МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q - ~~показатель~~ частное прогресии, тогда $b = qa$, $c = q^2 a$. | $a \neq 0$, $q \neq 0$

$q^3 a$ - корень $ax^2 - 2qax + q^2 \cdot a = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$.

$q^3 a$ - корень, тогда $q^6a^2 - 2q^4a + q^2 = 0 \Leftrightarrow q^2(q^4a^2 - 2q^2a + 1) = 0 \Leftrightarrow$

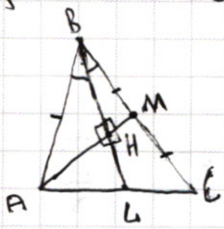
$q^2(q^2a - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q^2a = 1 \\ q = 0 \end{array}\right.$. $\Rightarrow$ т.к. $a \neq 0$ и $q \neq 0$, то $c = 1$

Ответ: $c = 1$.

№2

1) Это должны быть медиана и бис-са из разл. вершин., т.к. иначе получится, что величина одного из углов треугольника больше 180°.

2)



M - сер. BC

H - т. перес. мед. и бис.

L - осн. бис-сы

$\triangle ABH = \triangle MBH$ (по двум углам и стороне м/у ними) ↳ общая

$\Rightarrow AB = BM = x$, $AC = y$.

3) $P = 900 = x + 2x + y = 3x + y$. Т.к. $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ и $3x + y \,\vdots\, 3$, то $y \,\vdots\, 3$.

Запишем 2 нер-ва тр-ка: $2x + x > y$ и $x + y > 2x \Leftrightarrow 3x > y > x \Leftrightarrow$ т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $y \in [226; 449]$, $y \,\vdots\, 3$. $\Rightarrow y \in \{228; 231; 234; \ldots; 444; 447\}$. $(\forall y \in [226; 449], y \,\vdots\, 3)$. $x = \dfrac{900 - y}{3}$

Существ-т не более 74 вариантов y, при кот. $\underbrace{}_{74 \text{ эл-та}}$ выполняются условия.

При всех y из данного мн-ва усл. будет выполнено, т.к. тр-к будет сущ-ть, стороны будут цел. и бис-са будет $\perp$-на медиане ($\triangle ABM$ - равнобед., $BH \perp AM$).

Значит, таких тр-ков 74.

Ответ: 74.

№3

$\sqrt{xy - 6y - x + 6} = (6 - x)(1 - y) = (x - 6)(y - 1)$; $x - 6y = (x - 6) - 6(y - 1)$;

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = (x - 6)^2 + 2(y - 1)^2 - 18$; $a = x - 6$, $b = y - 1$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Перепишем исходную с-му с заменой на a и b.

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a\geq 6b \\ a^2-13ab+b^2\cdot 36=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a\geq 6b \\ (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+2b^2-18=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

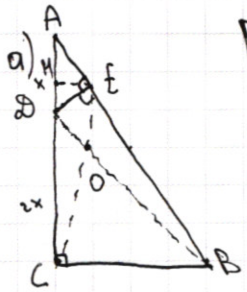
$$\begin{cases} ab\geq 0 \\ a\geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 18b^2=18 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 83b^2=18 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a\geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ b=3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$b=1$ не подходит, т.к. $a\geq 6b$; $b=-3\sqrt{\frac{2}{83}}$ не подходит, т.к. $a\geq 6b$. $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ b=3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} a=x-6 \\ b=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+6 \\ y=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6+27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ y=1+3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;0)$, $\left(6+27\sqrt{\frac{2}{83}}; 1+3\sqrt{\frac{2}{83}}\right)$.

№4



а) Пусть $AD=x$, тогда $DC=2x$.

4-угольник $CDEB$ вписанный, т.к. $\angle DCB+\angle DEB=180°$.

$\angle CEB=90°-\angle CED=60°=\angle CDB$ (опир. на CB).

$CB=CD\cdot tg\,CDB=2x\cdot tg60°=2\sqrt{3}x$.

$tg\angle CAB=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{3}x}{3x}=2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) $AC=\sqrt{7} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow BC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=7\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$S_{CED}=\frac{1}{2}\cdot EH\cdot DC$

EH – высота $\triangle CED$.

$\triangle AED\sim\triangle ACB$ (по 2м углам).

(коэф. подобия)

$\frac{AD}{AB}=k=\frac{\sqrt{7}/3}{7\sqrt{3}/3}=\frac{\sqrt{21}}{21}$.

$EH=AE\cdot\sin\angle BAC$. $\sin\angle BAC-?$

$tg\alpha=2\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{4}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle BAC=2\frac{\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow EH=AE\cdot\sin\angle BAC=k\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{21}}{21}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\frac{\sqrt{7}}{7}=2\frac{\sqrt{21}}{21}$.

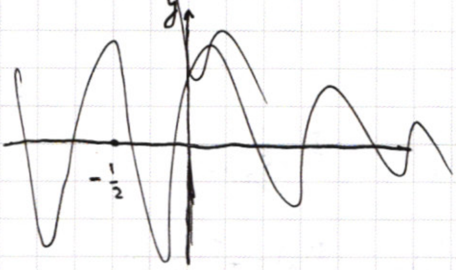
$S_{CED}=\frac{1}{2}\cdot EH\cdot DC=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{\sqrt{21}}{21}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{7}=\frac{2\cdot 7\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 21}=2\frac{\sqrt{3}}{9}$.

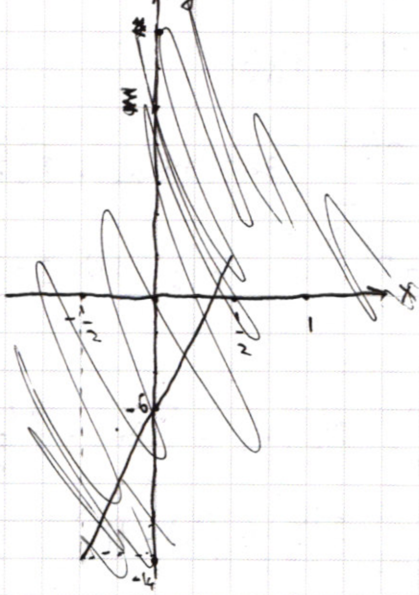
Ответ: а) $tg\angle BAC=2\frac{\sqrt{3}}{3}$ б) $S_{CED}=2\frac{\sqrt{3}}{9}$.

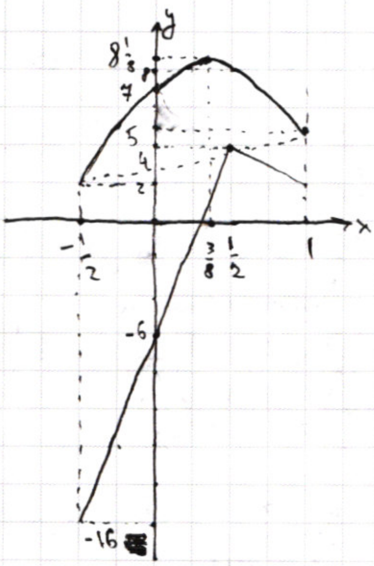
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Построим схематичные графики крайней правой и левой ф-ции.







$g(x) = 8 - 6|2x-1|$

$f(x) = -8x^2+6x+7$

На промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$ график ф-ции $ax+b$ должен лежать м-у графиками двух др. ф-ий (может касаться). Вид графика – прямая

пусть $F(x) = ax+b$, ~~тогда~~

$F(x)$ монотонна на рассматриваемом участке.

Док-м, что $a>0$:

При $x = \frac{1}{2}$ $g(x) = 4$, при $x = -\frac{1}{2}$ $f(x) = 2 \Rightarrow F(x)$ монотонно увеличивается

$\wedge\!|\ F(x)$ $\qquad F(x) \leq$

Запишем условие в точках $x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2}$; $x=1$

~~$-16 \leq -\frac{1}{2}a+b \leq 2$, $4 \leq \frac{1}{2}a+b \leq 8$ $\Rightarrow$ $2 \leq a+b \leq 5$ (1) (2) (3)~~

~~(3)-(2):~~ $F(\frac{1}{2}) \geq g(\frac{1}{2})$, $F(1) \leq f(1)$, $F(-\frac{1}{2}) \leq f(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\frac{1}{2}a+b \geq 4$ (1), $a+b \leq 5$ (2), $-\frac{1}{2}a+b \leq 2$ (3)

Из (3) и (1) видно, что $a \geq 2$; (2) $\Rightarrow b \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}a+b$ не больше, чем $-\frac{1}{2}\cdot 2+3 = 2 \Rightarrow$ (3) достигает max. и $a=2$, $b=3$.

По графику видно, что при $a=2$ и $b=3$ условие выполн.

Ответ: $(2;3)$.

№5

$f(x/y) = f(x) + f(1/y)$.

(Если x - рац. $(x\neq0)$, то $\frac{1}{x}$ - рац.).

$f(1\cdot1) = f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$.

$x = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n \Leftrightarrow f(x) = \ldots = f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_n)$.

простые мн-ли.

~~$y = q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_k \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_n)+f\left(\frac{1}{q_1}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{q_2}\right)$.~~

~~простые мн-ли~~

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)$; $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)-f(y)$.

$y = q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_k \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(p_1)+\ldots+f(p_n) - f(q_1) - \ldots - f(q_k) = \left[\frac{p_1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{p_n}{2}\right] -$

простые мн-ли

$-\left[\frac{q_1}{2}\right] - \ldots - \left[\frac{q_k}{2}\right] < 0$. $\quad \left[f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)-f(y)\right.$

$f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(5)=2$, $f(7)=3$, $f(11)=5$, $f(13)=6$, $f(17)=8$, $f(19)=9$.

~~Для $x=2$ подходят y от 4 до 22. - 19 пар~~

$f(4)=2$, $f(6)=2$, $f(8)=3$, $f(10)=3$, $f(12)=3$, $f(14)=4$, $f(16)=4$, $f(18)=3$,

$f(20)=4$; $f(21)=4$; $f(22)=6$, $f(9)=2$; $f(15)=3$ - f для всех нат. от 2 до 22.

Итого: 1 для 2-х чисел - нат. от 2 до 22

2 для 4-х чисел

3 для 6-ти чисел

4 для 4-х чисел

5 для 1 числа

6 для 2-х чисел

8 для 1 числа

9 для 1 числа

Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ надо, чтобы $f(x)<f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ согласно полученным исходным;

Всего подход. пар: $(21-2)+(21-6)+(21-12)+$

$+(21-16)+(21-17)+(21-19)+(21-20)+$

$+(21-21) = 19+15+9+5+4+2+1 =$

$= 55$ пар.

Ответ: 55 пар.

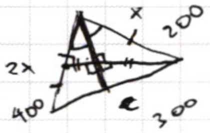
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$c+x>2x \Rightarrow c>x>\frac{1}{3}c$

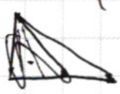
$3x>c$

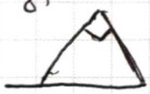
$c+3x=900 \Leftrightarrow c\in[226;449],\ c \vdots 3$

$(6-x)(1-y)$

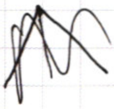
$x^2-12x+36=(x-6)^2$

$2y^2-4y+2=2(y-1)^2-18$





- нельзя.



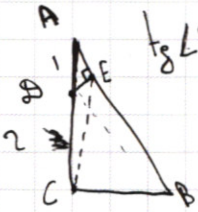
$a^2-13ab+36b^2=0 \Leftrightarrow \left(a-\frac{13}{2}b\right)^2-\frac{25}{4}b^2=0 \Leftrightarrow (a-9b)(a-4b)=0$

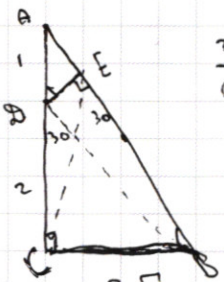
$\left(\frac{5}{2}b\right)^2$

$18b^2=1$

$83b^2=$

$tg\angle BAC-?\ \angle CED=30°$





$\frac{2}{\cos 30°}\cdot\cos 60° = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$tg=\frac{\sin}{\cos}$

$\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$tg=\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ $\cos=\frac{\sin\cdot\sqrt{3}}{2}$

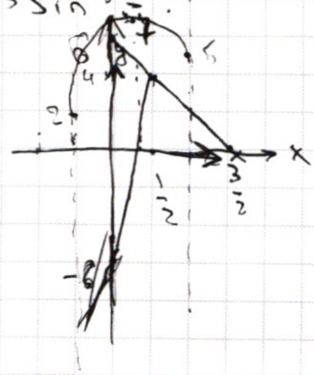
$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$\sin^2+\frac{3}{4}\sin^2=1 \Leftrightarrow \sin^2=\frac{4}{7}$.

$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

$8x^2-4x+6,\ x>\frac{1}{2}$

$20x-6,\ x<\frac{1}{2}$



$-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=8\frac{1}{8}$

$\frac{-3\pm\sqrt{9+56}}{-8}$

$-8x^2+6x+7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)