МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $b = aq$

$c = aq^2$

$d = aq^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$\frac{x^2}{q^2} + 2\frac{x}{q} + 1 = 0$

пусть $\frac{x}{q} = t$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$(t+1)^2 = 0$

$t = -1$

$\frac{x}{q} = -1$

$x = -q = d$

$-q = aq^3$

$-1 = aq^2 = c$

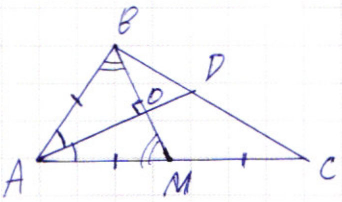
Ответ: -1

2.

$\triangle AOB = \triangle AOM$ (по 2 углам и стороне)

$\Downarrow$

$\angle ABM = \angle AMB$, $AB = AM$



$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (по св-ву бис.)

пусть $AB = x$, $AC = 2x$, $BD = y$, $DC = 2y$

$\left.\begin{array}{l} 3x+3y = 1200 \Leftrightarrow x+y = 400 \\ 3x > 3y \text{ (из неравенства } \triangle) \end{array}\right\} \Rightarrow x > 200$

$3y + x > 2x$ (из неравенства $\triangle$)

$1200 - 2x > 2x$

$300 > x$

$300 > x > 200$; $600 > 3y > 300$ $\quad x \neq 3y$

одинаковых $\triangle$ не будет

x может принять 99 знач. (от 201 до 299), причём другие стороны будут целыми.

Ответ: 99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

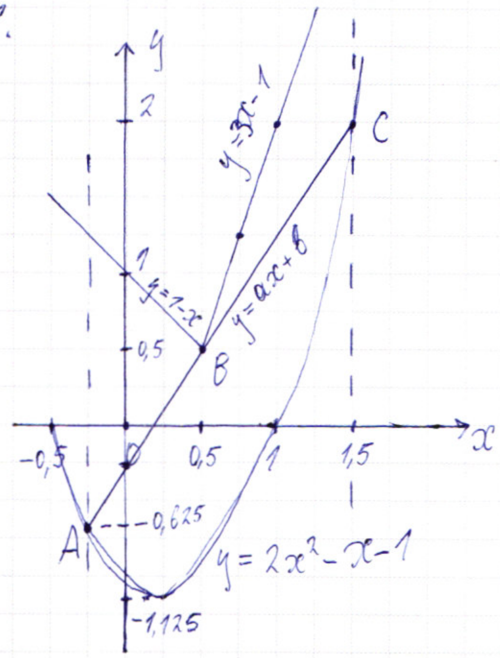
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$x+|2x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1, \text{ при } x \geq 0,5 \\ 1-x, \text{ при } x < 0,5 \end{cases}$

$2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+0,5)$

график $y=ax+b$ - прямая

$A(-0,25; -0,625)$, $B(0,5; 0,5)$, $C(1,5; 2)$

$\frac{2-0,5}{1,5-0,5} = \frac{0,5-(-0,625)}{0,5-(-0,25)} \Rightarrow A, B$ и C

лежат на одной прямой.

Заметим, что при изменении a или b прямая $y=ax+b$ будет пересекать график $y=x+|2x-1|$ в двух точках (т.е. при некоторых x $(ax+b) > (x+|2x-1|)$) или пересекать график $y=2x^2-x-1$ ~~(т.е~~, кроме точек A и C (т.е. при некоторых x $(ax+b) < (2x^2-x-1)$). Значит a и b единственны.

При $x=0$ $y=b=-0,25$

$0,5 = a \cdot 0,5 - \cancel{0,5}$ $0,25$ (в точке B)

$a=1,5$

Ответ: $1,5; -0,25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

7. $f(2) = [2/2] = [1] = 1$

$f(3) = 1$

$f(1) = f(2\cdot 1) - f(2) = 0$

$f(p_1) = a_1$

$f(p_2) = a_2$

при $p_1 > p_2$, $a_1 \geqslant a_2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) - f(2) = -1$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right) - f(3) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ при $f(y) > f(x)$

$f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(5)=2$; $f(7)=3$; $f(11)=5$; $f(13)=6$; $f(17)=8$; $f(19)=9$. ~~Если число можно представить в виде произведения двоек и троек, то f от этого числа ↑~~

$f(4)=2$; $f(6)=2$; $f(8)=3$; $f(9)=2$; $f(10)=3$; $f(12)=3$; $f(14)=4$; $f(15)=3$; $f(16)=4$; $f(18)=3$; $f(20)=4$; $f(21)=4$

при $x=1$, y может принимать 20 значений (чтобы $f(y)>f(x)$)

при $x=2$, y м. п. 18 зн., столько же при $x=3$

~~при $x=3$, при $x=5$ или $x=4$ или $x=$~~ при $f(x)=2$, y м.п. 14 зн. (таких x 4)

при $f(x)=3$, y м.п. 8 зн. (таких x 6)

при $f(x)=4$, y м.п. 4 зн. (таких x 4)

при $f(x)=5$, y м.п. 3 зн. (таких x 1)

при $f(x)=6$, y м.п. 2 зн.
при $f(x)=8$, y м.п. 1 зн.
при $f(x)=9$, y м.п. 0 зн.
} - по одному x

$20+18+14\cdot 4+8\cdot 6+$
$+4\cdot 4+3\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0=$
$=164$

Ответ: 164

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$d_1 = a$

$d_2 = b = aq$

$d_3 = c = aq^2$

$d_4 = aq^3$

$c - ?$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$t = \frac{x}{q}$ $\frac{x}{q}$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$(t+1)^2 = 0$

$t = -1$

$\frac{x}{q} = -1$ $\qquad x = -q = d_4 = aq^3$

$-q = aq^3$

$-1 = aq^2 = c$

200 400 600

$f(x/y) = f(1)$

при $y = x$

$2x_1$ $4x_1$

x_1 $2x_1$ $3y_1$

Ответ: -1

$P = 1200$

$2x < x + 3y$

$= 1200 - 2x$

240

480

~~$600 > x > 300$~~

~~$400 > x > 200$~~

от 200 до 300 (искл.) $33 : 3 \Rightarrow$ 33

$4x < \cancel{x+}1200$

~~$3x < 1200$~~

$x < 300$

$y \in \mathbb{N}$

~~$2x > 400$~~

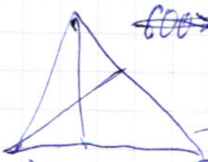
~~$x < 200$~~

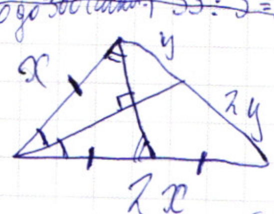
$\boxed{300 > x > 200}$

$600 > 3y > 300$

~~$200 > y > 100$~~

$600 > 2x > 400$





99

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2x\geq 0$

$xy-2x-y+2\geq 0$

$\frac{1{,}125}{0{,}75}$

$\cancel{0{,}25}$

$4x^2+y^2-4xy = xy-2x-y+2$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\frac{2-0{,}5}{1{,}5-0{,}5}=\frac{0{,}5+0{,}625}{0{,}5+0{,}25}$

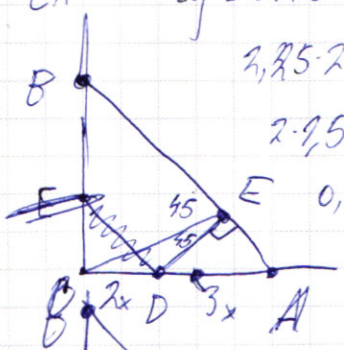
$2(-0{,}25)^2+0{,}25-1=$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$(2x^2+6x-5)+5y(1-x)$

$0{,}125+0{,}25=0{,}375$ $\quad +0{,}625$

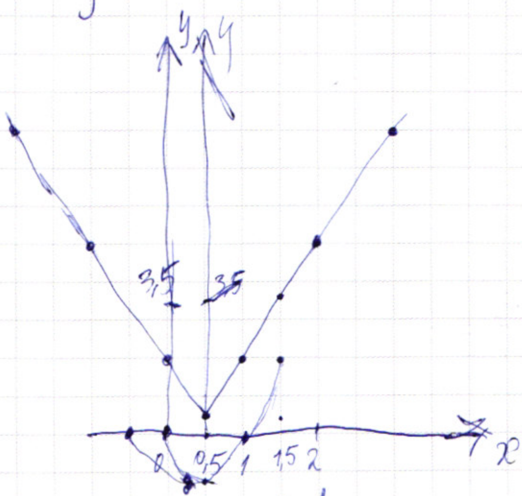
$\frac{BC}{CA}=tg\angle BAC-?$

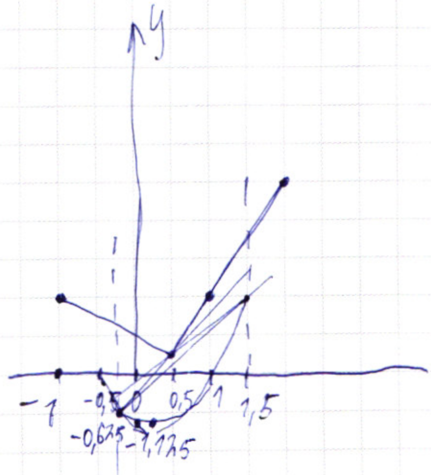


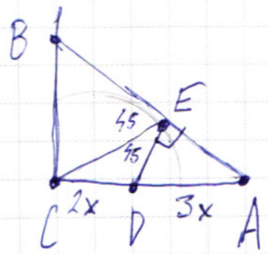
$2{,}25\cdot 2=4{,}5$

$2\cdot 1{,}5^2-1{,}5-1$

$0{,}5$







$2\cdot 0{,}25^2-0{,}25-1=$

$=0{,}125-0{,}25-1$

$=-1{,}125$

$x+|2x-1|$ при $x\geq 0{,}5$

$3x-1$ при $x<0{,}5$

$1-x$ $\quad D=1+8$ $\quad x\neq 0$

$\frac{+1\pm 3}{4}=+1$ или $0{,}5$

$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+|2x-1|$ $\quad a=tg=1{,}5\Rightarrow$

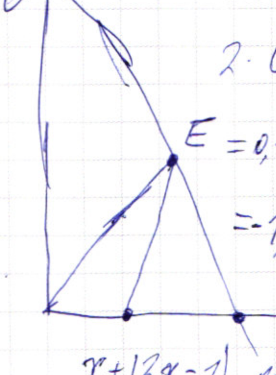
$x\in[-0{,}25;1{,}5]$

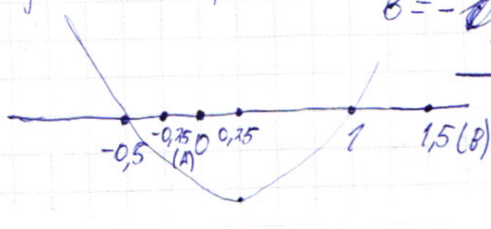
$tg=1{,}5$ $\quad tg\frac{4{,}5}{3}=1{,}5$

$b=-0{,}25$

$2(-0{,}25)^2$

$1{,}5\cdot 0{,}25-0{,}25$





$2x^2-x-1=2(x-1)(x+0{,}5)$

черновик ☑ чистовик ☐ Страница №__

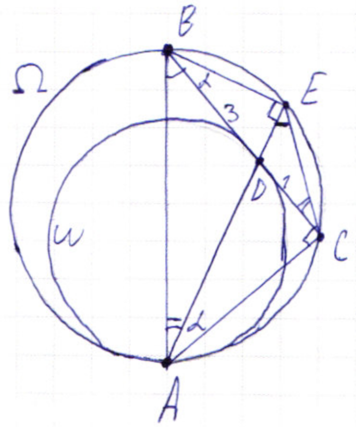
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ (т.к. опир. на диаметр)

$\triangle \Leftrightarrow \angle 1$

$\triangle \Leftrightarrow \angle 2$

$2\cdot 90^\circ + 2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\alpha = 360^\circ$

$\angle 1 + \angle 2 + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \angle BDA = \alpha + 90^\circ$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$4x^2+y^2-4xy = xy-2x-y+2$

$\boxed{4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0}$

$6x^2+2y^2-5xy-2x-3y+3-2=0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$\cancel{D=25y^2}$

$(2x+y)^2+(2x+y)+xy-2=0$

$a^2+a+b-2=0$

$\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}$

$\sqrt{4-2\sqrt{2}\cancel{+}2\sqrt{2}+2}$

$2x^2-4x+3=0$

$y=\sqrt{-y+2}$

$y^2=-y+2$

$y^2+y+2=0$

решен. нет

$\cancel{-2=4x^2+2x=0}$

$4x^2+2x-2=0$

$2x^2+x-1=0$

$D=\sqrt{8}$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{8}}{4}$

1; 3

$3-2=\sqrt{3-2-3+2}$

$-1 \quad 1$

$\cancel{-1+2=\sqrt{-1+2-1+2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $a>0, b>0 \in Q$

$f(1) = f(2\cdot 1) - f(2) = 0$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$ p-простое

$f(2) = 1$

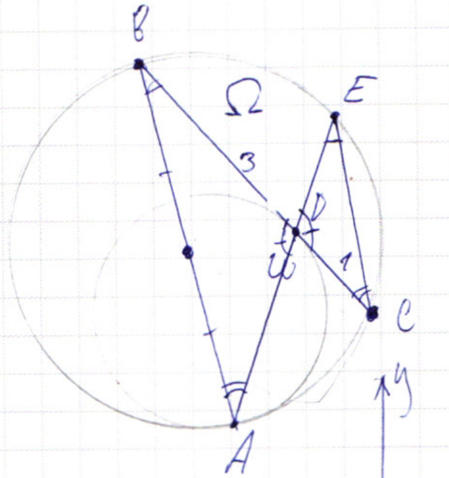
$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$1 \le x \le 21$

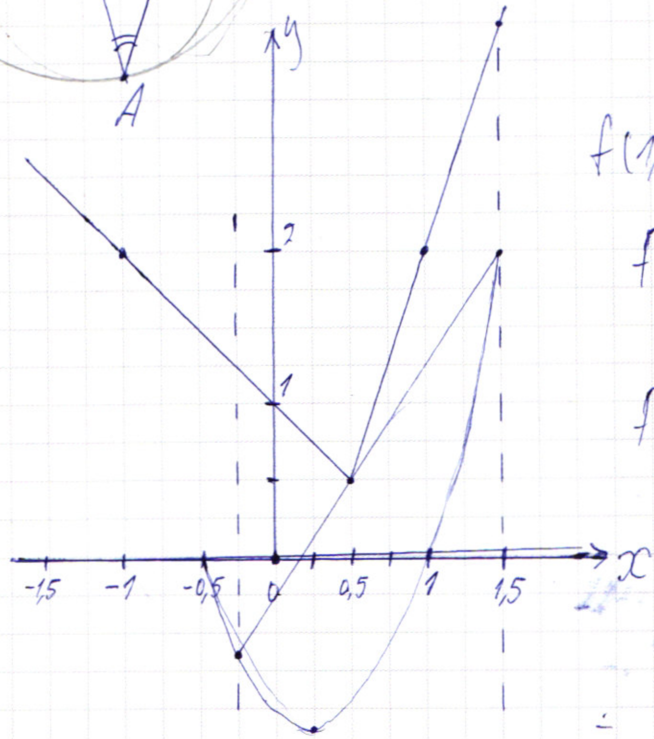
$1 \le y \le 21$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$



$f(0,5) = f(2\cdot 0,5) - f(2) = -1$

f(2) = 1
3 = 1
4 = 2
5 = 2
6 = 2
7 = 3
8 = 3
9 = 2
10
11 = 5
12
13 = 6
14
15
16 = 4
17 = 8
18
19 = 9
20
21



$f(1,5) = f(2\cdot 1,5) - f(2) = 0$

$f(x/y) < 0$ при $x<y$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right) - f(3) = 0$

$= 38 + 56 + 48 +$
$+ 16 + 3 + 2 + 1$

$38 + 56 + 70 = 108 + 56 = 164$

$22 + 48 = 70$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)