МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

a, b, c – первый второй и третий член геом. прогрессии

Пусть $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$ $(a, q \neq 0)$,

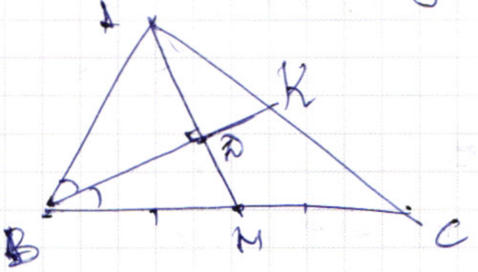
Тогда если $\alpha = a\cdot q^3$ – корень кв. ур-я $ax^2+2bx+c = 0 \Leftrightarrow ax^2+2aqx+aq^2=0 \Leftrightarrow (x+q)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-q \Leftrightarrow \alpha = -q = a\cdot q^3 \Rightarrow a\cdot q^2 = -1 = c$.

Ответ: -1

N2

$\triangle ABC$: AM – мед, BK – биссек. $AM \perp BK$. $AM \cap BK = D$.



Заметим, BD в $\triangle ABM$ – выс. и биссек $\Leftrightarrow$ $\triangle BAM$ – р/б $\Leftrightarrow$ $AB = \frac{1}{2}BC$.

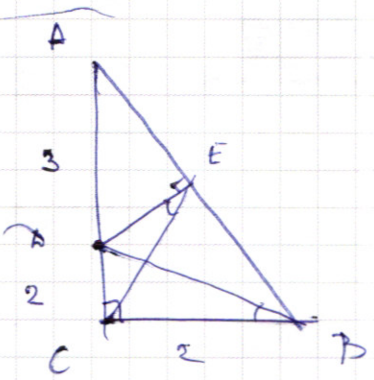
Тогда ясно, что нужные нам треугольники обладают следующим свойством: одна их сторона в 2 раза меньше другой. Сколько же таких $\triangle$-ов? Пусть ABC нужный нам $\triangle$-к $\Rightarrow AB = x$, $\cancel{BC=2x}$, $BC = 2x$, $P_{ABC} = 1200 \Rightarrow AC = 1200-3x$

Запишем нер-во $\triangle$-ка для ABC:

$$\begin{cases} x < 1200 - x \\ 2x < 1200 - 2x \\ 1200-3x < 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 300 \\ x > 200 \end{cases} \Leftrightarrow x = \{201, 202, \ldots, 299\}$$

$(x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ вариантов каким может быть x всего 99 $\Rightarrow$ вариантов каким может быть треугольник 99. Ответ: 99.

№4.



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle C = 90°$

$AD : AC = \frac{3}{5}$

$DE \perp AB$

а) $tg\angle BAC$, если $\angle CED = 45°$ – ?

б) S_{CED}, если $AC = \sqrt{29}$ – ?

а) Заметим в $\triangle DEBC$: $\angle E + \angle C = 90° + 90° = 180° \Rightarrow DEBC$ – впис $\Rightarrow \angle CED = \angle DBC = 45°$. Но тогда в $\triangle CDB$: $DC = CB$ т.к $\triangle DBC$ – р/б ($\angle C = 90°$, $\angle B = 45°$) $\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5} = tg\alpha$.

б) ~~Пусть~~ $AC = \sqrt{29}$. Тогда $AD = \frac{3}{5}\sqrt{29}$, $DC = CB = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

в $\triangle ADE$: $AE^2 + ED^2 = \frac{9}{25}\cancel{\sqrt{29}}$, но $\frac{DE}{AE} = tg\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = 5x$, $ED = 2x \Rightarrow 29x^2 = \frac{9}{25} \cdot 29 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \frac{6}{5}$, $DC = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29}$. В $\triangle CDE$ $\angle D = 180° - \angle B$

$\Rightarrow$ ~~$tg\angle D =$~~ $\sin\angle D = \sin\angle B = \cos\angle A$; $\cos\angle A =$

$= \frac{AE}{AD} = \frac{3}{\frac{3}{5} \cdot \sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$. $\Rightarrow S_{\triangle CDE} = CD \cdot DE \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle D =$

$= \cancel{\frac{2}{5}} \cdot \cancel{\sqrt{29}} \cdot \frac{6}{5} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{\frac{5}{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$; $\frac{6}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$ Замена $y-2=t$, $x-1=u$

t, u одного знака из того что $\sqrt{ut}$ существует.

$$\begin{cases} t-2u=\sqrt{ut} \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-\sqrt{ut}+\frac{u}{4}=\frac{9}{4}u \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$u, t \geq 0$:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}u \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t}-\frac{\sqrt{u}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{u} \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t}=2\sqrt{u} \\ 2u^2+16u^2-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18u^2=3 \\ t=4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ t=\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases}$$ - подходит

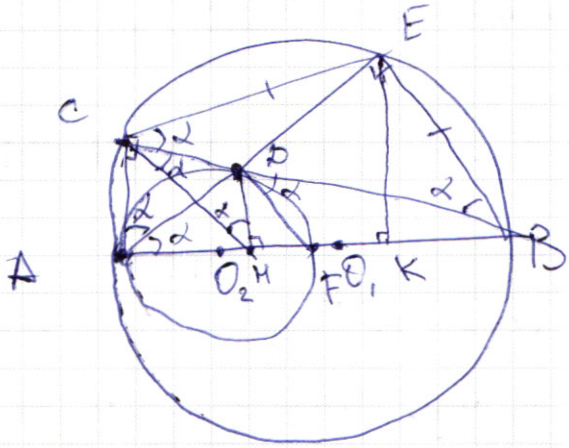
$u, t < 0$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{-t}+\frac{\sqrt{-u}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}u \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-t}+\frac{\sqrt{-u}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{-u} \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-t}=\sqrt{-u} \\ 2u^2+t^2-3=0 \end{cases}$$

$$2u^2+u^2-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$ - подходит

Ответ: $\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}};\ 2+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$; $(0; 1)$

№5



Дано:

$\Omega \cap \omega = A$

AB - диаметр Ω

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = A, E$

$CD = 1$, $BD = 3$

r, R, S_{ACEB} - ?

Решение:

Заметим, если AB - диаметр Ω, то на AB лежат центры Ω, ω — O_1 и O_2. (т. A - т. внутр. касания) $AB \cap \omega = F$. AF - диаметр ω. тогда $\angle ADF = 90° = \angle AEB = \angle ACB$ - опир. на диаметры. Заметим, $\angle EAB = \angle BDF = \alpha$ (угол между хордой и кас) но для $\triangle DEB$: $\angle ADB = 90° + \alpha$ - внеш $\Rightarrow \angle DBE = \alpha = \angle EAB = \angle ECB = \angle CAE$ (на одну дугу) $\Rightarrow \triangle CEB$ - р/б. ~~тогда~~ $\cancel{2R = \frac{CE}{\sin\angle CBE}}$

$\cancel{= \frac{CE}{\sin\alpha}}$ ~~(А)~~ $\cancel{\sin\alpha = \frac{CE}{2R}}$ ~~(но)~~ но в $\triangle BDE$

$\cancel{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{BE}{BD}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{CE^2}{9}} = \frac{CE}{2R}}$

$\cancel{\Leftrightarrow 1 - \frac{CE^2}{9} = \frac{CE^2}{2R}}$

Опустим $DH \perp AB$. Заметим $ACDH$ - впис ($\angle C + \angle H = 180°$) $\Rightarrow CHD = \alpha = \angle HCD \Rightarrow CH \parallel EB \Rightarrow CD = DH = 1$. По т. пиф-ра: в $\triangle HDB$: $HB = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Но по т. о пропорц. отрезках $HF = \frac{FB}{3} \Rightarrow HF = \frac{HB}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. DH - высота в прямоуг. $\triangle ADF \Rightarrow DH = \sqrt{AH \cdot HF} \Leftrightarrow AH = \frac{DH^2}{HF} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AB = AH + HB = 2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение задания 5.

Проведём $EK \perp AB$. Заметим $\Gamma_A^k: DH \to EK$

$\omega \to \Omega \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{DH}{EK}$. Γ_A^k: $AH \to AK$, $HF \to KB \Rightarrow$

$\frac{AK}{KB} = \frac{AH}{HF} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2} = 2$, но $AK + KB = 2R = \frac{6}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AK = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $KB = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow EK = \sqrt{AK \cdot KB} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{DH}{EK} \Leftrightarrow r = \frac{R \cdot DH}{EK} = \frac{R \cdot 1}{2} = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ Но тогда

$F = O_1$.

В $\triangle ACB$ по т. Пиф $CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$

~~В $\triangle AEB$: $EB = \sqrt{18 - EB^2}$~~

В $\triangle AEK$: $AE = \sqrt{AK^2 + EK^2} =$

$= \sqrt{8 + 4} = 2\sqrt{3}$

В $\triangle AEB$: $EB = \sqrt{AB^2 - AE^2} =$

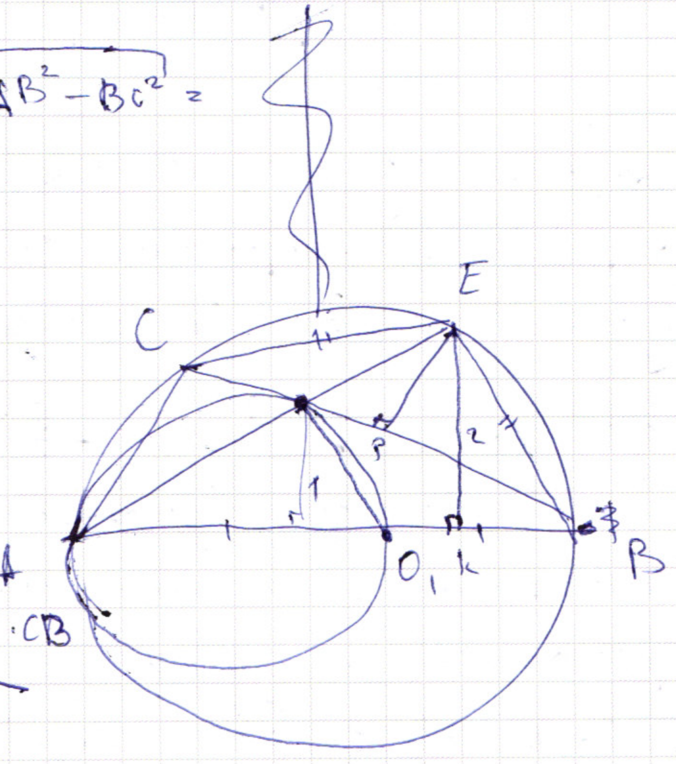
$= \sqrt{18 - 12} = \sqrt{6} = CE$

$S_{\triangle CEB} = \frac{EP \cdot CB}{2} = \frac{\sqrt{EB^2 - \frac{CB^2}{4}} \cdot CB}{2}$

$= \frac{\sqrt{6-4} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$

$S_{\triangle ACB} = \frac{CA \cdot CB}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$

$S_{ACEB} = 4\sqrt{2}$.



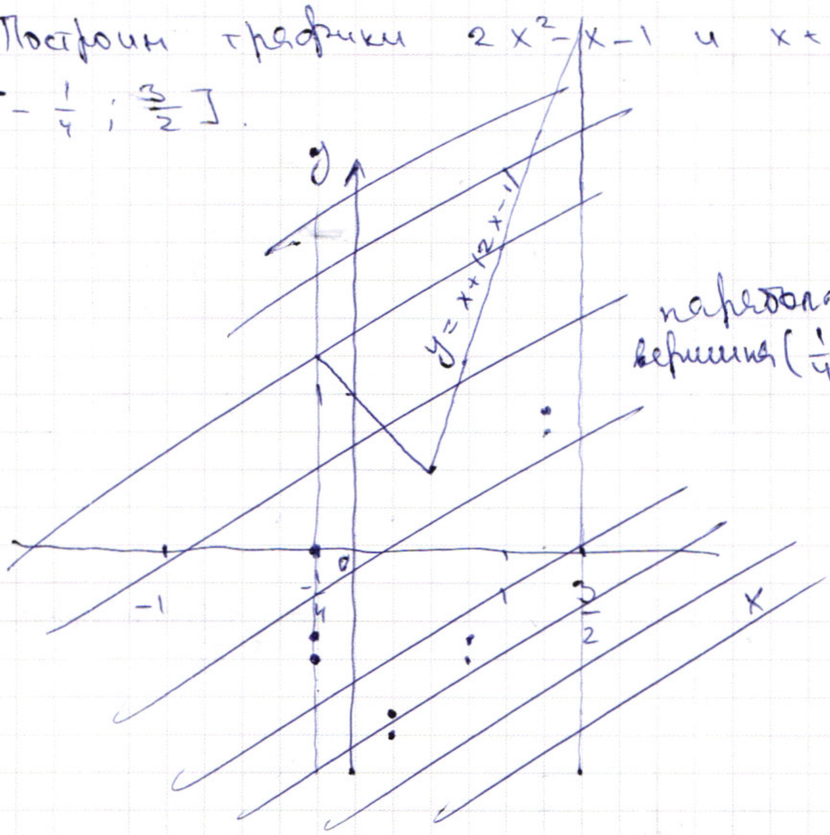
Ответ: $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{ACEB} = 4\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

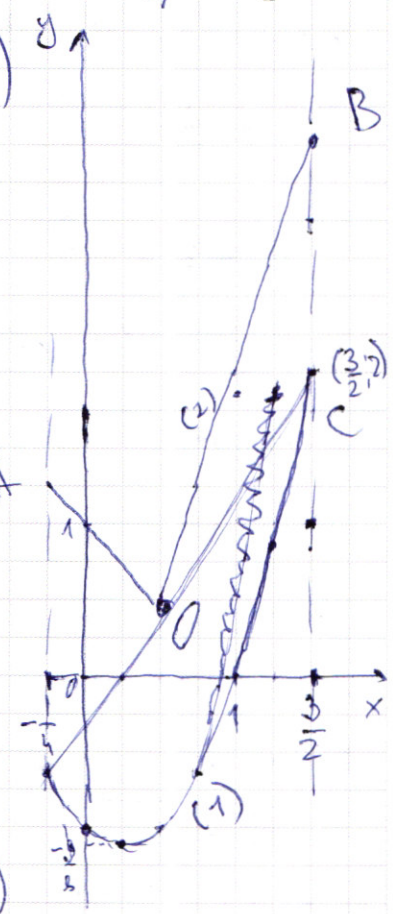
№6

$2x^2-x-1 \overset{(1)}{\le} ax+b \le x+|2x-1|$ (2)

Построим графики $2x^2-x-1$ и $x+|2x-1|$ на пр-ке $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$.



$y=2x^2-x-1=$
$=2(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16})-\frac{9}{8}=$
$=2(x-\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}$.



Получим на рисунке т. $A(-\frac{1}{4};\frac{5}{4})$; т. $B(\frac{3}{2};\frac{7}{2})$ – пересечения (2) и $x=-\frac{1}{4}$; $x=\frac{3}{2}$. И аналогично для (1): $D(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$; $C(\frac{3}{2};2)$ и т. O (излом графика (2)) $O(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

Заметим, что множество искомых прямых лежит выше прямой CD и ниже т. O.

Найдем ур-е CD: $y=kx+b$: $\begin{cases} -\frac{1}{4}k+b=-\frac{5}{8} \\ \frac{3}{2}k+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4}k=\frac{21}{8} \Leftrightarrow k=\frac{3}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$. Но т. $O(\frac{1}{2};\frac{1}{2}) \in CD$, т.к. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ – верно. $\Rightarrow$ что искомая только одна и тогда ед-ая пара (a,b): $(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$. Ответ: $(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Заметим, $f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]=\frac{(p-1)}{2}$ для $\forall p \neq 2$.

Также заметим $f(p\cdot 1)=f(p)=f(p)+f(1)$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$. Также заметим, что если $f(ab)=f(a)+f(b)$, то $f(a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_n)=f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot\ldots\cdot f(a_n)$. ~~Теперь пусть каждая пара (x,y), $1\le x, y\le 21$, такие, что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$~~

Возьмём число a и $\frac{1}{a}$. Тогда $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$ $\Rightarrow$ $\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №7
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

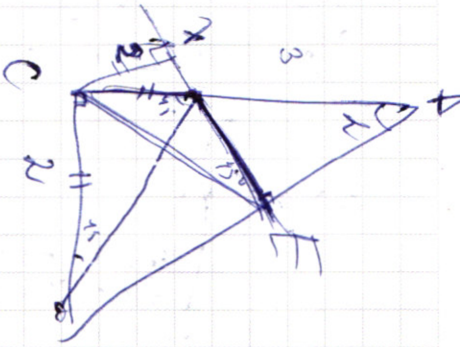
a, b, c - последовательные члены геом. прогрессии. Пусть $b = q\cdot a$, $c = q^2\cdot a$ (q - знам прогр.). Четвёртый её член $d = q^3\cdot a$ - корень ур-ия $ax^2 + 2bx + c = 0$.

$ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow ax^2+2a\cdot qx + a\cdot q^2 = 0 \Leftrightarrow a(x^2+2qx+q^2)=0$

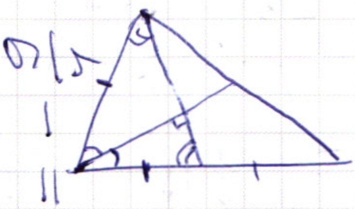
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ (x+q)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\cdot q^2 = 0 = c \\ x=-q=d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ a\cdot q^3=-q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ q(aq^2+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ q=0 \\ aq^2=-1 \end{array}\right.$

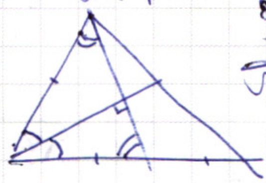
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-1 \end{array}\right.$

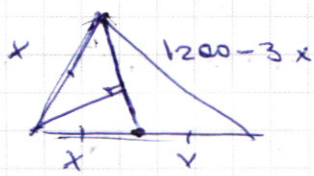
Ответ: 0; −1



N2

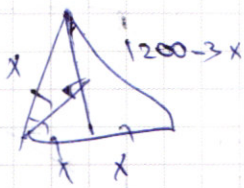






$1200 - x > x$
$600 > x$

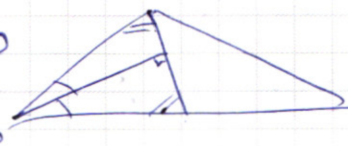
99



$\begin{cases} x + 1200 - 3x \geq 2x \\ 3x \geq 1200 - 3x \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 300 \\ x \geq 200 \end{cases}$

$200 \leq x \leq 300$

$\begin{cases} x < 1200 - x \\ 2x < 1200 - 2x \\ 1200 - 3x < 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 600 \\ x < 300 \\ x > 200 \end{cases}$



$200 < x < 300 \Rightarrow x \in \{201, 202 \ldots 299\}$

99

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x(y-2)-(y-2)}=$$

$$2(x^2-2x+1)+y^2-4y+4-3$$

$$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$$

$$(y-2)-2(x-1)$$

$$16\sqrt[4]{6}-8\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{6}$$

$$\frac{9\sqrt[4]{6}}{4\sqrt[4]{6}}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 2 \\ x\geq 1 \\ (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq 2 \\ x\leq 1 \\ (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$y\geq 2$, $y-2=u$

$x\geq 1$, $x-1=t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-2t=\sqrt{ut} \\ 2t^2+u^2-3=0 \end{cases}$$

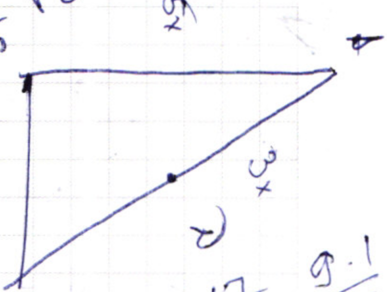
$ut=a$

$u+t=b$

$$-\frac{2}{\sqrt[4]{6}}+\frac{1}{4\sqrt{6}}$$

$$\begin{cases} u^2-4ut+4t^2=ut \\ 2t^2+u^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{6}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{6}}\sqrt{6}$$



$$u^2-5ut+4t^2=0$$

$$u^2=3-2t^2$$

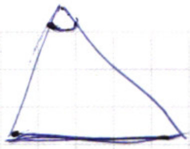
$\cancel{3+5xt}$ $2t^2-5ut+3=0$

$$-\frac{17}{4\sqrt{6}}+\frac{9\cdot 1}{4\sqrt{6}}$$

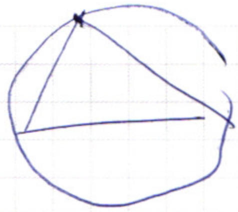
$$-\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{1}{4\sqrt{6}} \quad -8$$

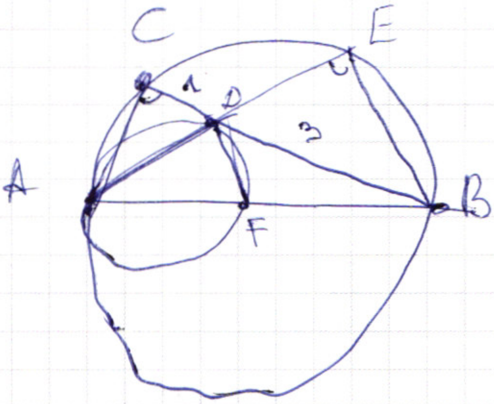
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$ab\cdot\sin\gamma$





$r_\omega,\ r_\Omega$ – ? S_{ACEB} $\frac{a}{\sin}$

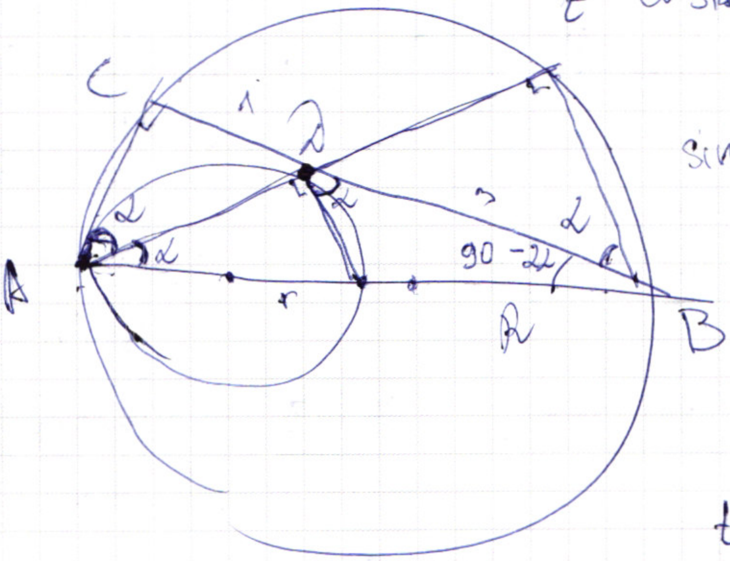
$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}-\frac{5}{4}$

$BF\cdot BA=9$ $\frac{1}{8}-\frac{10}{8}$ $\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\cancel{\frac{5}{\ }}$ $\sin\alpha=\frac{a}{3}$

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot x$ $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ $\frac{9}{16}$ $\frac{9}{8}-\frac{10}{8}$

E $\cos\alpha=\frac{a}{3}$ $-\frac{1}{8}$



$(2R-2r)\cdot 2R=9$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{a^2}{9}}=\frac{\sqrt{8}a}{3}$

$ED\cdot DA=3$

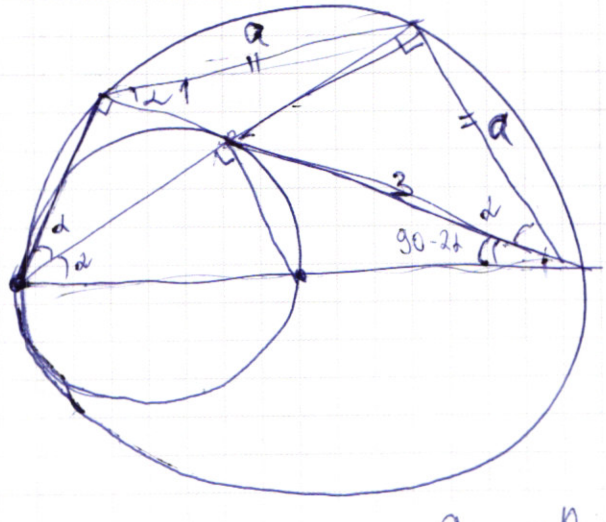
$\sin\alpha$ $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$

$\frac{ED}{1}=$

$tg2\alpha=\frac{3}{CA}$ $\frac{9\cdot3}{2\sqrt{2}a}=2R$

$R=$

$4R^2-4r\cdot R=9$



$\frac{a}{2(R+r)}=$

$\frac{4}{\sin2\alpha}=2R$

$\sin\alpha=\frac{a}{3}$

$\frac{3}{2}R$ $\frac{a}{\frac{a}{3}}=2R$ $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

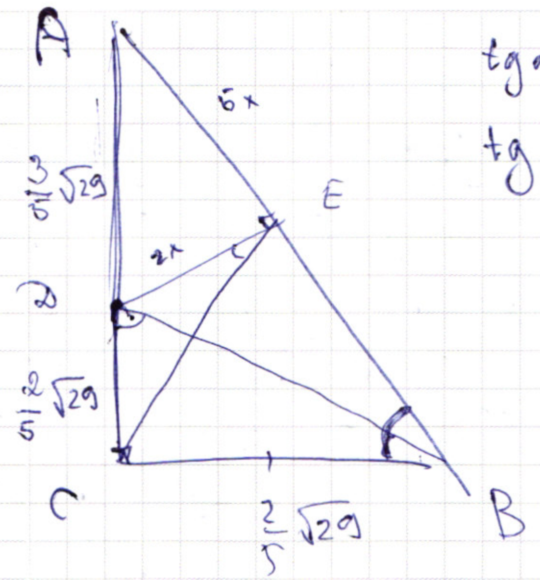
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$tg\,\alpha = \frac{2}{5}$

$tg(90^\circ - \alpha) = \frac{5}{2}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{5}{2}$

$\alpha = \frac{DB}{\cancel{2}} =$

$\sin\alpha = \frac{5}{2}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\sin^2\alpha$

$\sqrt{\frac{4\cdot 29}{25}\cdot 2}$ $\quad \frac{2}{5}\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}$

$\frac{29}{\cancel{4}}\sin^2\alpha = \frac{25}{\cancel{4}}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{25}{29}}$

$\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}{5} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{29}}{\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}}$

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\frac{5}{\cancel{\sqrt{29}}}\cdot\frac{2}{\cancel{5}}\cancel{\sqrt{29}}\cdot\frac{6}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\cancel{29}x^2 = \frac{9}{25}\cdot\cancel{29}$

$x^2 = \cancel{\frac{3}{5}}\ \frac{3}{5}$

$\frac{1}{2}\ \frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{6}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\frac{EB}{AB} = \frac{ED}{3}$$

Дано:

$\Omega \cap \omega =_т A$

AB - диаметр Ω

$ABC \cap \omega =_т D$

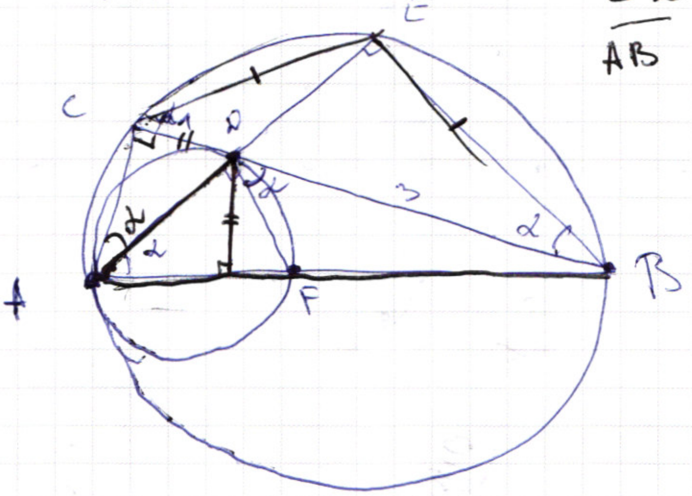
$AD \cap \Omega =_т E$

$CD = 1$

$BD = 3$

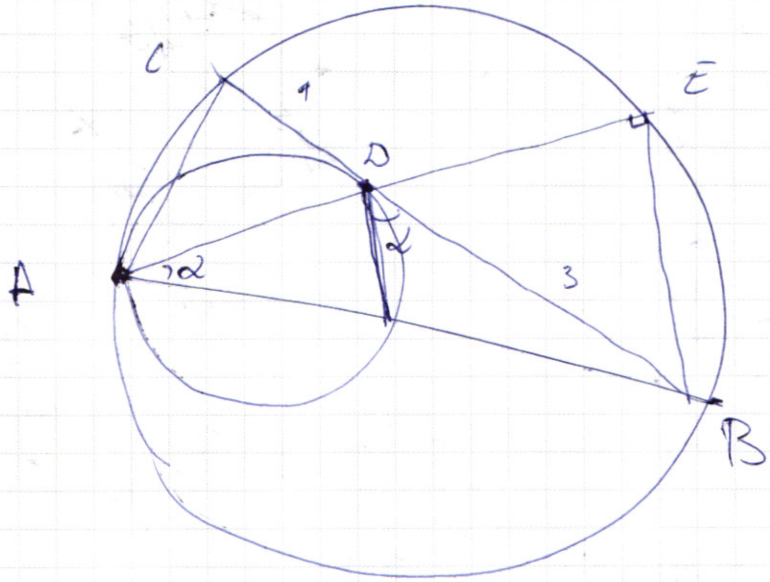
r, R - ? - радиусы.

S_{BACE} - ?



Решение: Заметим, $\angle EAB = \alpha = \angle BDF$ (угол между хордой и касательной).

в $\triangle DEB$ $\angle BDA$ - внеш $\Rightarrow \angle ADB = \angle E + \angle B \Rightarrow \angle B =$
$= \angle ADB - \angle E = 90° + \alpha - \alpha$ ($\angle ADF$ опирается



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

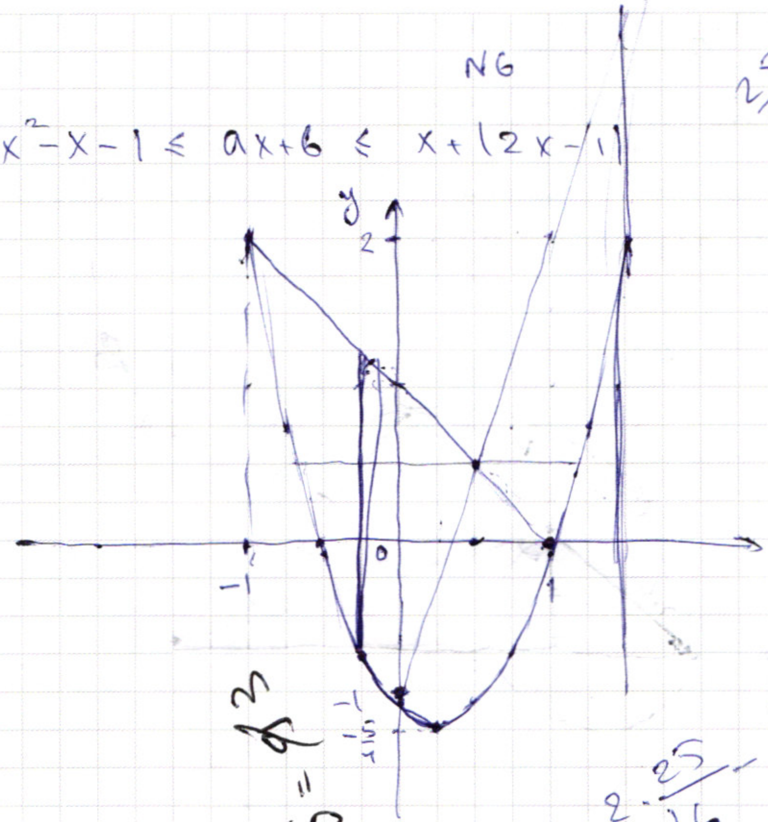
(Нумеровать только чистовики)

N6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}) - \frac{5}{8}$

$= 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{5}{4}$



$\frac{3}{4}\sqrt{10}\cdot(x+\sqrt{10})^2$

$= \frac{3x}{4}\sqrt{10} + \frac{30}{4} = 9$

$3\sqrt{10}x + 30 = 36 \quad x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$3\sqrt{10}x = 6$

$\sqrt{10}x = 3$

$2\cdot\frac{25}{16} - \frac{5}{4} - 1$

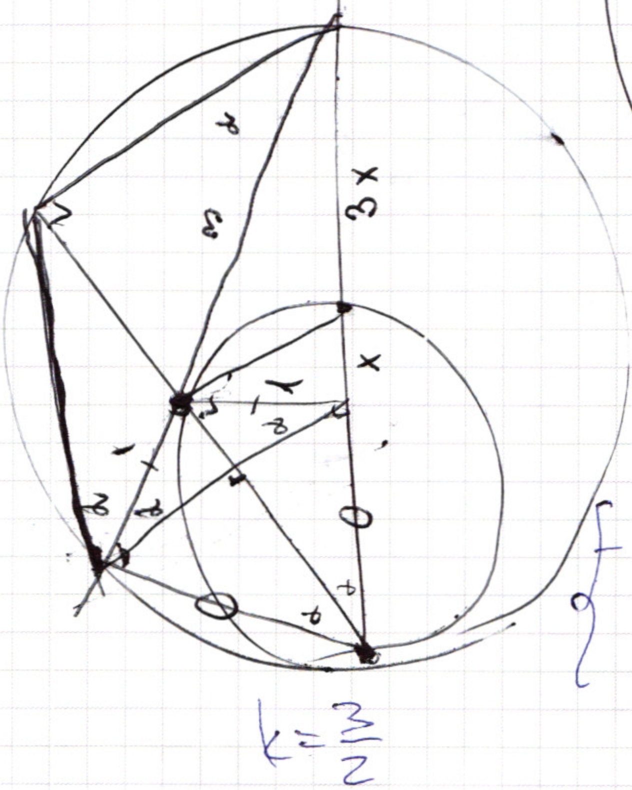
$\frac{25}{8} - \frac{10}{8} - \frac{8}{8}$

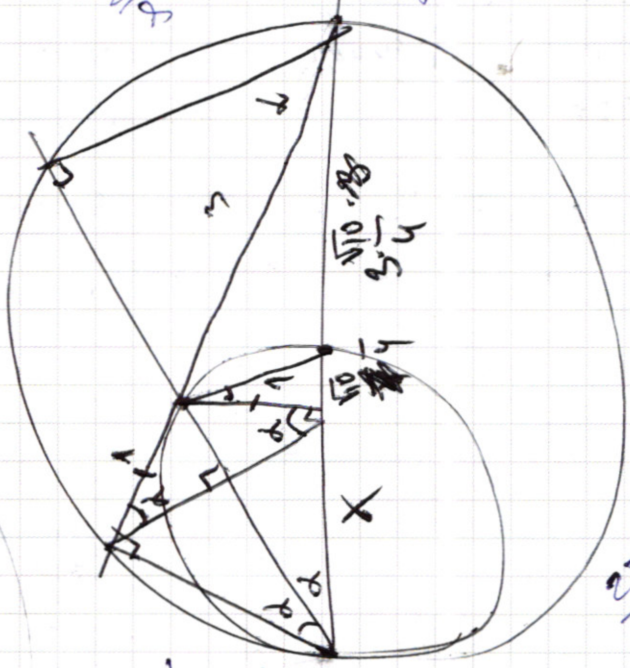
$\frac{7}{8}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$y = \frac{3}{4} - 1$

$1+9$





$y = kx + b$

$\frac{9}{8} - \frac{3}{4} - 1$

$$\begin{cases} \frac{k}{4} + b = -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{2}k + b = 2 \end{cases}$$

$k = \frac{3}{2}$

$\frac{7}{4}k = 2 + \frac{5}{8} = \frac{21}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)