## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $a, b, c$ – послед. члены геометрической прогрессии $\Rightarrow b^2 = ac$

$ax^2 + 2bx + c = 0$ (при $a=0$, $b=c=0$, получаем то же противоречие)

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0 \Rightarrow x = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ – четвертый член прогрессии

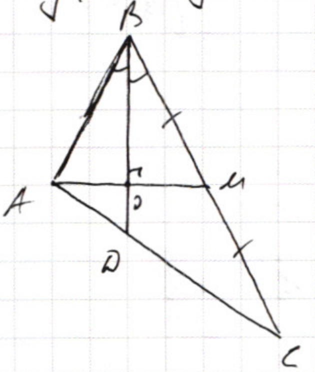
Тогда $c^2 = b\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a} = -\frac{ac}{a} = -c$; $c(c+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-1 \end{array}\right.$

Если $c=0$, то $b^2 = ac = 0 \Rightarrow b=0$. Так как $q \neq 0$, то и $a=0$ ($q$ – знаменатель прогрессии)

~~Тогда это стационар~~ Тогда уравнение $ax^2+2bx+c=0$ имеет бесконечное количество корней. В частности $x=1$ – корень. Но получается, что $1 = x = c\cdot q = 0\cdot q = 0$. Противоречие. Значит, $c \neq 0$.

Ответ: $c=-1$

② Докажем, что наличие у треугольника такой биссектрисы и медианы равносильно тому, что одна его сторона вдвое больше какой-то другой.




а) Пусть дано, что $AM \perp BD$, где $AM$ – медиана, $BD$ – биссектр. $\triangle ABC$

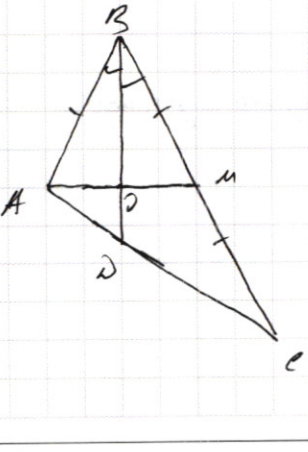
Докажем, что $BC = 2AB$.

1) $AM \cap BD = O \overset{AM \perp BD}{\Rightarrow} BO$ – высота $\triangle ABM$

2) $BO$ – высота и биссектриса $\triangle ABM \Rightarrow \triangle ABM$ – р/б с осн. $AM \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BM$

3) $AM$ – медиана $\Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2BM = 2AB$ ☒




Теперь докажем, что если $BC = 2AB$, то $AM \perp BD$

1) $AM$ – медиана $\Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{2} = AB$

2) $AB = BM \Rightarrow \triangle ABM$ – р/б с осн. $AM \overset{BO\text{ – биссектр.}}{\Rightarrow} BO$ – высота

3) $BO$ – высота $\Rightarrow AM \perp BD$ ☒

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Значит, нам нужно посчитать число треуг. с целочисленными сторонами периметра 1200, у которых есть сторона, вдвое меньшая какой-то другой. Обозначим её длину за $a$. Тогда длины двух других равны $2a$ и $1200-3a$. По нер-ву треуг.

$$\begin{cases} 1200-3a < 3a \\ 2a < 1200-2a \\ a < 1200-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a > 1200 \\ 4a < 1200 \\ 2a < 1200 \end{cases} \Leftrightarrow 200 < a < 300$$

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ 200 < a < 300 \end{cases} \Rightarrow$$ всего есть 99 вариантов выбора $a$ $\Rightarrow$ есть 99 треуг. удовлетворяющих условию (по длине этой меньшей стороны однозначно восст. треуг.)

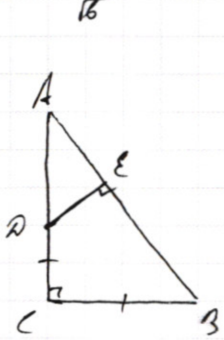
Ответ: 99

③ $$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \underset{b=y-2}{\overset{a=x-1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b \geq 2a \\ 4a^2-4ab+b^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ (4a-b)(a-b)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ 2a^2+b^2=3 \\ \left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=a \\ 3a^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ 18a^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt6} \\ b=\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt6} \\ b=-\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{\sqrt6}{6} \\ b=\frac{2\sqrt6}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=\frac{\sqrt6}{6} \\ y-2=\frac{2\sqrt6}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt6}{6} \\ y=2+\frac{2\sqrt6}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(0;1);\left(1+\frac{\sqrt6}{6};2+\frac{2\sqrt6}{3}\right)\right\}$.

④ 

1) $\angle BCD = \angle BED = 90^\circ \Rightarrow B, C, D, E$ лежат на окр-ти с диаметром $BD$

2) $\angle BEC = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$

3) $\angle BEC = \angle CED = 45^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow BC = CD$

4) $CD = AC - AD = AC - \frac{3}{5}AC = \frac{2}{5}AC$

5) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{2}{5}AC}{AC} = \frac{2}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $AB = \frac{AC}{\cos\angle BAC} = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{tg^2\angle BAC + 1} = \frac{29}{5}$

7) $\sin\angle BAC = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$; $DE = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{\frac{3}{5}AC \cdot \frac{2}{5}AC}{AB} = \frac{\frac{6}{25}\cdot 29}{\frac{29}{5}} = \frac{6}{5}$

8) $CD = \frac{2}{5}AC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

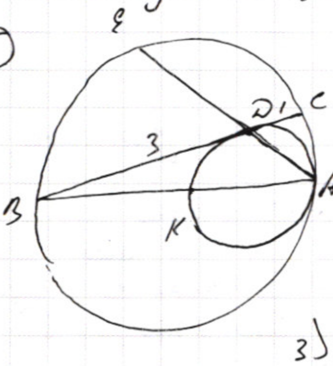
9) $BCDE$ - вписан. $\Rightarrow \angle CDE = 180^\circ - \angle CBA$

10) $S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE = \frac{1}{2} CD \cdot ED \cdot \sin\angle CBA = \frac{1}{2} CD \cdot ED \cdot \cos\angle BAC =$

$= \frac{CD \cdot ED}{2\sqrt{tg^2\angle BAC + 1}} = \frac{\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{5}}{2\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}} = \frac{6}{5}$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; $S_{CDE} = \frac{6}{5}$ кв. ед.

5)




1) $AB \cap \omega = K$, $R$ - радиус $\Omega$, $r$ - радиус $\omega$

2) $\omega$ и $\Omega$ касаются в т. $A$ $\Rightarrow$ $A$ лежит на линии их центров $\xRightarrow{AB\text{-диаметр }\Omega}$ $AB$ - линия центров $\Omega$ и $\omega$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK$ - диаметр $\omega$

3) $\angle ADK = 90^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$ как вписан. углы, опирающиеся на диаметр

4) $BD$ - касательная $\Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \angle AKD$

5) $\angle BAD = 180^\circ - \angle ADK - \angle AKD = 90^\circ - \angle AKD = 90^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \angle ADC - ACD = \angle CAD \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$ - биссектриса $\triangle ABC$

6) $AD$ - биссектриса $\triangle ABC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$. Обозначим $CA = x \Rightarrow BA = 3x$

7) По т. Пифагора для $\triangle ACB$: $4^2 + x^2 = (3x)^2$; $x = \sqrt{2}$

8) $AB = 3x = 2R$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

9) По лемме о касат. и секущей $BD^2 = AB \cdot BK \Rightarrow BK = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

10) $BK = AB - AK = 2R - 2r = 3\sqrt{2} - 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

11) $AD$ - биссектриса $\triangle ABC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC = 3x^2 - 3 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$

12) Хорды $BC$ и $AE$ пересекаются в $D \Rightarrow AD \cdot ED = BD \cdot CD \Rightarrow DE = \sqrt{3}$

13) $\sin\angle ADC = \frac{AC}{\sqrt{AC^2+DC^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

14) $S_{BACE} = \frac{1}{2} BC\cdot AE \cdot \sin\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$

Ответ: радиусы $\Omega$ и $\omega$ равны $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ соотв.; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$ кв. ед.

7) $f(p) = f(1) + f(p) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(a) = f(\frac{a}{b}\cdot b) = f(\frac{a}{b}) + f(b) \Rightarrow f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$

Докажем по индукции, что $f(p^{\alpha}) = \alpha f(p)$, $\alpha \geq 1$

~~Ба~~ База: $\alpha = 1$ : $f(p) = f(p)$ верно

Шаг: если для $\alpha = k$ верно, то для $\alpha = k+1$ тоже

Док-во: $f(p^{k+1}) = f(p\cdot p^k) = f(p) + f(p^k) = f(p) + k f(p) = (k+1) f(p)$ ☑

Тогда для каждого натурального $m$, чье разложение на простые выглядит как $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Мы можем посчитать значение $f(m)$: $f(m) =$
$= f(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(p_i)$.

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$, т.к. $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Посчитаем значение функции во всех натуральных числах от 1 до 21 включительно

| $n$ | $f(n)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 2 |
| 6 | 2 |
| 7 | 3 |
| 8 | 3 |
| 9 | 2 |
| 10 | 3 |
| 11 | 5 |
| 12 | 3 |
| 13 | 6 |
| 14 | 4 |
| 15 | 3 |
| 16 | 4 |
| 17 | 8 |
| 18 | 3 |
| 19 | 9 |
| 20 | 4 |
| 21 | 4 |

| $f(n)$ | $N(f(n))$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 4 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |
| 8 | 1 |
| 9 | 1 |

$N(f(n))$ — количество натуральных чисел от 1 до 21 включительно, значение функции в которых равно $f(n)$.

~~Тогда наше искомое количество способов равно количеству способов~~

Теперь мы можем посчитать количество способов выбрать 2 числа от 1 до 21 так, чтобы значение функции от второго числа ~~приятного было~~ было больше значения функции от первого.

$A = 1\cdot(\overbrace{2+4+6+4+1+1+1+1}^{20}) + 2\cdot(\overbrace{4+6+4+1+1+1+1}^{18}) +$
$+ 4(\overbrace{6+4+1+1+1+1}^{14}) + 6(\overbrace{4+1+1+1+1}^{8}) + 4(1+1+1+1) + 1(1+1+1) + 1(1+1) + 1\cdot 1 =$
$= 20 + 36 + \overbrace{56 + 48 + 16}^{70} + 3 + 2 + 1 = 182$

Ответ: 182

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\forall x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]: 2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b$ ; $2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0$

$f(x) = 2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0$ при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$\Updownarrow$ $2>0 \Rightarrow$ ветви напр. вверх

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{4}) \le 0 \\ f(\frac{3}{2}) \le 0 \end{cases}$$

$ax + b \le x + |2x-1|$

1) $-\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$

$ax + b \le x + 1 - 2x$

$g(x) = (a+1)x + (b-1) \le 0$ на $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} g(-\frac{1}{4}) \le 0 \\ g(\frac{1}{2}) \le 0 \end{cases}$$

2) $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

$ax + b \le x + 2x - 1$

$h(x) = (a-3)x + (b+1) \le 0$ на $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

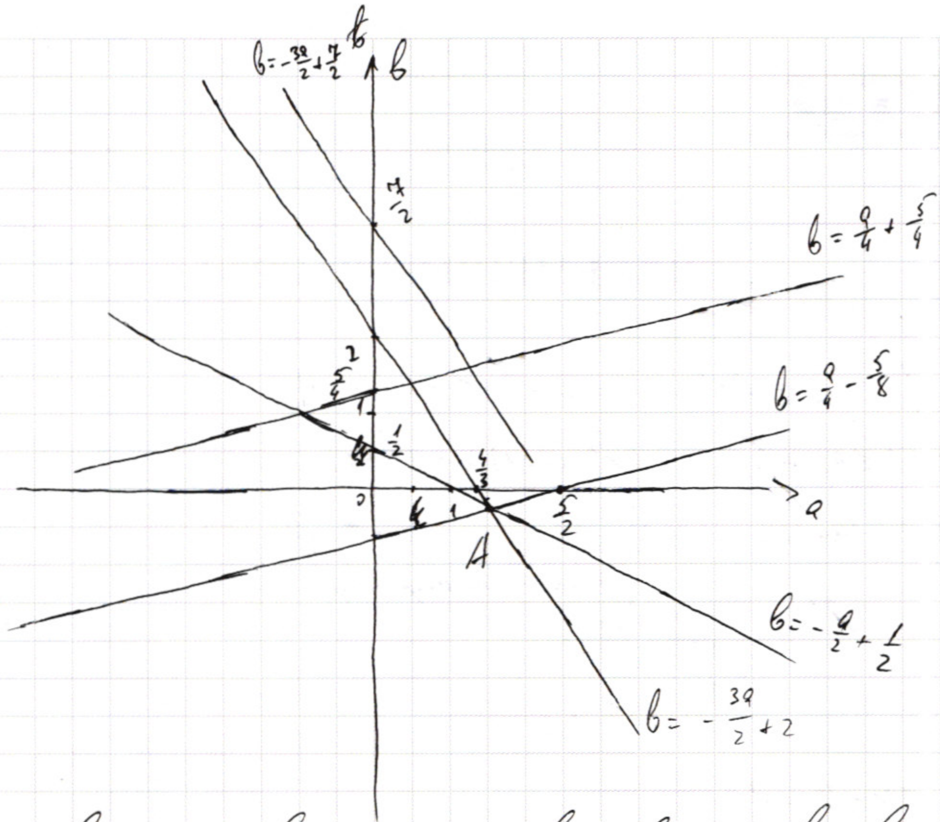
$\Updownarrow$

$$\begin{cases} h(\frac{1}{2}) \le 0 \\ h(\frac{3}{2}) \le 0 \end{cases}$$

Итого исходное двойное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{4}) \le 0 \\ f(\frac{3}{2}) \le 0 \\ g(-\frac{1}{4}) \le 0 \\ g(\frac{1}{2}) \le 0 \\ h(\frac{1}{2}) \le 0 \\ h(\frac{3}{2}) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} - b - \frac{5}{8} \le 0 \\ -\frac{3}{2}a - b + 2 \le 0 \\ -\frac{a}{4} + b - \frac{5}{4} \le 0 \\ \frac{a}{2} + b - \frac{1}{2} \le 0 \\ \frac{a}{2} + b - \frac{1}{2} \le 0 \\ \frac{3a}{2} + b - \frac{7}{2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge \frac{a}{4} - \frac{5}{8} \\ b \ge -\frac{3a}{2} + 2 \\ b \le \frac{a}{4} + \frac{5}{4} \\ b \le -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \\ b \le -\frac{3a}{2} + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Решим систему графически в координатах $(a;b)$




Из графика видно, что всем 5 неравенствам удовлетворяет только точка A. Из графика её координаты примерно равны $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Проверим эти числа.

$-\frac{1}{4} \geq \frac{\frac{3}{2}}{4} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{4}$ верно

$-\frac{1}{4} \geq -\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$ верно

$-\frac{1}{4} \leq \frac{\frac{3}{2}}{4} + \frac{5}{4} = \frac{13}{8}$ верно

$-\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ верно

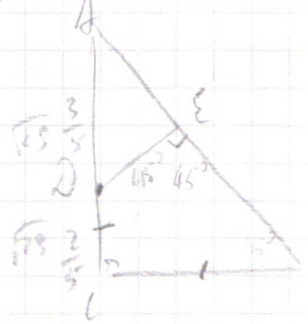
$-\frac{1}{4} \leq -\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{5}{4}$ верно.

Значит $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ — единственное решение системы.

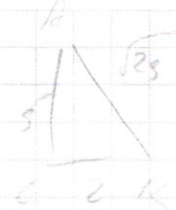
Ответ: $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

4)



$tg\angle BAC = \frac{2}{5}$



$$\frac{\sqrt{29}\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{29}\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{DE}{\sqrt{29}\cdot\frac{2}{5}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{5DE}{2\sqrt{29}} \qquad DE = \frac{6}{5}$$

$$\sin CDE = \cos BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{a+1}{4} - b - 1 = \frac{a}{4} - b - \frac{5}{8}$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3a+3}{2} - b - 1 = -\frac{3}{2}a - b + 2$$

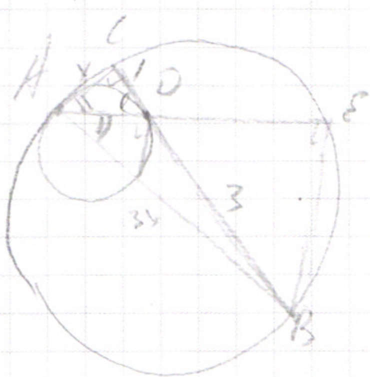
$$-\frac{a+1}{4} + b - 1 = -\frac{a}{4} + b - \frac{5}{4}$$

$$\frac{a+1}{2} + b - 1$$

$$\frac{a-3}{2} + b + 1$$

$$\frac{3a-9}{2} + b + 1 = \frac{3a}{2} + b - \frac{7}{2}$$

5)



$b \geq \frac{a}{4} - \frac{5}{8}$

$b \geq -\frac{3a}{2} + 2$

$b \leq \frac{a}{4} + \frac{5}{4}$

$b \leq -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}$

$b \geq -\frac{3a}{2} + \frac{7}{2}$

$2\sqrt{2}x = 4, \quad x = \sqrt{2}$

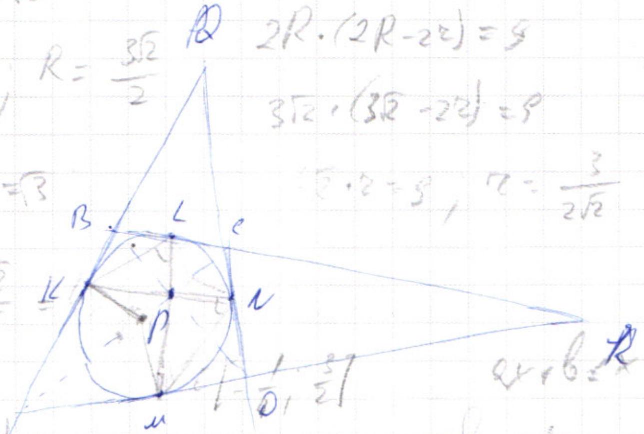
$2R = 3x = 3\sqrt{2}, \quad R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$2R\cdot(2R - 2r) = 9$

$3\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2} - 2r) = 9$

$l^2 = 3x^2 - 3 = 3 \quad l = \sqrt{3}$

$\sqrt{2}\cdot r = 3, \quad r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$



$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

6) $2x^2 - x - 1 \leq ax + b$

$f(x) = 2x^2 - (a+1)x - (b+1) \leq 0$

$\begin{cases} f(-\frac{1}{4}) \leq 0 \\ f(\frac{3}{2}) \leq 0 \end{cases}$

$ax + b \geq x + |2x - 1|$

$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (a-3)x + (b+1) \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (a+1)x + (b-1) \leq 0 \end{cases}$

$\cancel{f(\frac{1}{p}) + f(p) = f(1)}$ $\quad f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(p_i)$

7) $f(1) + f(p) = f(p) \Rightarrow f(1) = 0$ $\quad f(\frac{1}{p}) + f(p) = f(1) \Rightarrow f(\frac{1}{p}) = -f(p) \quad f(p^\alpha) = \alpha f(p)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

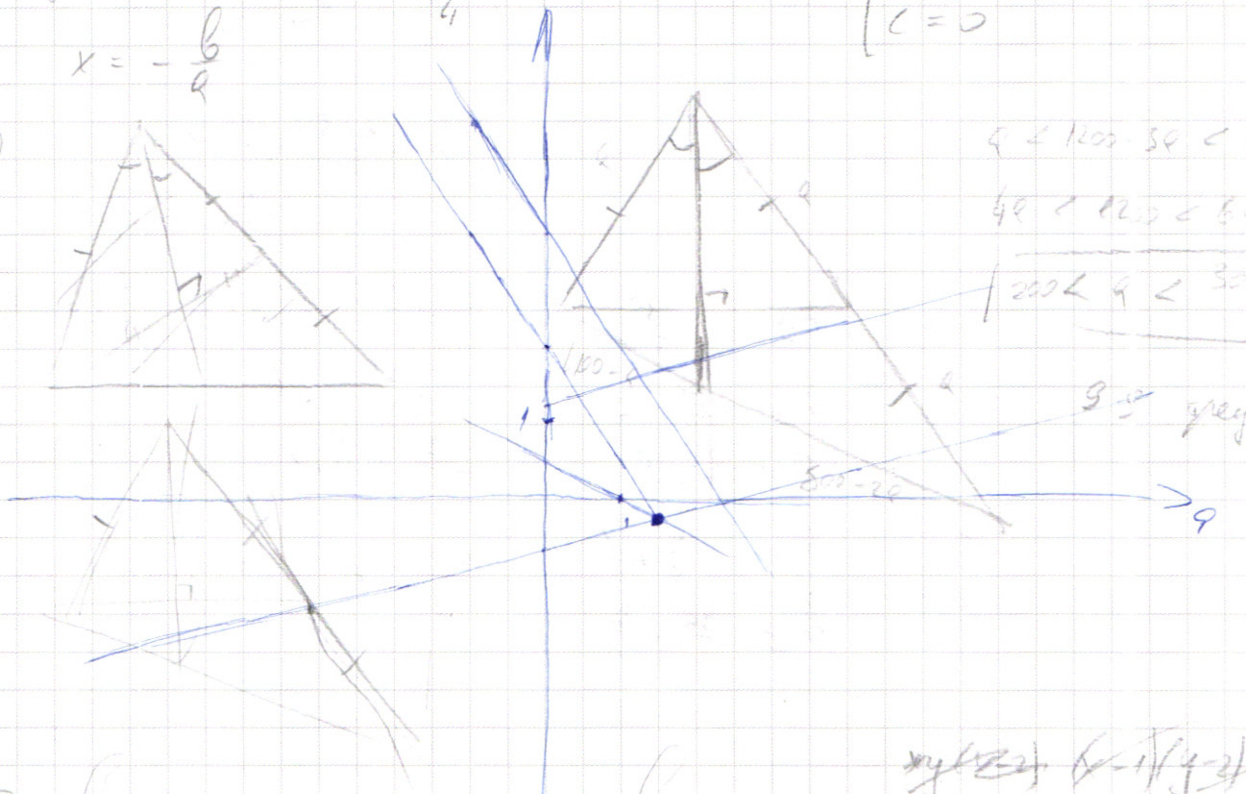
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $b^2=ac$ $\qquad a, b, c, -\frac{b}{a}$ $\qquad c^2=-\frac{b^2}{a}=-c$

$ax^2+2bx+c=0$ $\qquad \frac{D}{4}$ $b^2-ac=0$ $\qquad \left[\begin{array}{l} c=-1 \\ c=0 \end{array}\right.$

$x=-\frac{b}{a}$

2)



$a<1200-3a<5a$

$4a<1200<6a$

$\boxed{200<a<300}$

3) $\begin{cases} y\geq 2x \\ y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ 4x^2+y^2+2x+y-5xy=2 \end{cases}$

$\cancel{xy+2x-2}$ $(x-1)(y-2)=(y-2x)^2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4=3$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \underset{b=y-2}{\overset{a=x-1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} b\geq 2a \\ 4a^2+b^2-4ab=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$

$\cancel{4a^2+b^2-5ab=2a^2-5ab+3}=6-b^2-5ab=0$

$4a^2-5ab+b^2=0 \qquad (4a-b)(a-b)=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)