МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

№1.

Заметим что если (какой-то из чисел $a;b;c;d$ равен 0, то) $a=b=c=d=0$ и всё выполнено. Рассмотрим случай, когда $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0 \\ d\neq 0 \end{cases}$

$$ax^2+2bx+c=0$$

$$D=4b^2-4ac=\left(2\sqrt{b^2-ac}\right)^2$$

$$d=\frac{-2b\pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

$$(1)\ d=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad \text{или} \quad (2)\ d=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

$$(1):\ d=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-ac}\right)}{a\left(-b-\sqrt{b^2-ac}\right)}$$

$$-b-\sqrt{b^2-ac}\neq 0$$

$$b\neq-\sqrt{b^2-ac}$$

$b>0$ или $b\leq 0$

$b\neq\left(-\sqrt{b^2-ac}\right)\leq 0$

$b=-\sqrt{b^2}$

Если $b=-\sqrt{b^2-ac}$:

$a=0$ или $c=0$

Но тогда: $a=b=c=d=0$.

Противоречие.

Аналогично: $-b+\sqrt{b^2-ac}\neq 0$

$$d=\frac{b^2-b^2+ac}{a\left(-b-\sqrt{b^2-ac}\right)}$$

$$d=\frac{c}{-\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)}$$

$$d=cq=bq^2=aq^3$$

$$q=\frac{1}{-\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)}$$

$$b=aq;\ -b\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)=a$$

$$-b\left(b^2-b^2+ac\right)=a\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)$$

$$-abc=a\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)$$

$$c=bq;\ -c\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)=b$$

$$-c\left(b^2-b^2+ac\right)=b\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)$$

$$-abc=b\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)$$

$$\Rightarrow a=b;\ q=1$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2ax+a=0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a} \ (a\neq 0)$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x=d=-1$

$q=1: \underline{a=b=c=d=-1}$

(2): $d=\dfrac{(-b-\sqrt{b^2-ac})(-b+\sqrt{b^2-ac})}{a\,(-b+\sqrt{b^2-ac})}$

$d=\dfrac{c}{-b+\sqrt{b^2-ac}}$

$q=\dfrac{1}{-b+\sqrt{b^2-ac}}$

$b=aq$

$-b(b-\sqrt{b^2-ac})=a$

$-b(b^2-b^2+ac)=a(b+\sqrt{b^2-ac})$

$-abc=a(b+\sqrt{b^2-ac}) \rightarrow a=b;\ q=1$

$c=bq$

$-c(b-\sqrt{b^2-ac})=b$

$-c(b^2-b^2+ac)=b(b+\sqrt{b^2-ac})$

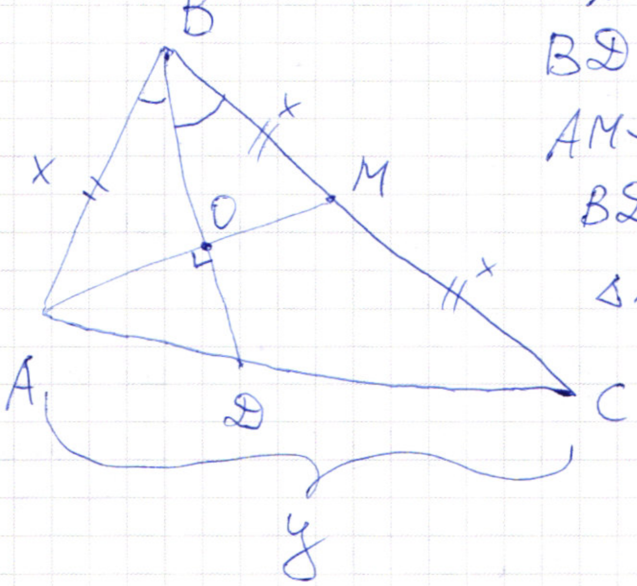
$-abc=b(b+\sqrt{b^2-ac})$

Далее рассуждения, аналогичные п. (1).

<u>Ответ</u>: $c=0$ или $c=-1$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2.

BD - биссектриса

AM - медиана

$BD \perp AM$

$\triangle ABM$: BO - высота; биссектриса.

$AB = BM$

$AB = BM = MC = x$; $AC = y$

$$\begin{cases} 3x+y=1200 \\ x+y>2x \\ 3x>y \end{cases}$$ – неравенство $\triangle$.

$$\begin{cases} 3x+y=1200 \\ y>x \\ 3x>y \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y=1200 \\ x<y<3x \end{cases}$$

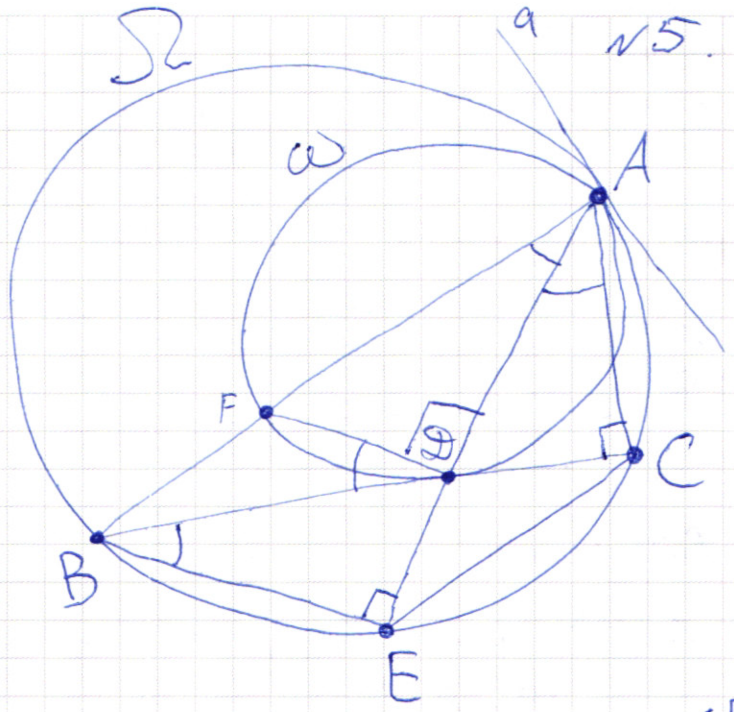
т.к. $\begin{cases} 3x+y=1200 \\ x<y \end{cases} : \begin{cases} y>300 \\ y \vdots 3 \end{cases}$

т.к. $\begin{cases} 3x+y=1200 \\ y<3x \end{cases} : \begin{cases} y<600 \\ y \vdots 3 \end{cases}$

т.е. всего возможных вариантов: $(597-300):3=99$

Заметим, что т.к. $1200=2^2\cdot3\cdot4\cdot5^2$, $y \vdots 3$; $2x \not\vdots 3$, $x \not\vdots 3$, $y \neq x \neq 2x$ и никакой возможный случай не был посчитан больше одного раза. Ответ: 99 треуг.

№5.



Ω: $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ (AB-диаметр.)

$F \in AB$; $F \in \omega$.

a- касательная к Ω

$AB \perp a$

Но a - касательная к ω

AF - диаметр ω

$\angle FDA = 90^\circ$

$\angle FDB = \angle FAD$ (BC-кас. к. ω)

$FD \perp AE$; $BE \perp AE$; $FD \parallel BE$; $\angle FDB = \angle DBE$ (накрест леж., сек. BD)

$\angle CBE = \angle CAE$ (опирающая на $\smile EC$)

AE - биссектриса $\angle BAC$.

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (теорема о биссектрисе)

$AB = 3x$; $AC = x$; $BD = 3$ (по усл); $CD = 1$ (по усл.)

$\triangle ABC$: $9x^2 = x^2 + 16$ (теорема Пифагора)

$x = \sqrt{2} = AC$; $AB = 3\sqrt{2}$

$R = \frac{1}{2}AB = 1{,}5\sqrt{2}$ – радиус Ω

$\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 3$ (теорема Пифагора)

$AD = \sqrt{3}$

т.к. $\angle A\cancel{E}CD = \angle ADF$ и $\angle FAD = \angle DAC$: $\triangle FAD \sim \triangle DAC$ (по 2 углам)

$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AF}$; $AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $r = \frac{1}{2}AF = \frac{1{,}5}{\sqrt{2}}$ – радиус ω

т.к. $\angle ACD = \angle BED$ и $\angle CBE = \angle CAD$: $\triangle BED \sim \triangle ACD$ (по 2 углам)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{BE}{AC} = \frac{BD}{AD} = \sqrt{3}$; $BE = \sqrt{6}$

Аналогично из подобных $\triangle ADB$ и $\triangle CDE$: $\frac{EC}{AB} = \frac{DC}{AD}$

$EC = \frac{AB \cdot DC}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BCE}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 2\sqrt{2}$

~~S_{BC}~~ ~~Проф~~ Т.к. $BE = EC$, проведём высоту и медиану в BEC EH.

$BH = HC = 2$

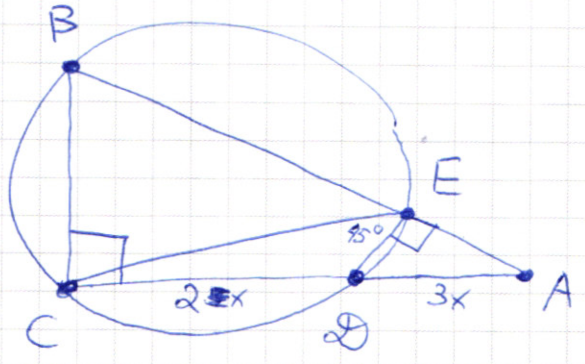
$\triangle EHC$: $h = \sqrt{EC^2 - HC^2} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$

$S_{BCE} = \frac{1}{2} h \cdot BC = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R = 1{,}5\sqrt{2}$; $r = \frac{1{,}5}{\sqrt{2}} = 0{,}75\sqrt{2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№4.



$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ (по усл.)

$AD = 3x$; $AC = 5x$; $DC = 2x$

$\angle BED = 90^\circ$ ($DE \perp AB$)

$\angle BCA = 90^\circ$ (по усл.)

$\angle BCD + \angle BED = 180^\circ$

BCDE – вписанный четырёхугольник

т.к $\angle CED = 45^\circ$ (по усл.): EC – биссектриса $\angle BED$

$BC = CD = 2x$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29}\,x$

$AC = 5x = \sqrt{29}$ (по усл.)

$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 5x^2 = \frac{29}{5}$

~~AD~~ $\triangle BCA \sim \triangle DEA$ (по 2 углам)

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; $AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{3x \cdot 5x}{\sqrt{29}\,x} = \frac{15}{\sqrt{29}}x = \frac{15}{29}\sqrt{29}\,x$

$BE = \frac{14}{29}\sqrt{29}\,x$

$S_{AEC} = \frac{15}{29} S_{ABC} = 3$

$S_{CED} = \frac{CD}{AC} S_{AEC} = \frac{2}{5} S_{AEC} = \frac{6}{5}$

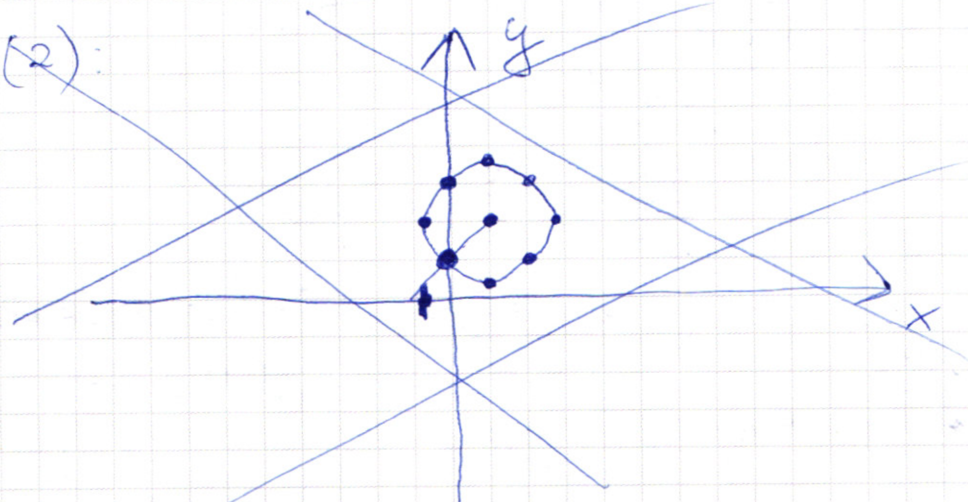
Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; $S_{CED} = \frac{6}{5}$.

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} & (1) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

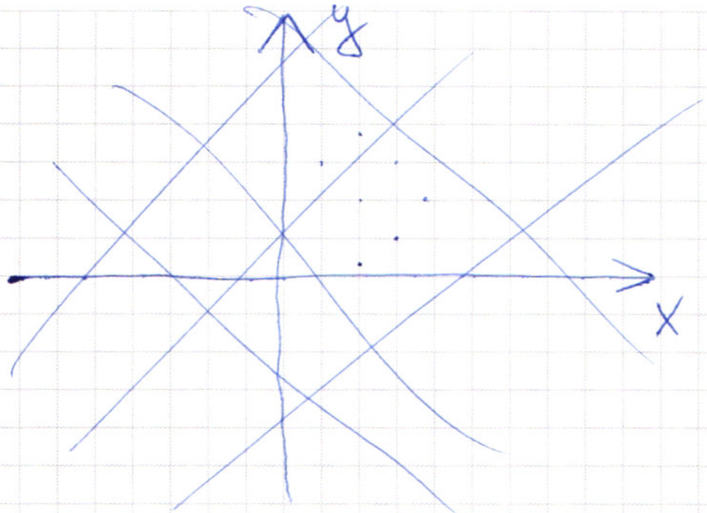
(2):

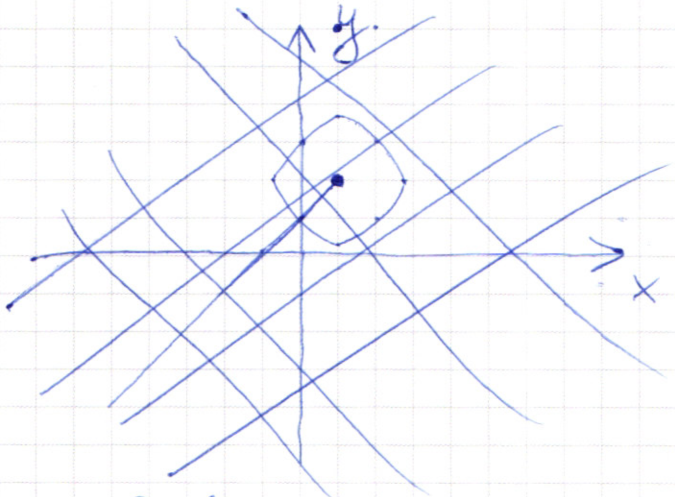


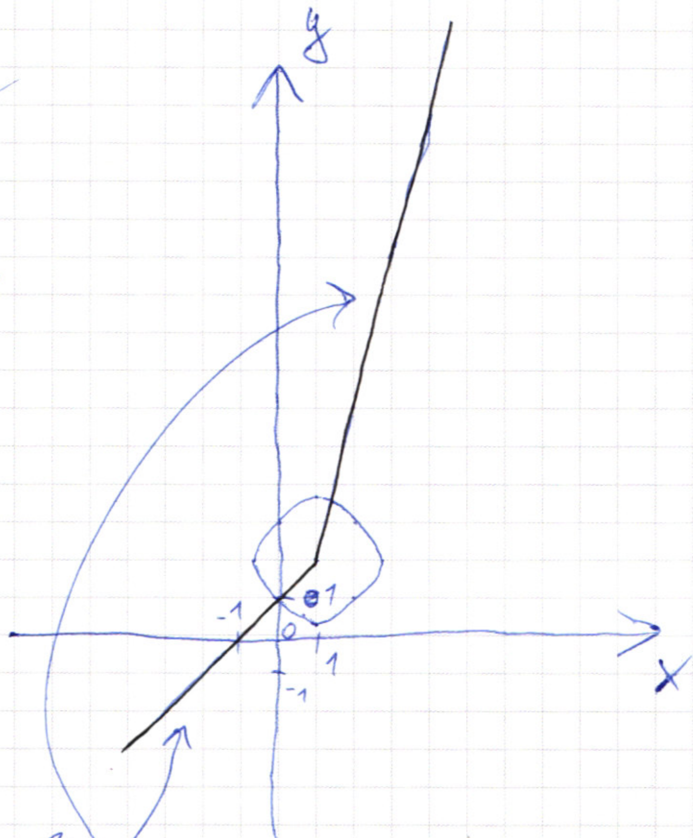
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







Чёрным график ур-я (1)

Синим график ур-я (2)

Ответ: $(0;1)$ или $(1\frac{1}{3}; 3{,}5)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$(y^2-4y+4)+x^2+x^2-4x-1$$

$$y-2x=\sqrt{x(y-2)-1(y-2)}$$

$$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

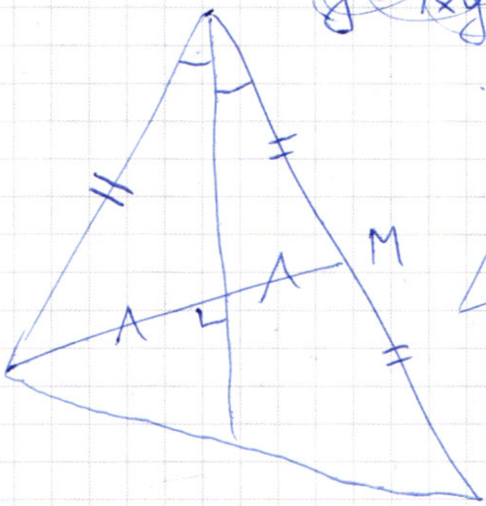
$$y^2-5xy+4x^2-2x-y+2=0$$

$$y^2-5xy+4x^2-2x-y+2=2x^2+y^2-4x-4y+3$$

$$2x^2-5xy+2x+3y-1=0$$

$$y^2-5xy+4x^2$$

$$2x(x-2y)$$

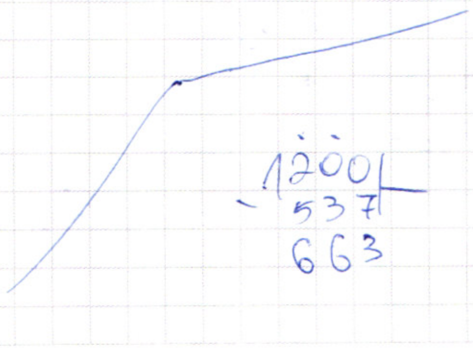


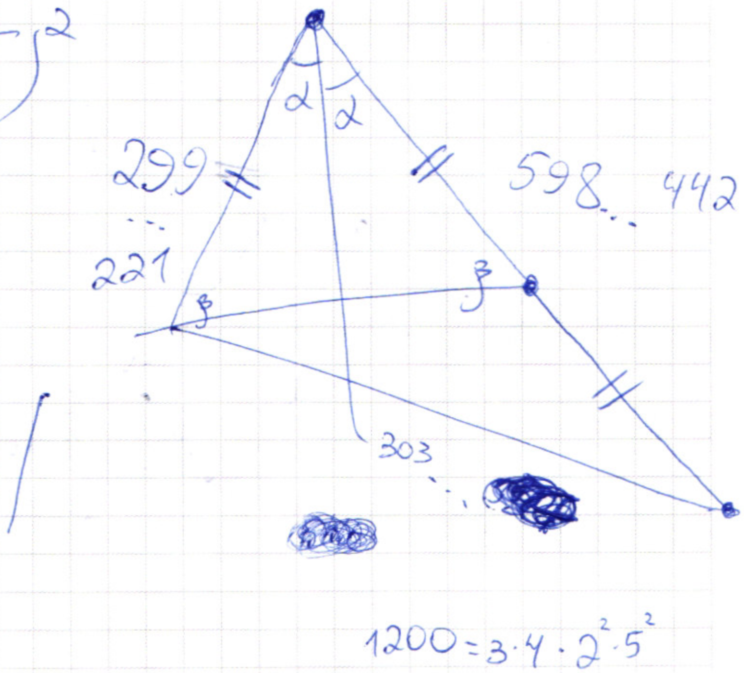
$$ax^2+2bx+c=0$$

$$D=4b^2-4ac=\left(2\sqrt{b^2-ac}\right)^2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=$$

$-2b+2$

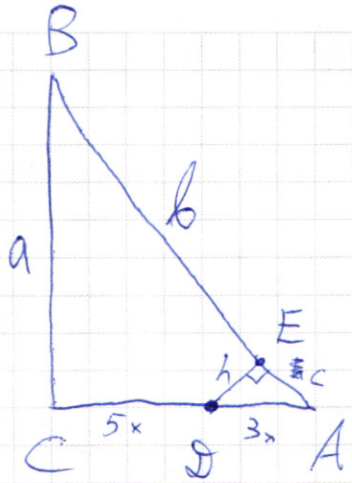




$$\begin{array}{r} 1200 \\ -\ 537 \\ \hline 663 \end{array}$$

$$1200=3\cdot4\cdot2^2\cdot5^2$$

$\left\{\begin{array}{l} (x^2+2xy+y^2)+x^2-4x-2xy=4y+3 \\ (x+y)^2+(x-1)^2-2x-2xy-4y+2 \end{array}\right.$



$\dfrac{c}{8x}=\dfrac{3x}{b+c}$

$\dfrac{c}{h}=\dfrac{8x}{a}$ — ?

$bc+c^2=24x^2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y^2-4y+4)\,\cancel{-}\,(4x^2+4x+1)+6x^2$

$-x^2+2x-1=0$

$(y-2x)^2=y^2-4xy+4x^2$

a

$b+\sqrt{b^2-ac}$

$a=b+b$

$-b\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)=a$

$-b\left(b^2-b^2+ac\right)=a\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)$

$-abc=a\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)$

$-c(b+$

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

$a=-1$

$b=1$

$c=-1$

$d=1$

$2(x+y)^2-(y+2)^2$

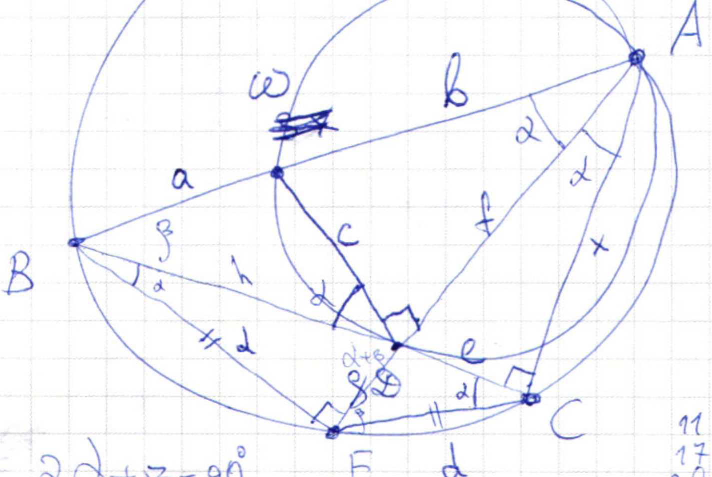
$-(y^2+4y+4)$

$(2x^2+4xy+2y^2)-y^2-4xy-4x-4y+3=0$

$-4xy-4x+7$

$2x^2+2y^2-4x$

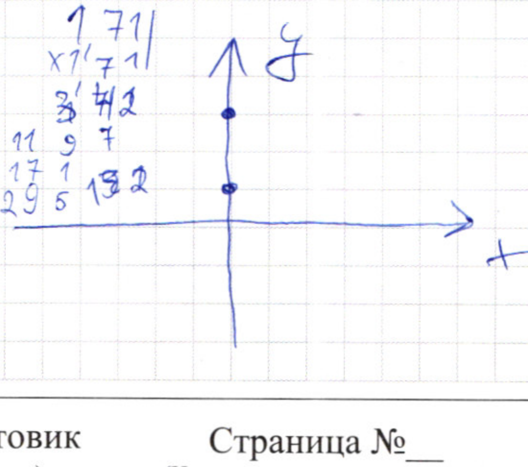
Ω



$2\alpha+\beta=90^\circ$

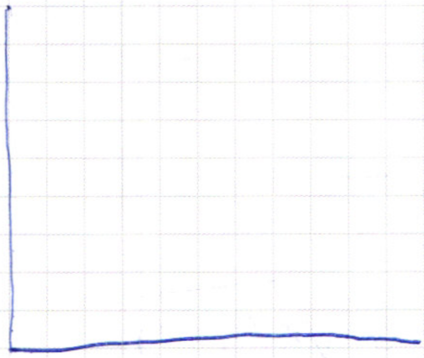
$2(x^2-2x+1)=$

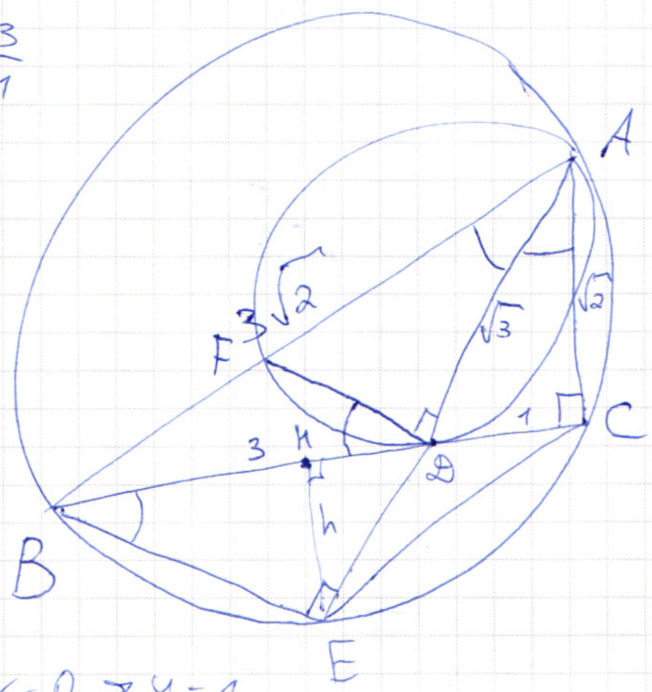
$=2(x-1)^2+(y-2)^2=3$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{f}{c} = \frac{a+b}{h} = \frac{h}{a}$ $\quad \frac{a+b}{x} = \frac{3}{1}$





$y = \sqrt{-1(y-2)}$ $\quad x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1$

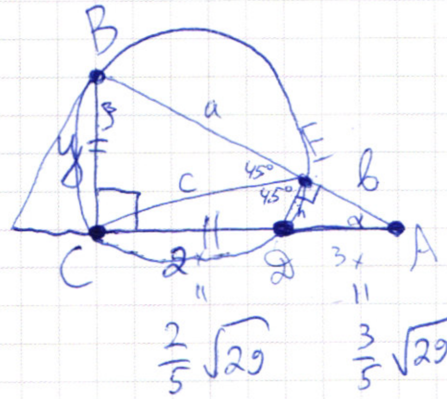
$y^2 = -y + 2$

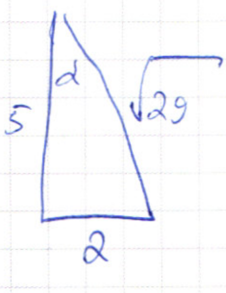
$y - 18$

$y + y - 2 = 0$ $\quad \frac{y}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin\beta}$

$y + 2y - y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$ $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} \; y = \frac{8x}{a+b}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2(a+b)} - ?$



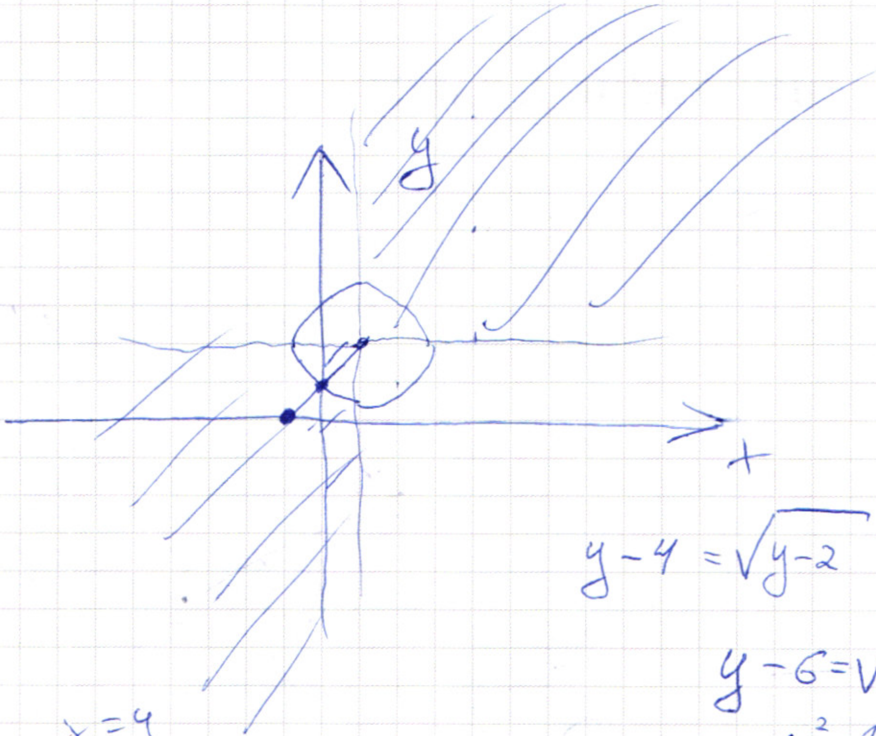


$y^2 - 16y + 16 = y - 2$

$y^2 - 17y + 18 = 0$

$y - 4 = \sqrt{(y-2)}$

$y - 2 = \sqrt{0(y-2)}$



$y-4=\sqrt{y-2}$

$y-6=\sqrt{2(y-2)}$

$y^2-12y+36=2y-4$

$y^2-14y+40=0$

$x=4$

$y-8=\sqrt{3(y-2)}$

$y^2-16y+64=3y-6$

$y^2-19y+70=0$

$(y-5)(y-14)=0$

$y+2=\sqrt{-2(y-2)}$

$y^2+4y+4=-2y+4$

$y^2+6=0$

$y-4=\sqrt{y-2}$

$y^2-8y+16=y-2$

$y^2-9y+18=0$

$D=289-$

$y+4=\sqrt{-3(y-2)}$

$y^2+8y+16=-3y+6$

$y^2+11y+10=0$

$(y+1)(y+10)$