МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$(x^2-12xy+36y^2)-36y^2+12xy$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6y)^2-36y^2+12xy-12x-4y+2y^2+20=0$ $\quad -34y^2+12xy-12x-4y+20$

$(x-6y)^2 = xy-6y-x+6.$

$x^2-12xy+36y^2 = xy-6y-x+6.$

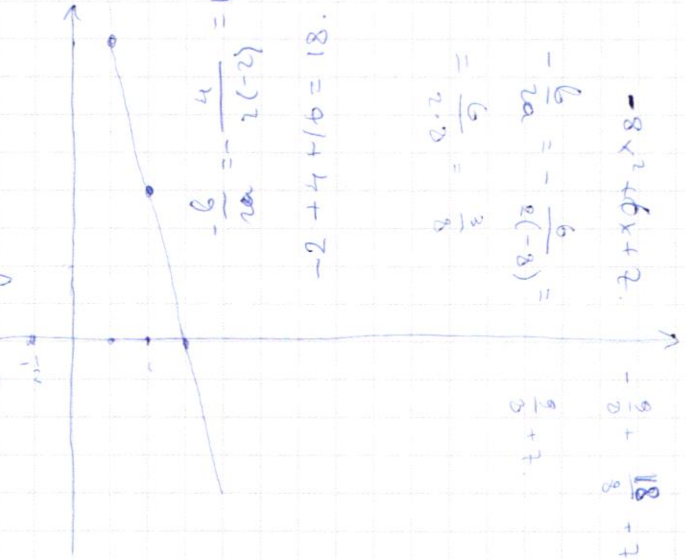
$x^2-12xy+36y^2+12xy-36y^2$

$(x^2-12x+36)-36+2y^2-4y+20=0$

$(x-6)^2+(2y^2-4y-16)=0.$

$(x-6)^2=-2y^2+4y+16.$

$-2+4+16=18.$



$2x-1\geq 0 \quad x\geq\frac{1}{2}.$ $\quad 3x-6(2x-1)=3x-12x+6.=-4x+6.$

$x<\frac{1}{2}$ $\quad 3x+6(2x-1)=3x+12x-6= \quad -4\cdot\frac{1}{2}+6$

$=20x-6.$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$(x-6y)^2 = xy-6y-x+6.$

$x^2+2y^2-14x+3y+20+2(x-6y).$

x^2+2y^2

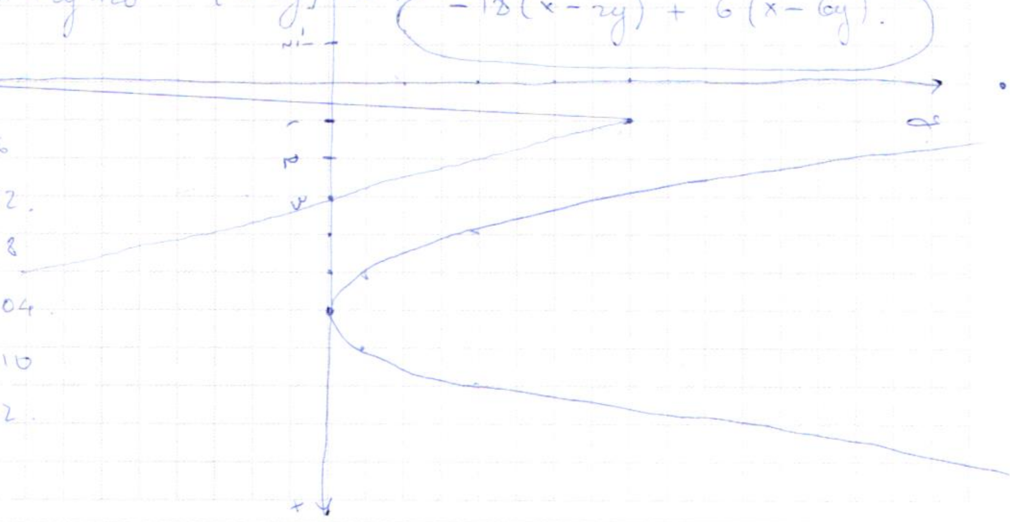
$-15+14 \quad -16+20.$

$x^2+2y^2-13x+x-6y+2y+20.=0.$ $\quad -17+26$

$-18+32.$

$x^2+2y^2-13x+2y+20+(x-6y)=0.$ $\quad -18(x-2y)+6(x-6y).$

$-19+38$	$-27+36$
$-20+44$	$-28+92.$
$-21+50$	$-29+98$
$-22+56.$	$-30+104.$
$-23+62$	$-31+110$
$-24+68.$	$-32+112.$
$-25+74$	
$-26+80.$	



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1|$, $x \geq \frac{1}{2}$.

$8x - 12x + 6 = -4x + 6 \leq ax + b$.

$\boxed{a+b \geq 2;\quad b + \frac{1}{2}a \geq 4}$

$20x - 6 \leq ax + b$.

$(a+4)x + (b-6) \geq 0$

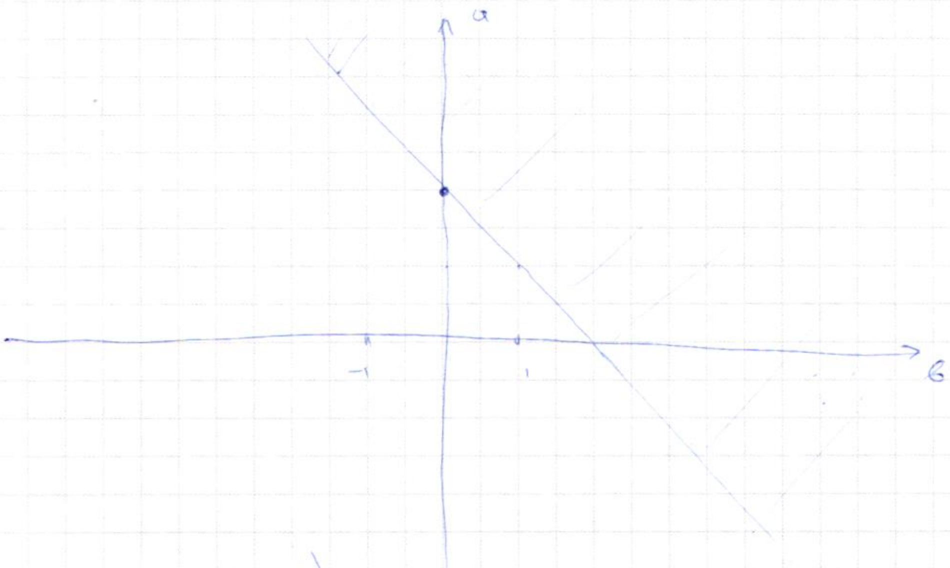
$a + 4 + b - 6 \geq 0$

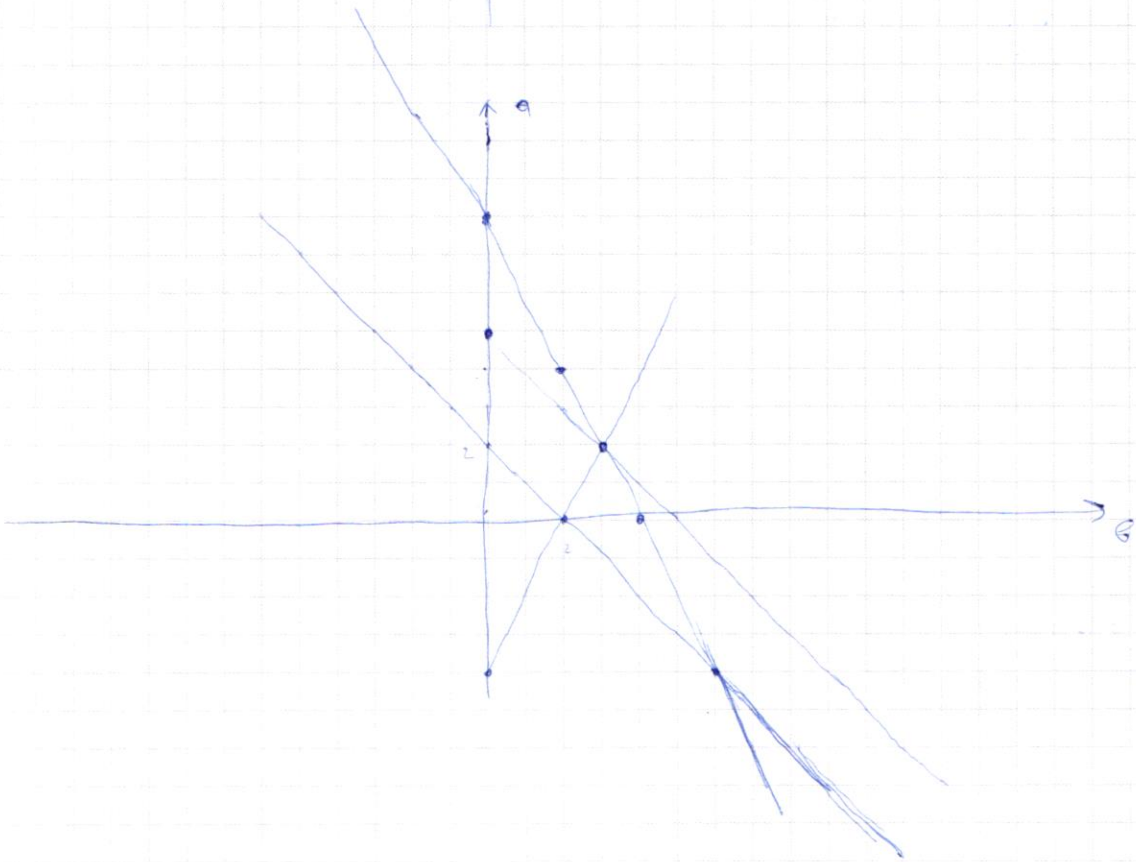
$a + b \geq 2$

$-\frac{1}{2}(a+4) + b - 6 \geq 0$

$-\frac{1}{2}a - 2 + b - 6 \geq 0$

$b + \frac{1}{2}a \geq 4$.





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a,\ b,\ c$

$a\quad ka,\quad k^2a.$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$ax^2 -$

$ax^2 - 2kax + k^2a = 0.$

$a = 0 \Rightarrow c = 0$

$a \neq 0$ $\quad k^2 - 2kx + x^2 = 0$ $\quad \underbrace{k^2 - 2kx + x^2}_{(k-x)^2} = 0$ $\quad x = k$

$k^3 a = k.$ $\quad k^2 a = 1$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 70 = 0 \end{cases}$$

$(x^2 - 12x) + (2y^2 - 4y) + 70 = 0$

$x^2 - 2\cdot 6x \qquad 2y^2 - 2\cdot 2y + 1.$

$x^2 - 12x + 36 - 36 + 2y^2 - 4y + 1 - 1 + 70 = 0$

$(x-6)^2 + (\sqrt{2}y - 1)^2 = 17.$

$2y^2 - 4y + 1.$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$20 - 37 = -17$

$\sqrt{16x^2 - 4x^2} =$

$= x\sqrt{12}$

$AB^2 = x^2 + (4x)^2 - 2\cdot x \cdot 4x \cdot \cos\angle ADB$

$\dfrac{S_{DCE}}{S_{ACB}} = \dfrac{AE}{AB}.$

$y(13x + 10y) = 13xy + 10y^2.$

$(100-1)^2$

$-5 + 7 + \frac{a}{2} - b > 0$

$\frac{a}{2} - b > -2$

$13\cdot 99 = 9\cdot 11\cdot 13 =$

$70 + 7\cdot 8$

$70 + 56$

108

18

99^2

$00 + 6\cdot 8 \over 48$

1225 + 169 = 1394

13 · 13

35 · 35 = 175 + 1050 = 1225

18 · 18 = 144 + 180 = 324

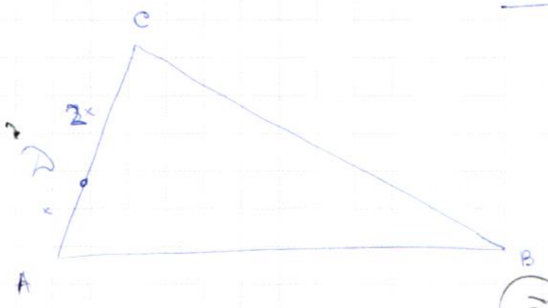
1394 : 18

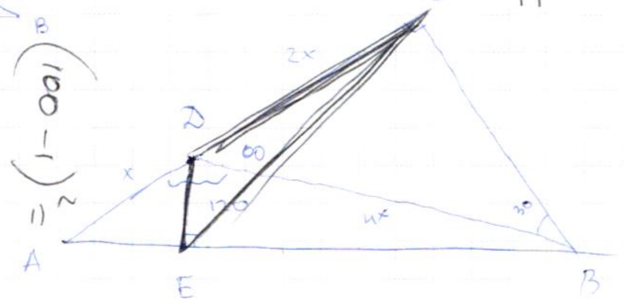
162

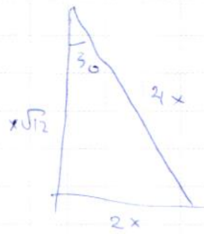
162 · 11 =

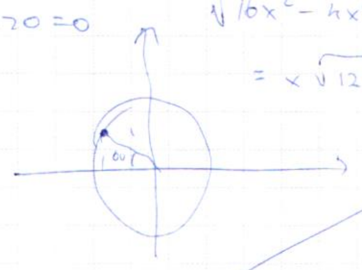
90 + 72 = 162

18 · 9 =









☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

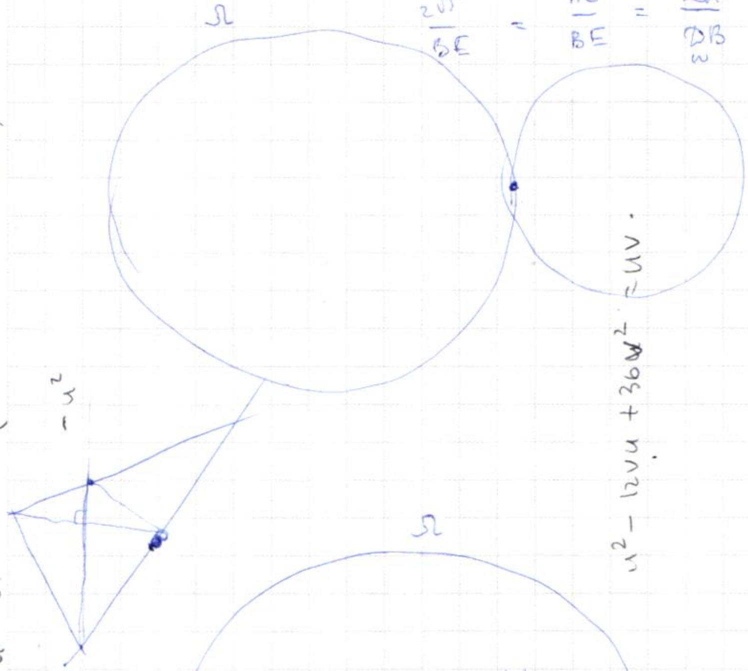
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-\frac{1}{2}a \geq -b-16$ $\qquad$ $\frac{1}{2}a \leq b+16$ $\qquad$ $a \leq 2b+32$

AC

$\frac{2\sqrt{5}}{BE} = \frac{AC}{BE} = \frac{DA}{DB} = \frac{DA}{3}$



$\sqrt{BE^2 + ED^2} = 3.$

$BE^2 + ED^2 = 9.$

$ED \cdot EA + ED^2 = 9.$

$\frac{BA}{AC} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $ED(EA + ED) = 9.$

$BA = \frac{3}{2} AC$

$DE \cdot DA = DC \cdot DB.$

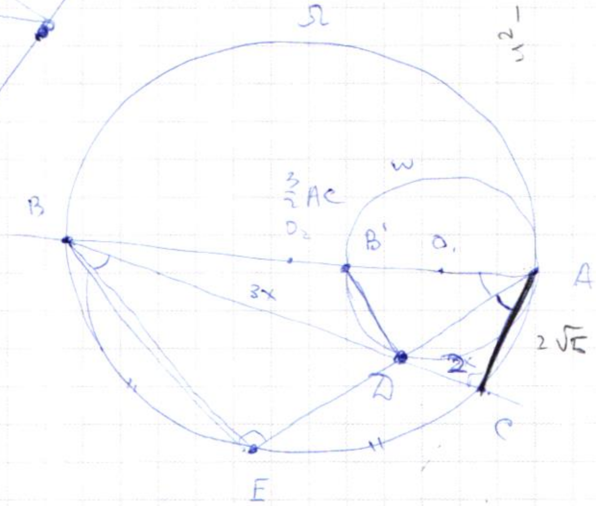
$BB' \cdot BA = BD^2.$

$BB'^2 + BB' \cdot B'A.$

$BE^2 = ED \cdot EA.$

$24 = 4 \cdot 6$

$BA : AC = 3 : 2.$



$\frac{ED}{BE} = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{\frac{3}{2}AC} = \frac{2}{AC}.$

$AB' \cdot AB.$

$\frac{ED \cdot EB}{ED \cdot EA}$

$\left(\frac{AD}{AE} - ?\right)$

$\sqrt{\left[\left(\frac{3}{2}AC\right)^2 - AC^2\right]} = 5x$

$\sqrt{\frac{9}{4}AC^2 - AC^2} = AC\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = AC\sqrt{\frac{5}{4}} = AC\frac{\sqrt{5}}{2} = 5x$

$AC = \frac{2 \cdot 5x}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}x.$

$\frac{2\sqrt{5}}{BE} = \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{DE}$ $\qquad$ $\frac{DE}{BE} = \frac{3}{AB}.$

$\frac{BE}{DE}$

$u^2 + 2uv + v^2 - 2(u^2 - 12uv + 36v^2) - 18 = 0.$

$-u^2$

$u^2 - 12uv + 36v^2 = uv.$

$u^2 - 2uv + v^2 + 2uv$

$(u+v)^2 - 2(u-6v)^2 - 18 = 0.$

$u^2 + 2uv$

$u^2 + uv + v^2 =$

$= u(u+v) + v^2$

$(100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9800 + 1$

$9801.$

$1394 \cdot 2 = 2788$

$4 \cdot 1394$

$9801 - 6176 = 3625$

$1394 \cdot 4 = 6176$

☑ черновик $\qquad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 3.~~

$(x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6. = y(x-6) - (x-6) = (x-6)(y-1).$

$x(x-6) - 6x + 2y^2 - 4y + 20 = 0.$

$x(x-6) - 6x + 36 - 16 + 2y^2 - 4y = 0$

$x(x-6) - 6(x-6) = (x-6)^2$ $\quad (x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$

$(y^2 - y) \quad 2y(y-1)$

$2y^2 - 4y - 16 = 2y(y-1) - 2y - 16 = 0 - 2y(y-1) - 2y + 2 - 18 = 0$

$2y(y-1) - 2(y-1) = 2(y-1)^2 - 18$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0.$

$(x-6)^2 = \left(\frac{(x-6y)^2}{(y-1)}\right)^2.$

$$\frac{(x-6y)^4}{(y-1)^2} + 2(y-1)^2 - 18 = 0.$$

$(x-6y)^4 + 2(y-1)^4 - 18(y-1)^2 = 0.$

$(x-6y)^4(x-6)^4 + 2(x-6y)^8 - 18(x-6y)^2(x-6)^2 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Положим, что $a = a$, $b = ka$, $c = k^2a$. Тогда если α – корень $ax^2 - 2bx + c = 0$, то он корень и $ax^2 - 2kax + k^2a = 0$. Пусть теперь:

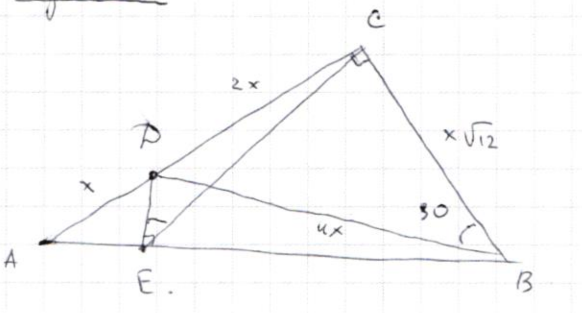
1) $a = 0$: $\Rightarrow$ тогда $c = k^2 \cdot 0 = 0$.

2) $a \neq 0$: $\Rightarrow$ α – корень и $x^2 - 2kx + k^2 = 0 = (x-k)^2 = 0$, но это ур-ние имеет только корень k. $\Rightarrow$ $k^3a = k$ (4-ый член прогрессии. Но тогда $k^2a = 1$ (если $k \neq 0$ и $k^2a = 0$ если $k = 0$).

Поэтому возможны лишь $c \in \{0, 1\}$.

Ответ: $\{0; 1\}$.

Задача 4.



Для начала отметим, что из условия $AD : AC = 1:3 \Rightarrow AD : DC = 1:2$ поэтому примем $AD = x$ и $DC = 2x$.

Теперь заметим, что $DEBC$ – вписанный, ведь $\angle DEB + \angle DCB = 180 [= 90+90]$. Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 30$ но тогда $DB = 4x [= 2 \cdot DC]$. И по т. Пифагора $CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} =$

$= x\sqrt{12}$. а) Откуда следует, что $tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{x\sqrt{12}}{3x} = \frac{\sqrt{12}}{3}$.

Далее найдем AB по т. Пифагора: $AB = \sqrt{(3x)^2 + (x\sqrt{12})^2} =$

$= \sqrt{9x^2 + 12x^2} = x\sqrt{21}$.

Если теперь записать степень точки A, относительно окр. описанной около $DEBC$, то получим $x \cdot 3x = AE \cdot x\sqrt{21}$.

Задача 4 (продолжение)

Откуда $AE = \frac{3}{\sqrt{21}}x$. Но вспомним, что $\frac{S_{\Delta EC}}{S_{\Delta BC}} = \frac{AE}{AB}$,

то есть б): $S_{\Delta EC} = \frac{AE}{AB}\cdot S_{\Delta EC} = \frac{3}{\sqrt{21}}x \cdot \frac{1}{x\sqrt{21}}\ S_{\Delta EC} = \frac{3}{21} S_{\Delta BC} =$

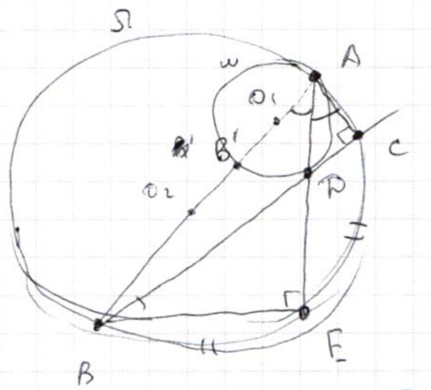
$= \frac{1}{7} S_{\Delta BC}$. Но $S_{\Delta BC} = \frac{1}{2}\cdot CB \cdot DC = \frac{1}{2}\cdot x\sqrt{12}\cdot 2x = x^2\sqrt{12}$.

Но т.к. $AC = \sqrt{7}, = 3x$, то $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Поэтому $S_{\Delta BC} = \frac{7}{9}\sqrt{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta EC} = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{9}\sqrt{12} = \frac{\sqrt{12}}{9}$.

Ответ: а): $\frac{\sqrt{12}}{3}$, б): $\frac{\sqrt{12}}{9}$.

Задача 5.



Заметим, что центры ω и Ω лежат на одной прямой. Достаточно рассмотреть гомотетию $\omega \to \Omega$.

Также $\breve{BE} = \breve{EC}$, ведь применяя все ту же гомотетию, переводящую ω в Ω, мы получаем, что $BC \to$ в параллельную прямую и будет являться касательной к $\Omega \Rightarrow \breve{BE} = \breve{EC}$. Поэтому $\angle BAE = \angle EAC$. $\Rightarrow \frac{BA}{AC} = \frac{3}{2}.\left[= \frac{BD}{DC}\right]$.

А значит $BA = \frac{3}{2}AC$. ~~Тем~~

Теперь в силу того, что AB - диаметр $\angle ACB = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{9}{4}AC^2 - AC^2} = AC\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BC\,\frac{2}{\sqrt{5}} = AC = 5\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

Опять же в силу $\angle EBC = \angle EAC$: $\Delta BED \sim \Delta DAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{DC}{DE}$. Но также $\Delta ABE \sim \Delta EBD \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \frac{DC}{DE}\cdot BE = \frac{DC\cdot AB}{3}$. $\Rightarrow$ $\cancel{2\sqrt{5}}$ $AC = \frac{DC\cdot\frac{3}{2}AC}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DC\,\frac{3}{2}}{3} = 1 \Rightarrow DC = 2$.

По т. Пифагора $AD = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Но $BD\cdot DC = 6 = DA\cdot DE = DE\cdot 2\sqrt{6}$ (степень точки D отн. Ω).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (продолжение)

поэтому $DE = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Но тогда $AO_2 = AB \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} AC =$

$= \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Но мы знаем, что $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{2+\frac{1}{2}} =$

$= \frac{2}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{4}{5} \Rightarrow$ ~~$AO_1 \ldots AO_2$~~ ~~$AO_2 = AO_1 \cdot \frac{4}{5}$~~

~~AO_2~~ $\Rightarrow AO_1 = \frac{4}{5} AO_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Теперь $S_{BECA} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \sin\angle BAE = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \cdot 5 \cdot \frac{BE}{AB} \cdot$

$\cdot \frac{DC}{AD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{8}$.

Ответ: $R_2 = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $R_1 = \frac{3}{5}\sqrt{5}$; $S = \frac{25}{8}$.

Задача 3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

Ясно, что ~~$\ldots$~~

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = (x-6y)^2 - 34y^2 + 12xy - 12x - 4y + 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - 6y - x + 6 - 34y^2 + 12xy - 12x - 4y + 20 = 0. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -34y^2 + 13xy - 13x - 10y + 26 = 0. \Leftrightarrow$

$-44y^2 + (13x + 10y)y - (13x + 10y) + 26 = 0. \Leftrightarrow -44y^2 + (13x + 10y)(y-1) + 26 = 0.$

Заметим, что $xy - 6y - x + 6 = (x-6)(y-1)$. То есть

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$.

Также заметим, что $x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18$,

ведь $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$, $(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 = x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 38$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) то есть если $u = x-6$, $v = y-1$, то $u - 6v = x - 6y$. Но тогда

$$\begin{cases}(u-6v)^2 = uv \\ u^2+v^2-18=0\end{cases} \quad (*)$$ корни исходной системы содержатся в корнях системы $(*)$.

Но значит $u^2 = 18 - v^2 \Rightarrow$ если $\underline{\underline{v^2 \leq 18}}$, то $u = \sqrt{18-v^2}$

откуда $\left(\sqrt{18-v^2} - 6v\right)^2 = \sqrt{18-v^2}\, v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (18-v^2) - 12\left(v\sqrt{18-v^2}\right) + 36v^2 = \sqrt{18v^2}\, v \Leftrightarrow$

умн. на сопр.

$\Leftrightarrow 18 + 35v^2 - \cancel{12}\, 13v\sqrt{18-v^2} = 0. \Rightarrow (18+35v^2)^2 - \left(13v\sqrt{18-v^2}\right)^2 = 0$

$\left(35^2 v^4 + 2\cdot 35\cdot 18\cdot v^2 + 18^2\right) - \left(13^2 v^2 (18 - v^2)\right) = 0$

но тогда $13^2 v^2 (18 - v^2) = 169\cdot 18 v^2 - 169 v^4. \Rightarrow$

$\Rightarrow (1225 + 169)v^4 + (70\cdot 18 - 169\cdot 18)v^2 + 18^2 = 0$. А это биквадратное ур-ие имеющее не более 4 решений.

$= 1394v^4 - 18\cdot 99 v^2 + 324 = 0 \Leftrightarrow 1394v^4 - 1782v^2 + 324 = 0.$

$t = v^2 \Rightarrow 1394t^2 - 1782t + 324 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1782 \pm \sqrt{(1782)^2 - 4(324)\cdot(1394)}}{2\cdot 1394}.$

но $1782 = 18\cdot 99 \Rightarrow (1782)^2 - 4(324)(1394) = 18^2(99^2 - 4\cdot 1394) \Rightarrow$

$$t = \frac{1782 \pm 18\sqrt{99^2 - 4\cdot 1394}}{2\cdot 1394}.$$ Отсюда видно, что т.к.

$99^2 = 9801$, то радикал > 0. А также все корни положительны

ведь $18\cdot\sqrt{99^2 - 4\cdot 1394} \leq 18\cdot 99 = 1782.$

откуда $v = \pm\sqrt{\dfrac{1782 \pm \cancel{99}\, 18\sqrt{99^2 - 4\cdot 1394}}{2\cdot 1394}}.$

Однако $t \leq 18. \Leftrightarrow \dfrac{1782 \pm 18\sqrt{3624}}{2\cdot 1394} \leq 18.$

① $+$: $1782 + 18\sqrt{3624} \leq 18\cdot 2\cdot 1394. = 18\cdot 2788$ — верно.

② $-$: $1782 - 18\sqrt{3624} \leq 18\cdot 2788$ — верно.

<u>Ответ</u>: не досчитал.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6. Ответ: $(2,3)$.

Для начала расс-м для каких (a,b) выполнено: $8x-6|2x-1|\leq ax+b$ при $x\in[-\frac{1}{2},1]$. Для этого рассмотрим несколько случаев:

I) $x\in(\frac{1}{2},1]$ $(*)$ тогда $8x-6|2x-1|=-4x+6.\leq ax+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a+4)x+(b-6)\geq 0$. В силу непрерывности и монотонности линейной ф-ции: $(a+4)x+(b-6)\geq 0$ при $x\in(*)$ необходимо и достаточно $\left[(a+4)x+(b-6)\right]\Big|_{x=1}\geq 0 \Leftrightarrow a+4+b-6\geq 0 \Leftrightarrow a+b\geq 2$ (1)

и $(a+4)\frac{1}{2}+(b-6)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a+2+b-6\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a+b\geq 4$ (2).

II) $x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $(☆)$: тогда $8x-6|2x-1|=20x-6.\leq ax+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a-20)x+b+6\geq 0$ при $x\in(☆)$. $\Rightarrow$ это должно выполняться при $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$. : $(a-20)\frac{1}{2}+b+6\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a-10+b+6\geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}a+b\geq 4.$ (3) и $(a-20)(-\frac{1}{2})+b+6\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a+10+b+6\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $b-\frac{1}{2}a\geq -16$. (4).

То есть для $8x-6|2x-1|\leq ax+b$ при $x\in[-\frac{1}{2},1]$ должно выполняться (1), (2) $\equiv$ (3), (4).

Теперь рассмотрим пары (a,b): $ax+b\leq -8x^2+6x+7$ при $x\in[-\frac{1}{2},1]$. $\Leftrightarrow$ $\underset{f(x)=}{-8x^2+(6-a)x+(7-b)}\geq 0$. Учитывая, что $f(x)$ имеет отриц. число при старшем коэфф-те, то для $f(x)\geq 0$ при $x\in[-\frac{1}{2},1]$ необходимо и достаточно $f(1)\geq 0$ и $f(-\frac{1}{2})\geq 0$.

~~$\Leftrightarrow$ $(-8+(6-a)+(7-b)\geq 0 \Leftrightarrow$~~

1: $f(1)\geq 0 \Leftrightarrow -8+(6-a)+7-b\geq 0 \Leftrightarrow 5-a-b\geq 0 \Leftrightarrow 5\geq a+b$. (5)

2: $f(-\frac{1}{2})\geq 0 \Leftrightarrow -8\cdot\frac{1}{4}-\frac{6-a}{2}+7-b\geq 0 \Leftrightarrow -2-3+\frac{a}{2}+7-b\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Задача 6 (продолжение).

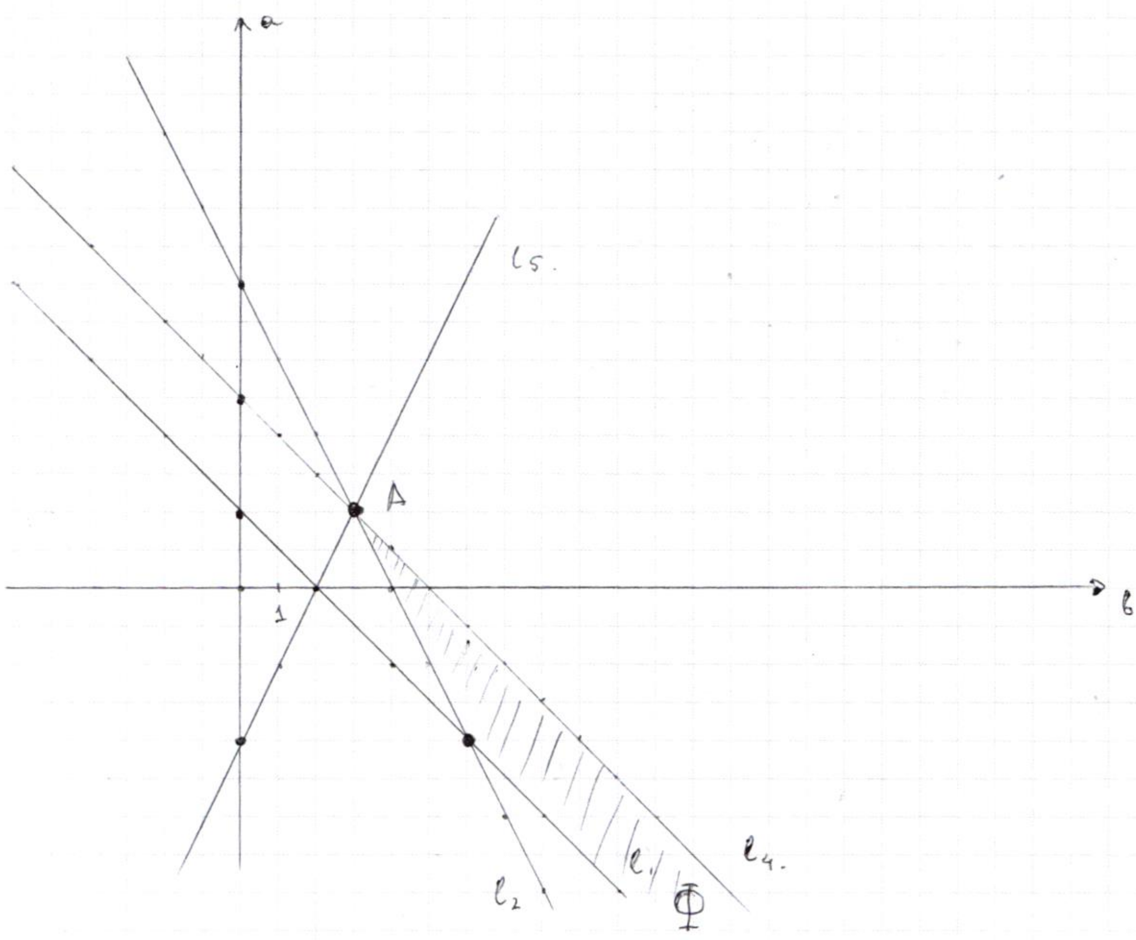
$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} - b \geq -2 \quad (6).$

А значит нужно найти (a, b) такие, что выполнено (1), (2) ≡ (3), (4), (5), (6). То есть:

$$\begin{cases} a+b \geq 2 \\ \frac{1}{2}a + b \geq 4 \\ b - \frac{1}{2}a \geq -16 \\ 5 \geq a+b \\ \frac{a}{2} - b \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{☆}) \begin{cases} a \geq 2 - b = l_1 \\ a \geq 8 - 2b = l_2 \\ a \leq 2b + 32 = l_3 \\ a \leq 5 - b = l_4 \\ a \geq 2b - 4 = l_5 \end{cases}$$

то есть каждому $b \in \mathbb{R}$ можно поставить в соотв мн-во M: $\forall a \in M$ выполнено (☆).

Рассмотрим график ~~l~~ a от b:



Если выполняются условия $a \geq l_1$, $a \geq l_2$, $a \leq l_3$, $a \leq l_4$, то ~~до~~ нужные пары будут находится в закрашенной области Φ. Но если добавить усл-вие $a \geq l_5$, то единственной ~~возможной~~ возможной парой будет точка $A = (3, 2) \Rightarrow \exists! (a, b) = (2, 3)$ (т.к. все равносильно)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)