МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

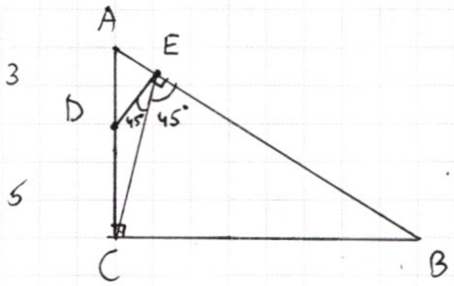
$y^2-4x+4x^2=xy-2x-y+2$ $\quad xy-2x-y+2\geq 0$

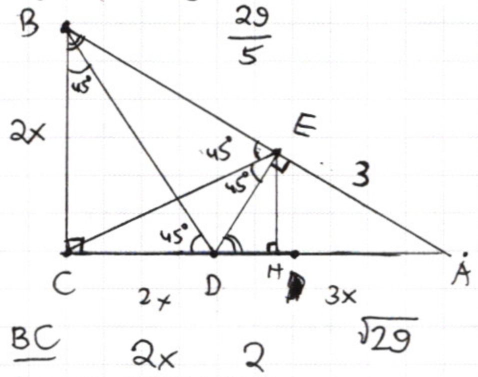
$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$\frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}{5}=\frac{29}{5}$

$2x^2+\cancel{\dots}+4y-3=xy-2x-y+2$

$2:5:\sqrt{29}$





$tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

$4+25=29$

$S_{CED}=\frac{CD\cdot EH}{2}$

$AD=\frac{3\sqrt{29}}{5}$

$AB=\frac{29}{5}$

$EA=\frac{3\sqrt{29}\cdot 5}{5\cdot\sqrt{29}}=3$

$\frac{\frac{2\sqrt{29}}{\cancel{5}}}{\frac{29}{\cancel{5}}}=\frac{EH}{3}$ $\qquad CD=\frac{2\sqrt{29}}{5}$

$\frac{2\sqrt{29}}{29}=\frac{EH}{3}$ $\qquad EH=\frac{6\sqrt{29}}{29}$

$S_{CED}=\frac{\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6\sqrt{29}}{29}}{2}=\frac{12\cdot 29}{2\cdot 5\cdot 29}=\frac{12}{10}=1,2$ ✓

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{2}(x-1)+(y-2)\right)^2-3$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3=0$ $\qquad$ $y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$ $\qquad$ $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

$1{,}5k+b\geq 2$

$-0{,}5k-b\geq 0{,}5$

$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)$ $\qquad$ $kx+b$ $\qquad$ $k\geq 1{,}5$

$k=1{,}5$

$x\geq 0$ $\qquad$ $-\frac{1}{4}k+b\geq -\frac{5}{8}$

$(x-1)(y-2)=(y-2x)^2$ $\qquad$ $\frac{1}{2}k+b\leq \frac{1}{2}$

$2(x-1)^2+2\sqrt{2}(x-1)(y-2)+(y-2)^2$ $\qquad$ $1{,}5k+b\geq 2$

$\cancel{y^2-4xy+4x^2}=x$ $\qquad$ $-k+4b\geq -\frac{5}{2}$

$1{,}5k+b\geq 2$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$ $\qquad$ $y^2-4xy+4x^2=(x-1)(y-2)$

$\frac{16}{30}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$ $\qquad$ $-k+4b\geq -2{,}5$

$1{,}5k+b\geq 2$

$(x-1)(y-2)-2x^2+4xy-4x-4y+3=0$

$\frac{1}{4}k-b\leq \frac{5}{8}$

$\cancel{xy}-\cancel{y}-\cancel{2x}-2-\cancel{2x^2}+\cancel{4xy}-\cancel{4x}-\cancel{4y}+3=0$ $\qquad$ $\frac{1}{2}k+b\leq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{4}{8}$

$5xy-5y-6x-2x^2+1=0$

$\frac{3}{4}k\leq \frac{9}{8}$

$\frac{3}{2\cdot 4}$

$2{,}25+b\geq 2$ $\qquad$ $b\geq -\frac{1}{8}$ $\qquad$ $k\leq \frac{9\cdot 4}{8\cdot 3}=1{,}5$

$\frac{3}{4}+b\leq \frac{1}{2}$

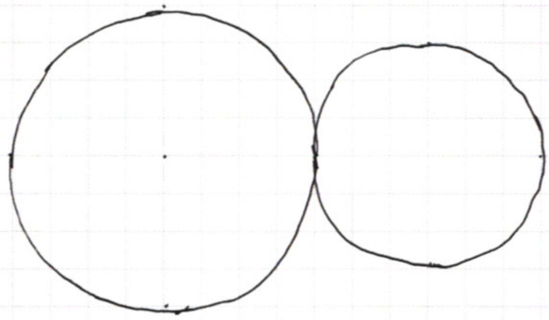
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{AB}{r} = 4$

$\frac{AB}{AO} = \frac{BC}{CX}$ $\frac{2R}{r} = \frac{4}{1}$

$r = \frac{AB}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$



$\frac{4}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

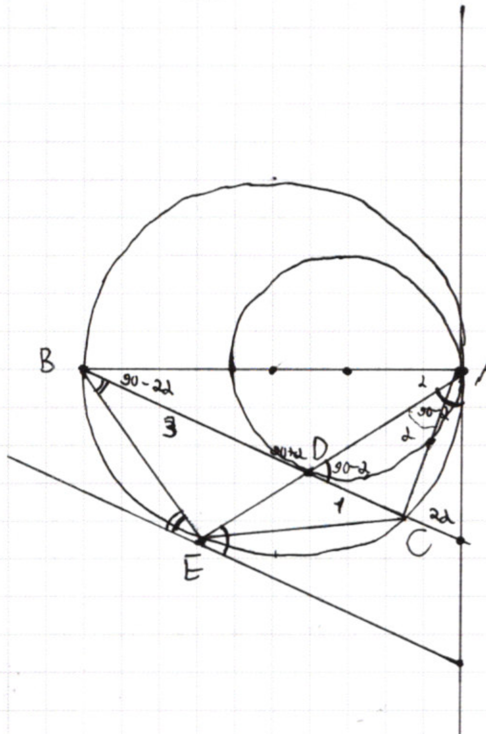
$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB}$

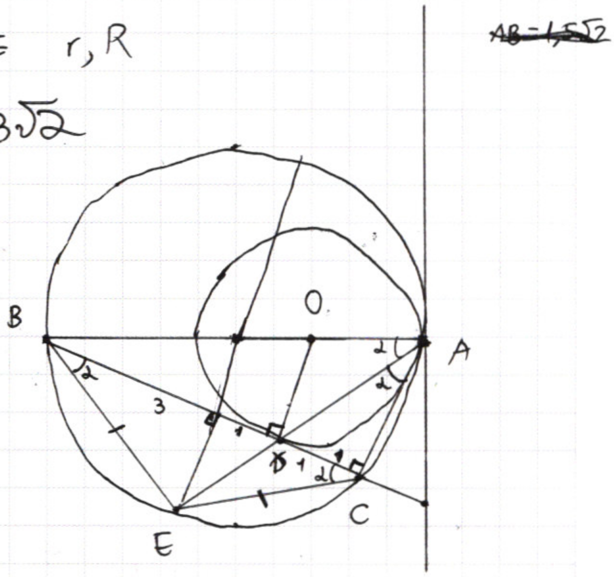
$AB = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

~~$AB = 1{,}5\sqrt{2}$~~

S_{BACE} r, R

$AB = 3\sqrt{2}$





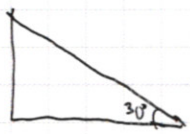
$x2R - x^2 = 3$

$x(2R - x) = 3$

$x^2 - 2xR + 3 = 0$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{18}}{9} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$



$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{x}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = 4\operatorname{tg}\alpha$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\frac{\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cancel{4\sin\alpha}}{\cos\alpha}$

$\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 0$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$

$3\sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{3}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b=ak \quad c=ak^2 \quad d=ak^3$ №1

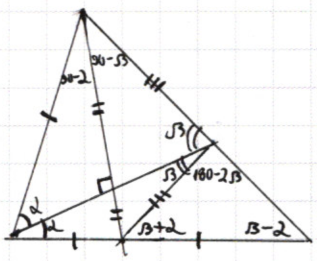
$ax^2+2akx+ak^2=0$

$x=\frac{\pm\sqrt{4a^2k^2-4a^2k^2}-2ak}{2a}=\frac{\pm 0-2ak}{2a}=-k$

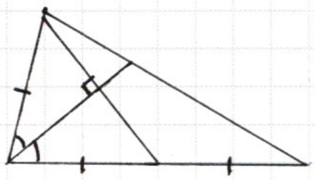
$ak^3=-k$ (т.к. $k\neq 0$)

$ak^2=-1$ (третий член)

№2



$180-\alpha-\beta+2\alpha=180+\alpha-\beta$



$x+2x+y=1200$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+2x^2=4x+4y-3$

$xy-2x-y+2+4xy-2x^2$

$200+400+600$ — не подходит

$201+402+597$ — подходит

⋮

$300+600+300$ — не подходит

$299-200=99$ ✓

$299 \cdot 3 = 897$

$1200-897=303$

$299 \cdot 2 = 598$

№3

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$\frac{21\cdot 20}{2}=210$

$3-\frac{3}{100}$, $3+b\geq -\frac{5}{100}$, $b\geq -\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}+b\leq -\frac{1}{2}$, $b\leq -\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{4}+b\geq -\frac{5}{100}$, $\frac{a}{2}+b\leq -\frac{1}{2}$, $1{,}5a+b\geq 2$

420-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть k – шаг геометрической прогрессии, тогда

$b = ak \qquad c = bk = ak^2$

d – четвёртый член прогрессии

Найдём корни $ax^2 + 2bx + c = 0$

$$x = \frac{\pm\sqrt{4b^2 - 4ac} - 2b}{2a}, \text{ где } b = ak \quad c = ak^2, \text{ тогда}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{4a^2k^2 - 4a^2k^2} - 2ak}{2a} = \frac{\pm\sqrt{0} - 2ak}{2a} = -k$$

Т.к. d – корень этого уравнения, значит $d = -k$

($a, b, c, k \neq 0$, т.к. a, b, c – члены геометрической прогрессии, k – шаг геометрической прогрессии)

Т.к. d – четвёртый член прогрессии, значит $d = ak^3$, значит

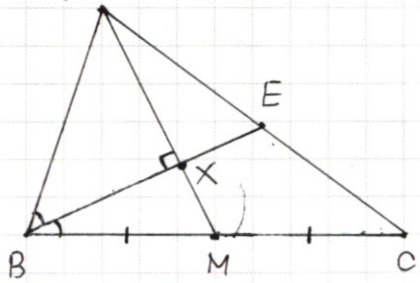
$ak^3 = -k \quad | : k$, т.к. $k \neq 0$

$ak^2 = -1 \qquad$ Т.к. $c = ak^2$, значит $c = -1$

Ответ: $c = -1$ – третий член прогрессии

№2

Найдём необходимые условия существования треугольника, у которого одна из биссектрис перпендикулярна медиане.



Дано:

$\triangle ABC$, AM – медиана

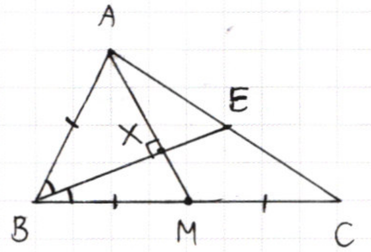
BE – биссектриса $AM \perp BE$

Пусть $AM \cap BE = X$

Рассмотрим ΔABM: в нём BX – высота и биссектриса, значит ΔABM – равнобедренный, значит $AB = BM$, а т.к. AM – медиана, то $BM = \frac{BC}{2}$, значит $AB = \frac{BC}{2}$

Значит любой треугольник у которого медиана и биссектриса перпендикулярны имеет такие две стороны a и b, что $a = 2b$, значит это – необходимое условие.

Теперь докажем, что это также и достаточное условие.



Дано:

ΔABC $BC = 2AB$

AM – медиана BE – биссектриса

Доказать: $AM \perp BE$

AM – медиана, значит $BM = \frac{BC}{2} = AB$, значит ΔABM – р/б, ~~значит~~

Пусть $BE \cap AM = X$, тогда BX – биссектриса в р/б ΔABM, значит BX – высота, значит $BE \perp AM$, значит условие о том, что в треугольнике содержатся стороны a и b такие, что $a = 2b$ является также и достаточным, значит верно, что в треугольнике медиана будет перпендикулярна биссектрисе тогда и только тогда, когда в треугольнике имеются такие две стороны, a и b, что $a = 2b$, значит т.к. по условию периметр равен 1200, то стороны треугольника будут равны a, $2a$, $1200 - 3a$, тогда подходящие наборы сторон:

201, 402, 597

202, 404, 594

⋮

299, 598, 303

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

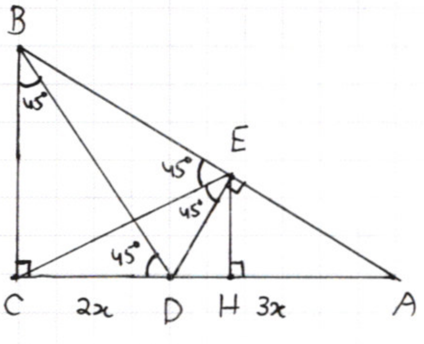
Если $a \leq 200$, то $2a \leq 400$, а $(1200-3a) \geq 600$, тогда сумма двух сторон $a+2a \leq 600 \leq 1200-3a$ меньше либо равна третьей стороне, значит не выполняется неравенство треугольника, значит $a \leq 200$ – не подходит

Если $a \geq 300$, то $2a \geq 600$, а т.к. периметр 1200, то сумма двух других сторон ≤ 600, т.е. снова не выполняется неравенство треугольника, значит $a \geq 300$ не подходит.

Также заметим, что мы не посчитали никакой вариант дважды, значит таких треугольников $299-200=99$

Ответ: всего 99 треугольников.

№4



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный $D \in AC$

$E \in AB$ $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ $DE \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$ $AC = \sqrt{29}$

Найти: $\operatorname{tg} \angle BAC$, S_{CED}

Решение:

$\angle DEB = 90^\circ$, т.к. $DE \perp AB$, значит $\angle BCD + \angle BED = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит $BCDE$ – вписанный, значит $\angle CED = \angle CBD$, а $\angle CEB = \angle CDB$, как вписанные и опирающиеся на одну дугу $\angle CEB = \angle BED - \angle CED = 45^\circ$, тогда в $\triangle BCD$ $\angle CBD = \angle CDB$, значит $\triangle BCD$ – равнобедренный, значит $BC = CD$. Т.к. $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, а $CD = AC - AD$, значит $\frac{CD}{AC} = \frac{2}{5} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \angle BAC$

Значит $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$

Пусть EH – перпендикуляр к AC, тогда $S_{CED} = \frac{CD \cdot EH}{2}$

$BC = AC \cdot tg\angle BAC$

$BC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

По теореме Пифагора в $\triangle ABC$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + \frac{29 \cdot 4}{25}} = \sqrt{\frac{29(25+4)}{25}} = \sqrt{\frac{29^2}{25}} = \frac{29}{5}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ $\quad AD = \frac{3AC}{5} = \frac{3\sqrt{29}}{5}$

В $\triangle ADE$ $\quad DE = AE \cdot tg\angle BAC = \frac{2AE}{5}$, тогда по теореме Пифагора в $\triangle ABC$ $\quad AE^2 + \frac{4AE^2}{25} = AD^2$

$\frac{29\,AE^2}{25} = \frac{9 \cdot 29}{25}$

$AE^2 = 9$, значит $AE = 3$

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle AEH$

$\angle BCA = \angle EHA = 90^\circ$

$\angle A$ – общий, значит $\triangle ABC \sim \triangle AEH$, значит $\frac{EH}{BC} = \frac{AE}{AB}$

$EH = \frac{BC \cdot AE}{AB}$

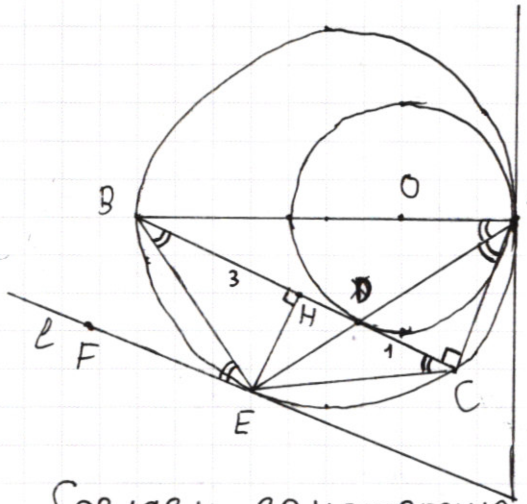
$EH = \frac{2\sqrt{29} \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 29} = \frac{6\sqrt{29}}{29}$, тогда $S_{CED} = \frac{CD \cdot EH}{2}$, где $CD = BC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

$S_{CED} = \frac{6\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{29}}{29 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 29}{10 \cdot 29} = 1{,}2$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$, $S_{CED} = 1{,}2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Дано:

ω, Ω – окружности, касаются в A

AB – диаметр Ω

BC – хорда Ω и касательная к ω

$AD \cap \Omega = E$ $\quad CD = 1 \quad BD = 3$

Найти: r, R, S_{BACE}

Сделаем гомотетию с центром в A так, чтобы ω перешла в Ω, тогда D перейдёт в E, а касательная проходящая через D перейдёт в касательную l проходящую через E. $(F \in l)$

Тогда т.к. при гомотетии прямая переходит в параллельную прямую, то $BC \parallel l$, значит $\angle EBC = \angle BEF$, как накрест лежащие. $\angle EBC$ – вписанный, значит $\angle EBC = \frac{\smile EC}{2}$ $\quad \angle BEF$ – угол между хордой и касательной, значит $\angle BEF = \frac{\smile BE}{2}$, значит $\smile BE = \smile EC$. Тогда $\angle EBC = \angle EAC = \angle BAE = \angle BCE$, как опирающиеся на равные дуги.

AD – биссектриса в ΔABC, значит $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{1}$

$\angle BCA = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр AB, тогда по теореме Пифагора в ΔABC $\quad AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad AB^2 = 4^2 + \left(\frac{AB}{3}\right)^2$

~~AB~~ $AB^2 = 16 + \frac{AB^2}{9} \quad \frac{8AB^2}{9} = 16 \quad AB^2 = 18 \quad AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

AB – диаметр Ω, значит $AB = 2R \quad R = \frac{AB}{2} = 1{,}5\sqrt{2}$

Пусть O – центр ω, тогда $OD = r$ – радиус ω

Тогда $OD \perp BC$, т.к. BC – касательная, значит $\angle ODB = 90^\circ$

Рассмотрим $\triangle BDO$ и $\triangle BCA$

$\angle ABC$ – общий

$\angle BDO = \angle BCA = 90^\circ$, значит $\triangle BDO \sim \triangle BCA$, тогда

$\frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC}$ $\quad OD = \frac{AC \cdot BD}{BC}$, где $AC = \frac{AB}{3}$

$\cancel{OX = \frac{AB \cdot BX}{BC \cdot 3}}$ $\quad \cancel{OX = 3\sqrt{2}}$

$OD = \frac{AB \cdot BD}{3BC} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, значит $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Пусть EH – перпендикуляр к BC

$BE = EC$, как хорды, стягивающие равные дуги $\cup BE$ и $\cup EC$,

тогда $\triangle BEC$ – равнобедренный, где EH – высота, значит EH – медиана,

значит $HC = \frac{BC}{2} = \frac{BD + DC}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$, тогда $HD = HC - CD = 2 - 1 = 1$

Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle EDH$

$\angle EHD = \angle ACD = 90^\circ$

$\angle EDH = \angle ADC$, как вертикальные, значит $\triangle ADC \sim \triangle EDH$, а значит

$\frac{HD}{DC} = \frac{EH}{AC}$, значит $\frac{EH}{AC} = \frac{1}{1}$, т.е. $EH = AC = \frac{AB}{3}$

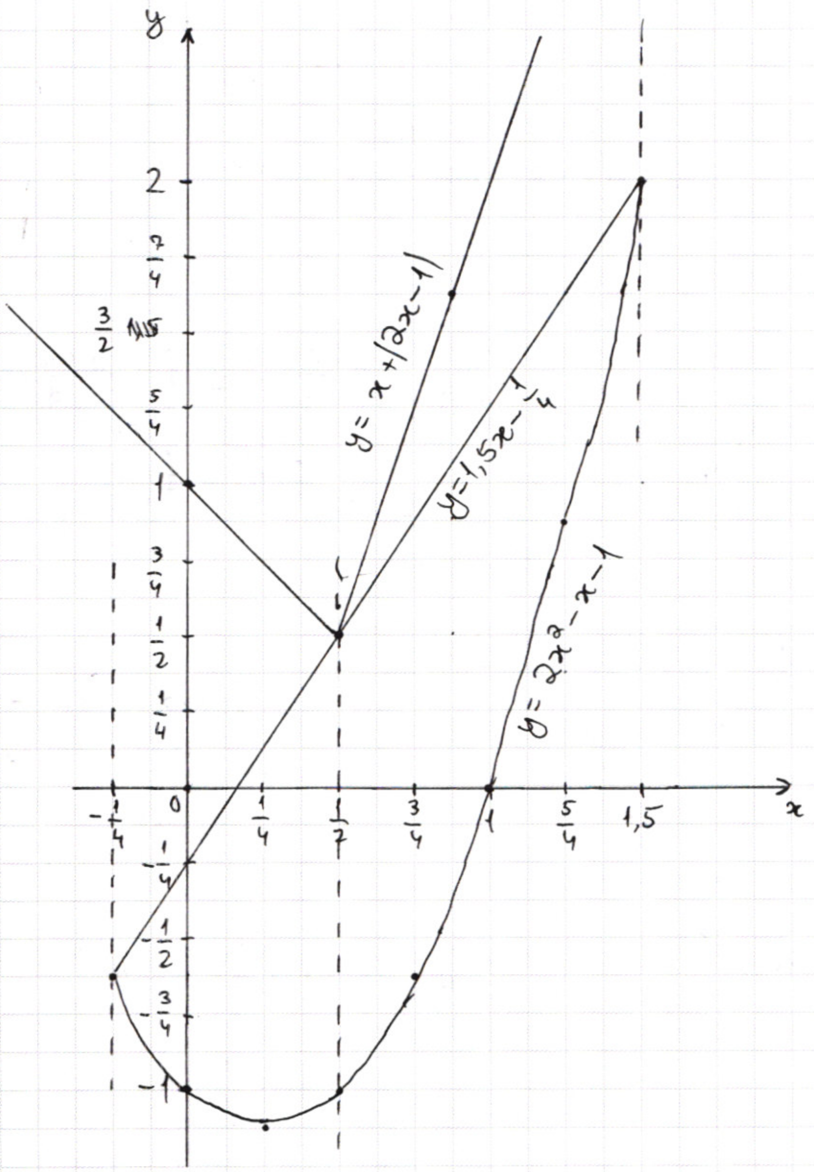
$S_{BACE} = S_{BAC} + S_{BEC} = \frac{BC \cdot AC}{2} + \frac{BC \cdot EH}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: R (радиус Ω) $= 1{,}5\sqrt{2}$, r (радиус ω) $= \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№6

Построим графики $2x^2-x-1$ и $x+|2x-1|$



Т.к. $2x^2-x-1 \leq ax+b \leq x+|2x-1|$ на $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$. – это означает, что график прямой должен быть выше графика $y=2x^2-x-1$, но ниже $y=x+|2x-1|$, тогда пусть $f(x)=ax+b$, тогда

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{4}\right) \geq -\frac{5}{8} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \\ f(1,5) \geq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{a}{4}+b \geq -\frac{5}{8} \\ \frac{a}{2}+b \leq \frac{1}{2} \\ 1,5a+b \geq 2 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2-x-1$

$\frac{-b}{2a}=\frac{1}{4}$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f(7)=3$

$f(11)=5$

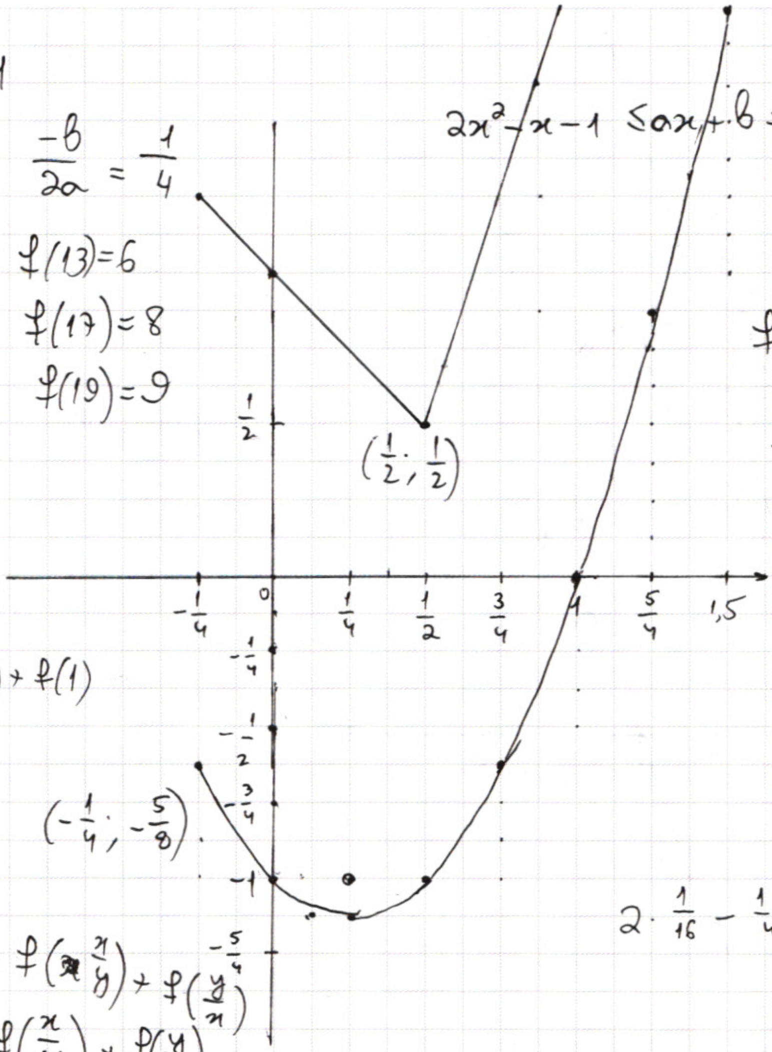
$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

$f\left(\frac{p}{q}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{q}\right)=$

$=f(p)-f(q)$



$f(2\cdot 1)=f(2)+f(1)$

$f(4)=2$

$f(6)=$

$f\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)$

$f(1)=0=f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)$

$x-2x+1=$

$=1-x$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1=$

$=-\frac{1}{8}-1$

$2(1,5)^2-1,5-1=2\cdot 2,25-2,5=4,5-2,5=2$

$2\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{3}{8}-1=\frac{2\cdot 9}{64}-\frac{3}{8}-1=$

$=$

$kx+b$

$-\begin{cases} k\cdot 0,5+b=0,5 \\ k\cdot 1,5+b=2 \end{cases}$

$k=1,5$

$b=-\frac{1}{4}$

$2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1$

$1,5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{-3}{8}-\frac{2}{8}=-\frac{5}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\begin{cases} -\frac{a}{4}+b \geq -\frac{5}{8} \\ \frac{a}{2}+b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a}{4}-b \leq \frac{5}{8} \\ \frac{a}{2}+b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{3a}{4} \leq \frac{9}{8} \Rightarrow a \leq 1,5$

$\begin{cases} 1,5a+b \geq 2 \\ \frac{a}{2}+b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 1,5a+b \geq 2 \\ -0,5a-b \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$a \geq 1,5$, значит $1,5 \leq a \leq 1,5$

$\Downarrow$

$a = 1,5$

$\begin{cases} -\frac{a}{4}+b \geq -\frac{5}{8} \\ \frac{a}{2}+b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{3}{8}+b \geq -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{4}+b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} b \geq -\frac{1}{4} \\ b \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$,

значит $(1,5; -\frac{1}{4})$ – единственная возможно подходящая пара чисел. Из её графика $(y = 1,5x - \frac{1}{4})$ мы видим, что она подходит, значит $(1,5; -\frac{1}{4})$ – единственный ответ

Ответ: $(1,5; -\frac{1}{4})$

№7

Нам известно, что $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(5)=2$, … $f(19)=9$, $f(23)=11$

Также верно, что $f(2\cdot 1) = f(2)+f(1)$, т.е. $f(2)=f(2)+f(1)$, значит $f(1)=0$, значит верно, что $f\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)+f\left(\frac{q}{p}\right)$, т.е. $f\left(\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{q}{p}\right)$. Также верно, что $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)+f\left(\frac{1}{q}\right) =$
$= f(p)-f(q)$, тогда найдём все $f(x)$, где $1 \leq x \leq 21$

$f(1)=0 \quad f(2)=1 \quad f(3)=1 \quad f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=2 \quad f(6)=f(2)+f(3)=2 \quad f(7)=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=3 \quad f(9)=f(3)+f(3)=2$

$f(10)=f(2)+f(5)=3 \quad f(11)=5 \quad f(12)=f(3)+f(4)=3$

$f(13)=6 \quad f(14)=f(2)+f(7)=4 \quad f(15)=f(3)+f(5)=3$

$f(16)=f(8)+f(2)=4 \quad f(17)=8 \quad f(18)=f(9)+f(2)=3$

$f(19)=9 \quad f(20)=f(4)+f(5)=4 \quad f(21)=f(3)+f(7)=4$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \iff f(x)<f(y)$$

Теперь нужно посчитать количество наборов чисел x и y, что $f(x)<f(y)$

$f(x)=0$ – 1 раз

$f(x)=1$ – 2 раза

$f(x)=2$ – 4 раза

$f(x)=3$ – 6 раз

$f(x)=4$ – 4 раза

$f(x)=5$ – 1 раз

$f(x)=6$ – 1 раз

$f(x)=8$ – 1 раз

$f(x)=9$ – 1 раз

Кол-во способов взять $f(x)=0$, а $f(y)=1$ $\quad 1\cdot2=2$

Кол-во способов взять $f(x)=0$, а $f(y)=2$ $\quad 1\cdot4=4$

⋮

Кол-во способов взять $f(x)=1$, а $f(y)=2$ $\quad 2\cdot4=8$

⋮

Кол-во способов взять $f(x)=8$, а $f(y)=9$ $\quad 1\cdot1=1$

Всего $1\cdot2+1\cdot4+1\cdot6+1\cdot4+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+2\cdot4+2\cdot6+2\cdot4+$
$+2\cdot1+2\cdot1+2\cdot1+2\cdot1+4\cdot6+4\cdot4+4\cdot1+4\cdot1+4\cdot1+4\cdot1+6\cdot4+$
$+6\cdot1+6\cdot1+6\cdot1+6\cdot1+4\cdot1+4\cdot1+4\cdot1+4\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1=$
$=182$

Ответ: 182 пары