BAC \cos BAC$

$S(\triangle DEC) = \frac{1}{2} EF \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2AC}{3} \cdot \left(\frac{AC}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}\right) =$

$= \frac{7}{9} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\, BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ б) $S = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5



Дано: окр Ω, ω – касаются внутр. обр. в т. A

AB – диам. Ω, BC – хорда Ω, $BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = \{E, A\}$

$BD = 3$, $CD = 2$

Найти: радиусы Ω, ω, $S(BECA)$

Решение.

1) Пусть O, O_1 – центры Ω и ω, R и r – их радиусы

(*) т.к. D – т. касания, $O_1D \perp BD$, и $\angle BCA = 90°$ как угол, опир. на диаметр AB $\Rightarrow$ ~~из подобия $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$~~:

~~$\frac{BD}{B}$~~ по обобщ. т. Фалеса: $\frac{BD}{DC} = \frac{BO_1}{O_1A}$

$$\frac{2R - r}{r} = \frac{3}{2}$$

$$R = \frac{5}{4} r$$

2) $\triangle BDO_1$: по т. Пифагора, $DO_1^2 + BD^2 = BO_1^2$

$$9 + r^2 = \frac{9}{4} r^2$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{5}{4} r = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

3) из подобия $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA \Rightarrow AC = \frac{5}{3} r = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$\triangle CDA$: по т. Пифагора, $AD = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6}$

$$\sin \angle CAD = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle BAC$: $\sin BAC = \frac{5}{2R} = \frac{5}{2\cdot\frac{3\sqrt5}{2}} = \frac{\sqrt5}{3}$

т.к. $\angle CAD < 90°$, $\cos CAD = \sqrt{1-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

4) Заметим, что $2\sin CAD\cos CAD = \sin CAB$, т.к. $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CAB \Rightarrow EA$ — бисс. $\angle CAB$, т.е. $\smile EC = \smile EB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ как хорды, стягивающие равные дуги,

$CE = EB = 2R\sin CAD = 3\sqrt5\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

5) $S(\triangle CEB) = \frac{1}{2}CE\cdot EB\cdot\sin CEB = \frac{1}{2}CE^2\cdot\sin CAB =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{30}{4}\cdot\frac{\sqrt5}{3} = \frac{10\sqrt5}{8} = \frac{5\sqrt5}{4}$

6) $S(\triangle CAB) = \frac{1}{2}BC\cdot CA = \frac{1}{2}\cdot5\cdot2\sqrt5 = 5\sqrt5$

$S(BACE) = S(\triangle ECB) + S(\triangle BCA) = \frac{25\sqrt5}{4}$

~~Ответ: $S(BACE) = \frac{25\sqrt5}{4}$, $R = \frac{3\sqrt5}{2}$, $r = \frac{6}{\sqrt5}$~~

~~(На след. страницу)~~

* точки O и O_1 лежат на одной прямой, так как если провести касательную в т. A, то OA и $O_1A \perp$ ей как радиусы, провед. к т. касания

Ответ: $S(BACE) = \frac{25\sqrt5}{4}$, $R = \frac{3\sqrt5}{2}$, $r = \frac{6}{\sqrt5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

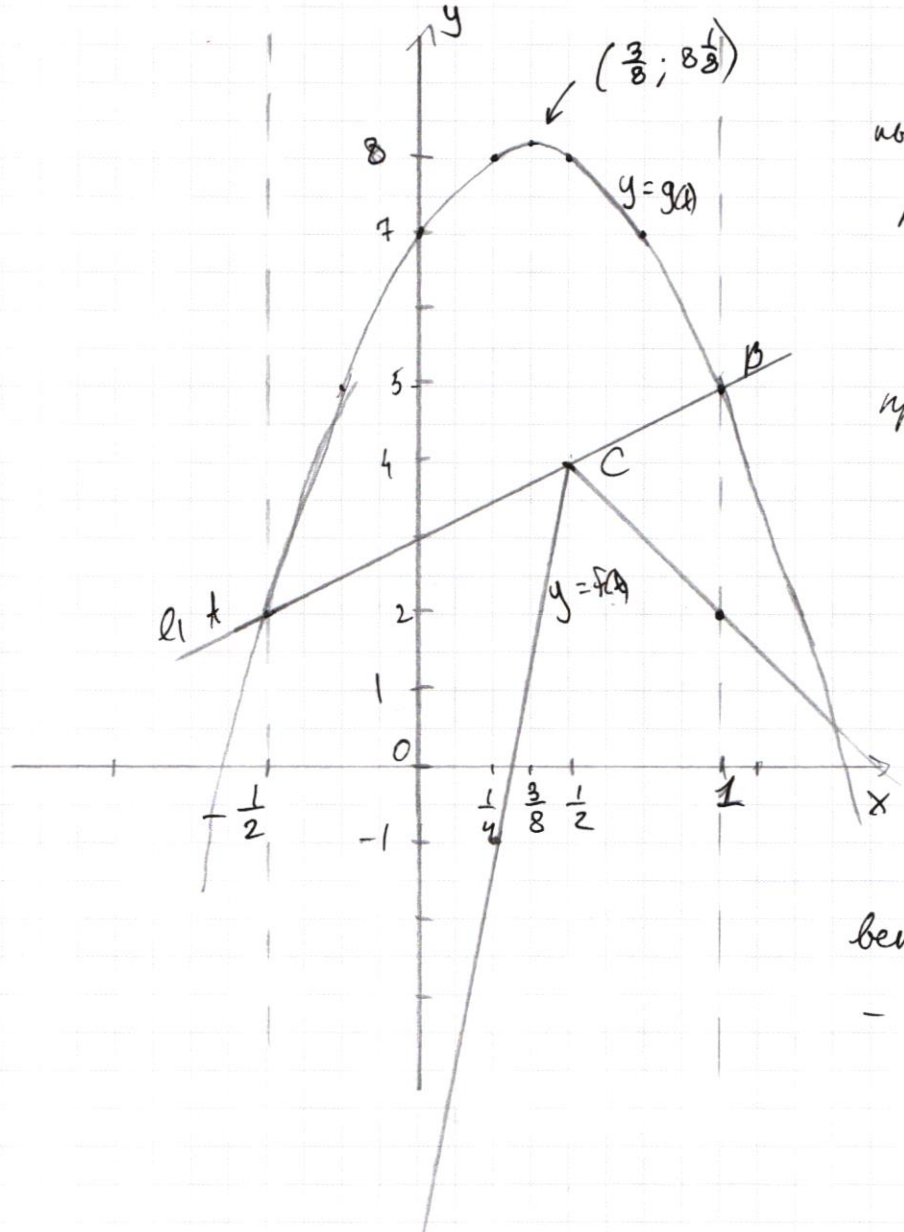
$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

Пусть $f(x) = 8x - 6|2x-1|$

$$f(x) = \begin{cases} -4x+6, & x \geq \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$g(x) = -8x^2+6x+7$

Отметим несколько точек графиков $y=g(x)$ и $y=f(x)$ и построим их на $[-0,5; 1]$



Рассмотрим предельный случай — прямую l_1, проходящ. через A и B

В силу неравенства прямая $y = ax+b$ будет ниже или совпадать с l_1 на $[-\frac{1}{2}; 1]$.

Заметим, что т. C лежит на l_1 и оно не выше $y=ax+b$. Значит, возможен единственный вариант — $l_1 \equiv y=ax+b$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 5 = a + b \\ 2 = -\frac{a}{2} + b \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} a = 3$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3)$

№ 7.

Используя условие $f(p) = [\frac{p}{2}]$, где p - простое, и $f(ab) = f(a) + f(b)$, найдём значения в т. от 2 до 22:

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = 4$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = 4$

$f(21) = 4$

$f(22) = 6$

т. к. $f(a) = f(a) + f(1)$, то $f(1) = 0$, следовательно,

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

Выпишем значения и их количества суммарные в точках от 2 до 22:

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9
кол-во	2	4	6	4	1	2	6	1	1

Подходят пары, где $x \neq y$ $f(x) < f(y)$

Тогда суммарное их количество равно

$1 \cdot 20 + 1 \cdot 19 + 0 \cdot 19 + 2 \cdot 17 + 1 \cdot 16 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 =$

$= 20 + 19 + 34 + 16 + 48 + 36 + 8 = 73 + 64 + 44 =$

$= 181$

Ответ: 181

$f(1)=0$ ✓ $f(9)=2$
$f(10)=3$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\mathbb{Q}^+$ $f(2)=1$ $f(11)=5$
$f(12)=3$

$f(p)=[p/2]$, p - прост. $f(3)=1$ $f(13)=6$
$f(4)=2$ $f(14)=4$ $f(15)=3$

$2\le x\le 22$, $2\le y\le 22$, $f(x/y)<0$ $f(5)=2$ $f(17)=8$ $f(16)=4$

$f(6)=2$ $f(18)=3$

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ с $f(7)=3$ $f(19)=9$

$f(8)=3$ $f(20)=4$

$=f(x)-f(y)$ $f(21)=4$
$f(22)=6$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)$

$ab, c, \frac{cb}{a}$

$f(1)=0$

$b^2=ac$

$ax^2-2bx+c=0$ $0=f(1)=f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$x^2-\frac{2b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ $f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\frac{D}{4}=b^2-ac$

знач.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
кол-во	1	2	4	6	4	1	2	0	1	1

22

$=0$

$x=\frac{b}{a}$

$c=1$

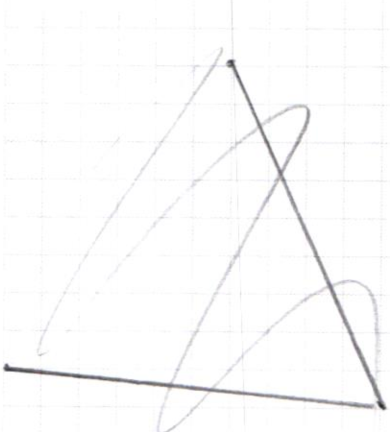
$f(x)\ge f(y)$

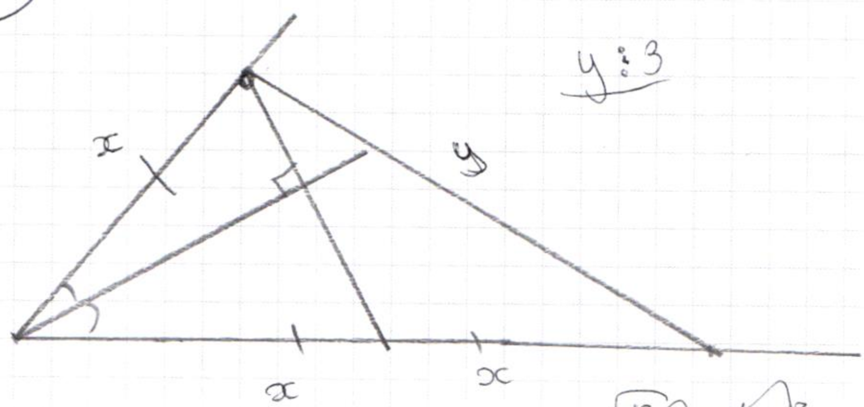
кол-во: $1\cdot 21+1\cdot 20+2\cdot 18+1\cdot 17+4\cdot 13+6\cdot 7+4\cdot 3+2\cdot 1=$

$=21+36+20+17+52+42+12+2=57+37+94+14=$

$=188+14=202$

y : 3





$3\sqrt{\frac{18}{83}}=\sqrt{9\frac{18}{83}}$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-12x+36+2y^2-4y+2-36-2+20=0$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

t s

1) $s\ge 0$

$$\begin{cases} t+6-6(s+1)=\sqrt{st} \\ t^2+2s^2=18 \end{cases}$$

$t\ge 6s$ $\begin{cases} t^2-12st+36s^2=st \Rightarrow t=4s;\ 9s; \\ t\ge 6s \\ t^2+2s^2=18 \end{cases}$

$t=9s$

$2s^2+81s^2=18$

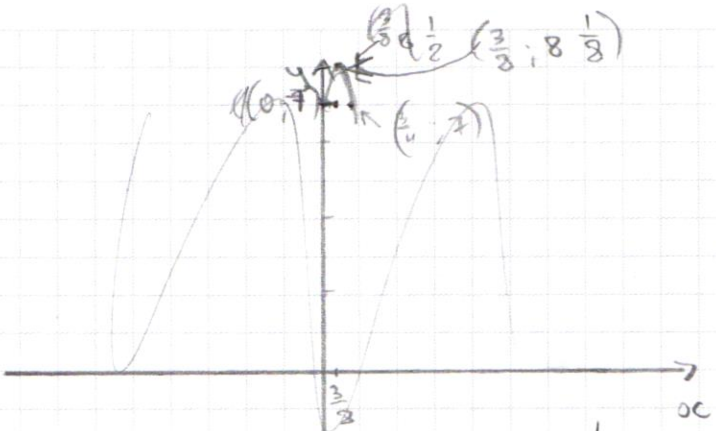
$s=\sqrt{\frac{18}{83}}$

$t=9\sqrt{\frac{18}{83}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sin CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{2\sqrt6} = \frac{1}{\sqrt6}$ острый! $\cos CAD = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$EC = 2R\sin CAD = \frac{5}{2}r \cdot \frac{1}{\sqrt6} = \frac{5\cdot 6}{2\sqrt6\sqrt5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

$\sin CAB = \frac{5}{2R} = \frac{5}{2\cdot\frac{5}{4}r} = \frac{2}{r} = \frac{2\sqrt5}{6} = \frac{\sqrt5}{3}$

$\cos CAB = \frac{2}{3}$

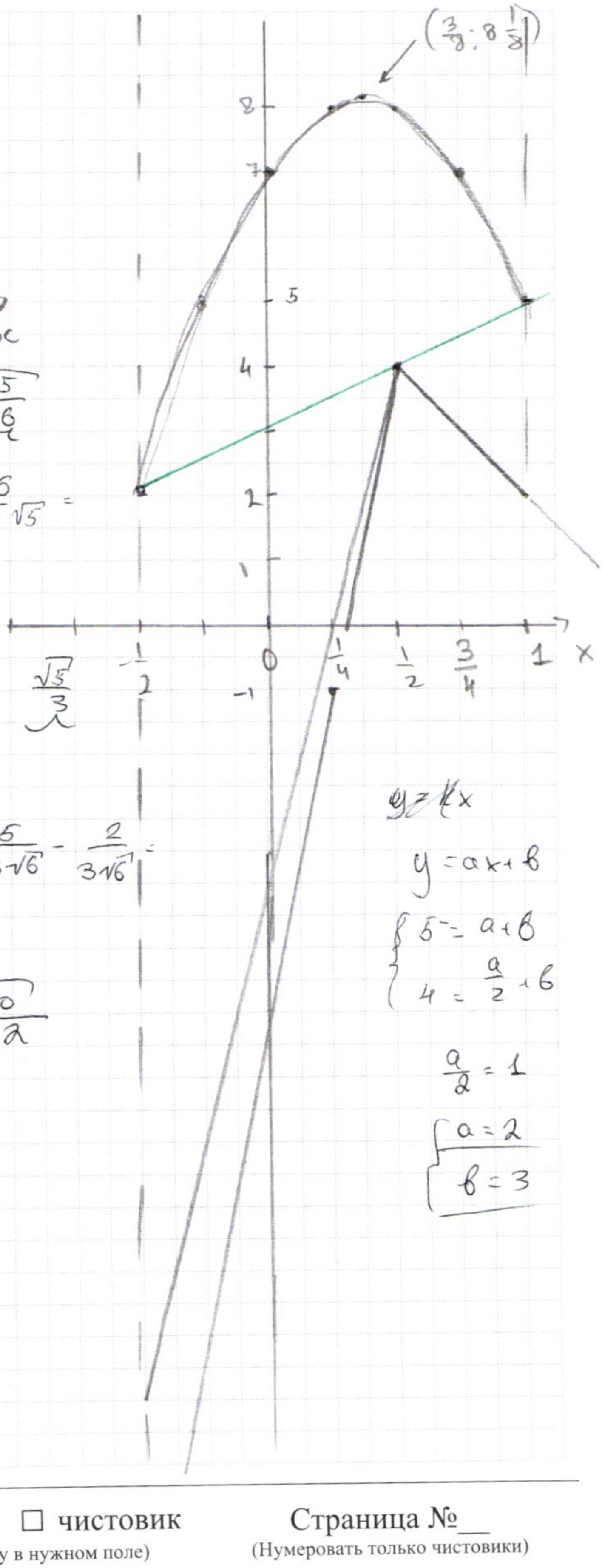
$\sin EAB = \frac{\sqrt5}{3}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt6} - \frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{3\sqrt6} - \frac{2}{3\sqrt6} = \frac{1}{\sqrt6}$

$EB = 2R\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{5}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

$S(\triangle CEB) = \frac{1}{2} CE\cdot EB\cdot \sin\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot\frac{30}{4}\cdot\frac{\sqrt5}{3} = \frac{10\sqrt5}{8} = \frac{5\sqrt5}{4}$

$S(BCA) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 5\cdot\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\sqrt5} = 5\sqrt5$

$S(BCEA) = 5\sqrt5 + \frac{5\sqrt5}{4} = \frac{25\sqrt5}{4}$



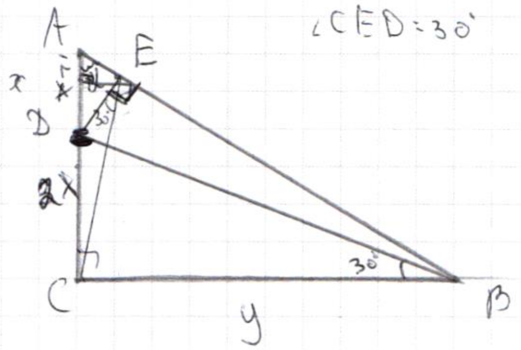
~~$y = kx$~~

$y = ax + b$

$\begin{cases} 5 = a + b \\ 4 = \frac{a}{2} + b \end{cases}$

$\frac{a}{2} = 1$

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$



$\angle CED = 30°$

$tg\ BAC - ?$

$tg\ BAC = \frac{y}{3x}$

$3x\, tg\,\alpha = y$

$\cos\alpha = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+y^2}}$

$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

а) $tg\,30° = \frac{2x}{y}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{y}$

$y = 2\sqrt{3}x$

$tg\ BAC = \frac{y}{3x} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

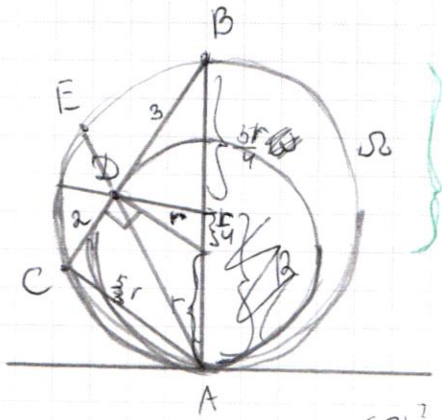
б) Остр. угол! $\cos BAC = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$\sin BAC = \sqrt{1-\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$EF = x\sin\alpha\cos\alpha = \frac{AC}{3}\cos\alpha\sin\alpha$

$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot EF = EF\cdot x = \frac{AC}{3}\cdot\frac{AC}{3}\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \frac{AC^2}{9}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{9}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$



$CD = 2$

$BD = 3$

$2R - r$

$\frac{2R-r}{r} = \frac{3}{2}$

$4R - 2r = 3r$

$R = \frac{5}{4}r$

$r^2 + 9 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 r^2 = \frac{9}{4}r^2$

$\frac{5}{4}r^2 = 9$

$\frac{AC}{5} = \frac{r}{3}$

$AC = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{5}} =$ $\quad r = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$AC = 2\sqrt{5}$

$AD = \sqrt{4+20} = 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6}\ ED = 6 \quad ED = \frac{3}{\sqrt{6}}$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le$

$\le -8x^2 + 6x + 7$

$x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow y = 8x - 12x + 6 = -4x + 6$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow y = 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$-8\cdot\frac{9}{64} + 6\cdot\frac{3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = 7\frac{9}{8}$

~~$2\sqrt{3}\ ED = 6$~~ $ED = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$ED = \frac{3}{\sqrt{6}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \Rightarrow xy-x-6y+6=x^2-12xy+36y^2$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2+20-36-2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$x^2-12x+36+y^2+y^2-4y+4-36-4+20=0$

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2=20$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$ $\quad x^2-13xy+\left(\frac{13}{2}\right)^2+36y^2+6y+0{,}25+$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$ $\quad +x+6y-6-\left(\frac{13}{2}\right)^2-0{,}25=0$

$t^2 \quad s^2$

$$\begin{cases} t^2+2s^2=18 \\ \sqrt{ts}=(t+6)-6(s+1)=t-6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s^2+t^2=18 \\ ts=t^2-12st+36s^2 \\ t\geq 6s \end{cases} \qquad \begin{cases} 2s^2+t^2=18 \\ t^2-13st+36s^2=0 \\ t\geq 6s \end{cases}$$

$t^2-4st-9st+36s^2=0$

$t(t-4s)-9s(t-4s)=0$

$(t-4s)(t-9s)=0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4s \\ t=9s \end{array}\right. \\ 2s^2+t^2=18 \\ t\geq 6s \end{cases}$$

1) $s\geq 0$

$t=9s$?

$2s^2+81s^2=18$

$s=\sqrt{\frac{18}{83}}$

$t=9\sqrt{\frac{18}{83}}$

2) $s<0$

$t=4s$

$2s^2+16s^2=18$

$s=-1$
$t=-4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)