МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$b=aq$; $c=aq^2$; где q – разность геометрической прогрессии с первыми тремя членами a, b и c

$ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow ax^2+2aqx+aq^2=0$

Если $a=0$, то все члены геометрической прогрессии – нули. ~~Четвертый~~ третий член прогрессии равен нулю.

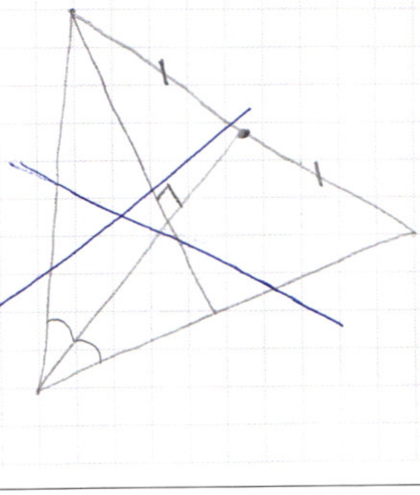
Если $a\neq 0$, то $ax^2+2aqx+aq^2 \Leftrightarrow x^2+2qx+q^2 \Leftrightarrow (x+q)^2=0$

$x=-q$. ~~Четвёртый член геометрической прогрессии равен $-q$ и равен aq^{2} ⟹ $q(aq^2+1)=0$~~

Четвёртый член геометрической прогрессии равен $-q$ и равен $aq^3 \Rightarrow q+aq^3=0 \Leftrightarrow q(aq^2+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow q(c+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=0 \\ c=-1 \end{array}\right.$. Если $q=0$, то третий член прогрессии равен $a\cdot 0^2=0$.

Ответ: -1 или 0.

№2.

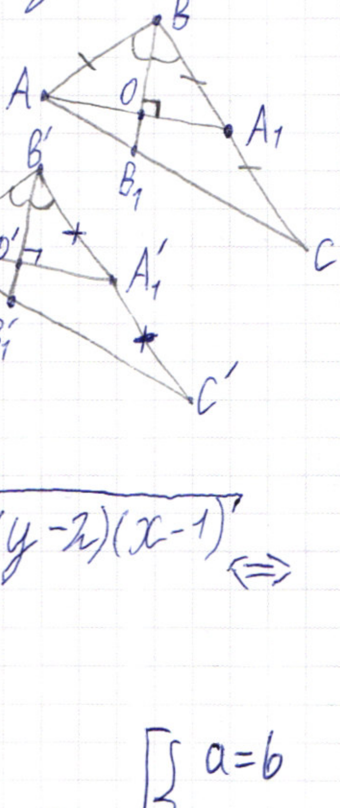


Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором медиана AA_1 перпендикулярна биссектрисе BB_1. $\angle AA_1, BB_1 \neq 0$ $\triangle ABO=\triangle A_1BO$ по катету и острому углу $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB=A_1B \Rightarrow AB=\frac{1}{2}BC$.

Рассмотрим $\triangle A'B'C'$, в котором проведены медиана $A'A'_1$ и биссектриса $B'B'_1$, а $2A'B' = B'C'$. $A'B' = A'_1B' \Rightarrow \triangle A'B'A'_1$ – равнобедренный. ~~В~~ Пусть $A'A'_1 \cap B'B'_1 = O'$. Тогда $B'O'$ – биссектриса равнобедренного $\triangle A'B'A'_1$, проведённая к основанию. $\Rightarrow \angle B'O'A'_1 = 90°$.

Перпендикулярн~~ость~~а одн~~ой~~а из биссектрис треугольника одной из его медиан ~~равносильны~~ тогда и только тогда, когда одна из сторон треугольника вдвое больше другой стороны треугольника. Задача сводится к нахождению всех ~~натуральных~~ троек натуральных чисел вида $a, 2a, 1200-3a$

$$\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ 1200-3a \in \mathbb{N} \\ 2a \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a < 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \in [1; 399] \end{cases}$$



Ответ: 399.

№3.

Пусть $a = x-1$, $b = y-2$.

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

$$b-2a=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-5ab+b^2=0 \\ b \geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(4a-b)=0 \\ b \geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a=b \\ a \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a^2+a^2=3 \\ a=b \\ a \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2+16a^2=3 \\ 4a=b \\ a \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\pm 1 \\ a=b \\ a \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\pm\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 4a=b \\ a \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.} \quad \cancel{b=} \quad \left[\begin{array}{l} a=b=-1 \\ \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ b=\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

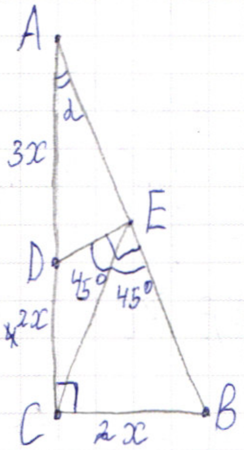
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x=a+1 \\ a=-1 \\ \cancel{b} \; y=b+2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a+1 \\ a=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=b+2 \\ b=\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{6+\sqrt{6}}{6} \\ y=\frac{6+2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Ответ: $(0;-1),\left(\frac{6+\sqrt{6}}{6};\frac{6+2\sqrt{6}}{3}\right)$.

№4.



а) $\angle DCB+\angle DEB=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow$ четырёхугольник $BCDE$ вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DC}{BC}=\frac{2R\sin(\angle DEC)}{2R\sin(\angle BEC)}=\frac{\sin(\angle DEC)}{\sin(\angle BEC)}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin(90^\circ-45^\circ)}=1$, где R – радиус окружности, описанной около четырёхугольника $BCDE$. Пусть $AD=3x$. Тогда $DC=BC=2x$. Пусть $\angle CAB=\alpha$. $tg\alpha=\frac{2x}{3x+2x}=\frac{2}{5}$

б) $AC=5x=\sqrt{29} \Rightarrow CD=2x=\frac{2\sqrt{29}}{5}$.

~~$DE=AD\cdot tg\alpha=3x\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{2}{5}=$~~

$DE=AD\cdot\sin\alpha=3x\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{3\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{2x}{\sqrt{29}x}=\frac{6}{5}$

$\sin(\angle EDC)=\sin(\pi-\angle ADE)=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{\sqrt{29}}$

$S_{DEC}=\frac{1}{2}ED\cdot CD\cdot\sin(\angle CDE)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}=1,2$

Ответ: $tg(\angle BAC)=\frac{2}{5}$; $S_{DEC}=1,2$.

№5

Пусть R и r - радиусы окружностей Ω и ω соответственно

а) $\triangle ACB \sim \triangle ODB$ по двум углам $\Rightarrow \frac{2R}{2R-r} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6R = 8R - 4r \Leftrightarrow R = 2r$

$BD^2 = AB(AB-2r) \Leftrightarrow 9 = 2R\cdot(2R-2r) \Rightarrow 2R\cdot 2\cdot(R-r) = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

б) $\sin(\angle AOD) = \sin(\angle BOD) = BD : BO = 3 : (2R-r) = \frac{3}{3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}} = \frac{12}{9\sqrt{2}} =$

$= \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos(\angle AOD) = -\frac{1}{3} \Rightarrow AD = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos(\angle AOD)} =$

$= r\sqrt{2(1-\cos(\angle AOD))} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\frac{4}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ по теореме косинусов

$DE = \frac{BD\cdot CD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, т.к. AE и BC - хорды окружности Ω

~~S_A~~ ~~E~~ AB - диаметр $\Omega \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow BE = \cancel{AB^2} \sqrt{BD^2 - DE^2} =$

$= \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$ по теореме Пифагора

$\sin(\angle EDB) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$S_{ACEB} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot BC\cdot \sin(\angle EDB) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $\cancel{\frac{3}{2\sqrt{2}}; 3\sqrt{}}$ $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{ACEB} = 4\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$\frac{-aq\pm\sqrt{a^2q^2-a^2q^2}}{+a}=-q$

$aq^3=-q$

$q(aq^2+1)=0$

· $aq^2=\boxed{c=-1}$

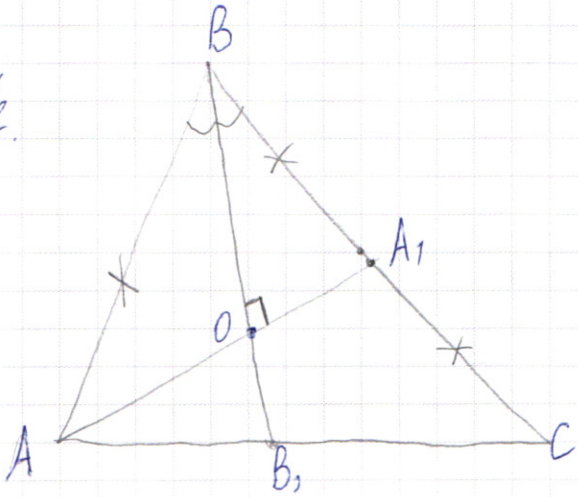
· $q=0=b$

$x=0$

$\boxed{c=0}$

$a, 0, 0, 0$

№2.



$a, 2a, b$

$3a+b=1200$

$(a, 2a, 1200-3a)$

$\boxed{399.}$

№3.

$y-2x=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$y-2x=(y-2)-2(x-1)$

$(2x^2-4x+2)+(y^2-4y+4)=3$

$\begin{cases} 2(x-1)^2+(y-2)^2=\cancel{(\sqrt{3})^2}\,3 \\ -2(x-1)+(y-2)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \end{cases}$ $a=x-1, b=y-2$

$1 \quad \frac{1}{4}$

$\begin{cases} 2a^2+b^2=\cancel{(\sqrt{3})^2}\,3 \\ -2a+b=\sqrt{ab} \end{cases}$ $4a^2-4ab+b^2=ab$ $4a^2-5ab+b^2=0$

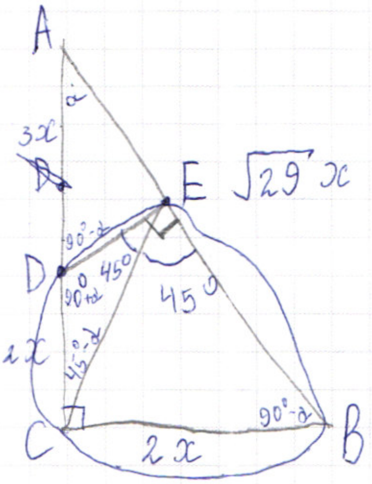
$b\geq 2a$

№3

$$\frac{2\sqrt{6}+6}{3}-\cancel{2}\frac{6+\sqrt{6}}{3\cancel{6}}=\sqrt{\frac{(6+\sqrt{6})(2\sqrt{6}+6)}{18}-2\frac{6+\sqrt{6}}{6}-\frac{2\sqrt{6}+6}{3}+2}$$

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{6}+\cancel{6}-\cancel{6}-\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{\cancel{12\sqrt{6}}+\cancel{6\sqrt{6}}+\cancel{36}+12-\cancel{36}-\cancel{6\sqrt{6}}-\cancel{12\sqrt{6}}-\cancel{36}+\cancel{36}}{18}}$$

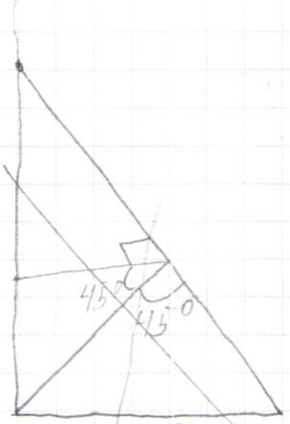
$$\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \checkmark$$



№4

$$tg\,α=\frac{2}{5}\qquad \sin α=\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\boxed{α=arctg\frac{2}{5}}\qquad \cos α=\frac{5}{\sqrt{29}}$$



~~№5~~

$$5x=\sqrt{29}\qquad 3x=\frac{3\sqrt{29}}{5}$$

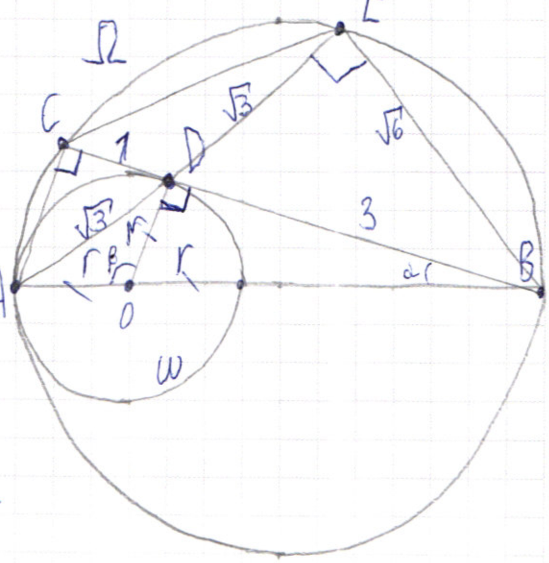
$$DE=\frac{3\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}=\frac{6}{5}$$

$$DC=\frac{2\sqrt{29}}{5}$$

$$\sin\left(α+\frac{\pi}{2}\right)=\cos α$$

$$S_{ECD}=\frac{1}{2}DC\cdot DE\cdot\cos α=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}=\boxed{\cancel{0{,}6}}\ 1{,}2$$

№5.



$$\frac{2R}{2R-r}=\frac{4}{3}\qquad R=2r$$

$$2R(2R-2r)=9$$

$$6R=8R-4r\qquad 2R\cdot2(R-r)=9$$

$$0=2R-4r\qquad 4r\cdot2\cdot r=9$$

$$8r^2=9$$

$$r=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}\qquad r=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\qquad R=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\cancel{2R-r=3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{12\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}}$$

$$\cancel{\sin α}=\ \overset{tg}{\cancel{\sin}}\,α=\frac{3\sqrt{2}}{4}:3=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(\angle DOB)=2\sqrt{2}$$

$$tg(\cancel{\angle DO}\ \pi-\angle DOB)=-tg(\angle DOB)=-2\sqrt{2}$$

$$\cancel{\sin(\angle DOA)=}$$

$$\begin{cases}\sin^2β+\cos^2β=1\\ \cancel{\sin}\ \frac{\sin β}{\cos β}=tg β\end{cases}$$

$$\cos β=\frac{\sin β}{tg β}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\cancel{4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5}$ $(a-b)(4a-b)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ 4a=b \end{array}\right.$ $b\geq 2a$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a\geq 2a \end{cases} \\ \begin{cases} 4a=b \\ 4a\geq 2a \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\leq 0 \\ a=b \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 0 \\ 4a=b \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ 4a=b \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ a=b \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a^2+16a^2=3 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2+a^2=3 \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2=\frac{1}{6} \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2=0 \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right.$ $a=\frac{\sqrt{6}}{6}=x-1$

$b=\frac{\sqrt{6}}{24}=y-2$

$x=\frac{\sqrt{6}}{6}+1=\boxed{\frac{6+\sqrt{6}}{6}}$

$y=\boxed{\frac{48+\sqrt{6}}{24}}$

$\frac{48+\sqrt{6}}{24}-2\cdot\frac{6+\sqrt{6}}{6_3}=\sqrt{\frac{48+\sqrt{6}}{24}\cdot\frac{6+\sqrt{6}}{6}-2\cdot\frac{6+\sqrt{6}}{6}-\frac{48+\sqrt{6}}{24}+2}$

$\frac{48+\sqrt{6}}{24}-\frac{48+8\sqrt{6}}{24}=\frac{1}{12}\sqrt{288+54\sqrt{6}+6-48(6+\sqrt{6})-6(48+\sqrt{6})}$ 288

$y\geq 2x$

$\frac{48+\sqrt{6}}{24}\geq 2\frac{6+\sqrt{6}}{6}$ $|\cdot 24$

$48+\sqrt{6}\geq 48+8\sqrt{6}$

$0\geq 7\sqrt{6}$ X

$\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b-2a=\sqrt{ab} \end{cases}$ $b^2-4ab+4a^2=ab$

$(a-b)(4a-b)=0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ b\geq 2a \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b\geq 2a \end{cases} \end{array}\right.$ $\cancel{a\geq 0}$ $\cancel{b\geq 2a}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ a\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$a^2=\frac{1}{6}$

$a=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ✓

$a^2=1$

$a=-1$, $b=-1$ ✓

$\boxed{x=0, y=1}$ ✓

$2\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{9}\cdot 6=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot 2=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=\frac{9}{3}=3$

$\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{x=\frac{\sqrt{6}+6}{6}, y=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5.

$$\cancel{\sin^2\beta + \frac{\sin^2\beta}{tg^2\beta} = 1}$$

$$\cancel{\frac{\sin^2\beta\, tg^2\beta + \sin^2\beta}{tg^2\beta} = 1}$$

$$\cancel{\sin^2\beta = \frac{tg^2\beta}{1+tg^2\beta}}$$

$$\cancel{\sin\beta = \pm\frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \pm\frac{-2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$\cdot \sin\beta = \sin(\angle CAO) = 4 : 3\sqrt{2} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\beta = -\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}\ -\frac{1}{3}$

$\cdot AD = \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos\beta} = r\sqrt{2(1-\cos\beta)} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\frac{4}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$
$= \sqrt{3}$

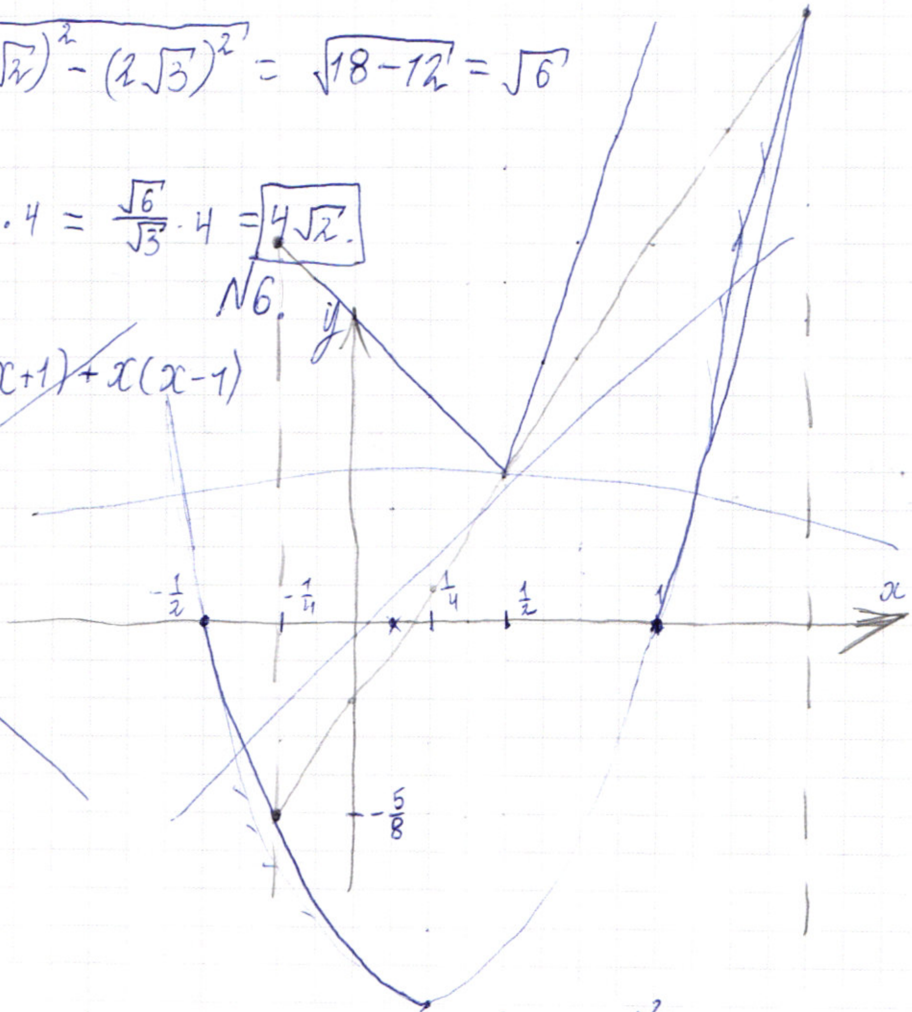
$DE = \sqrt{3}$

$\cdot \sqrt{AB^2 - AE^2} = BE = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{18-12} = \sqrt{6}$

$\cdot \sin(\angle EDB) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cdot S_{ACEB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\cdot 4 = \boxed{4\sqrt{2}}$

№6.



$\cancel{y = 2x^2 - x - 1 = (x^2+1)(x+1) + x(x-1)}$

$\cancel{y = (x-1)(2x+1)}$

$\cancel{\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y = 3x - 1 \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y = 1 - x \end{cases}}$

$\cdot \cancel{a > 0}$

$\begin{cases} a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + b \geq -\frac{5}{8} \;|\cdot(-8) \\ a\cdot\frac{3}{2} + b \geq 2 \;|\cdot 2 \end{cases}$

$\cancel{\begin{cases} a - 4b \leq -\frac{5}{2} \\ 3a + 2b \geq 4 \;|\cdot 3 \end{cases}}$ $\begin{cases} 2a - 8b \leq +5 \\ 3a + 2b \geq 4 \end{cases}$

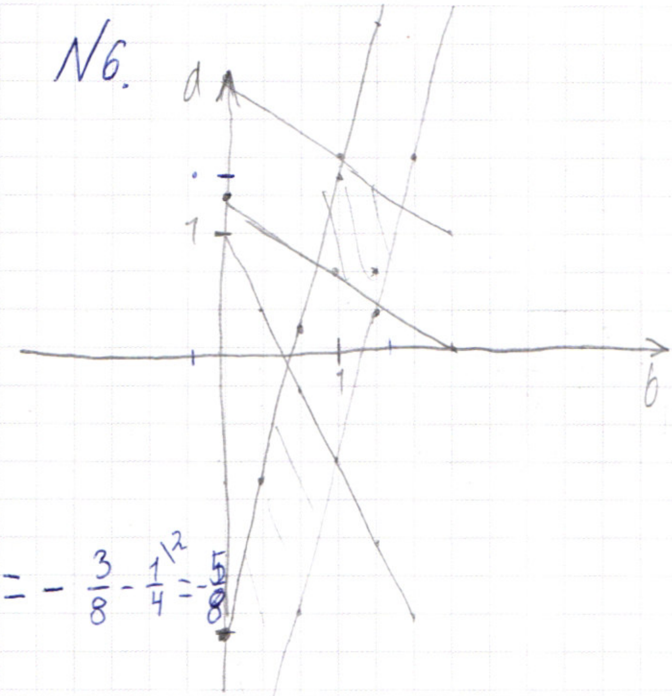
$\begin{cases} a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + b \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ a\cdot\frac{1}{2} + b \leq \frac{1}{2} \\ a\cdot\frac{3}{2} + b \leq 3\frac{1}{2} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\begin{cases} 2a-8b\le +5 \\ 3a+2b\ge 4 \\ a-4b\ge -5 \\ a+2b\le 1 \\ 3a+2b\le 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\le 4b+2,5 \\ a\ge -\frac{2}{3}b+\frac{4}{3} \\ a\ge 4b-5 \\ a\le -2b+1 \\ a\le -\frac{2}{3}b+\frac{7}{3} \end{cases}$$



~~$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$~~
~~$\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$~~
~~$-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$~~

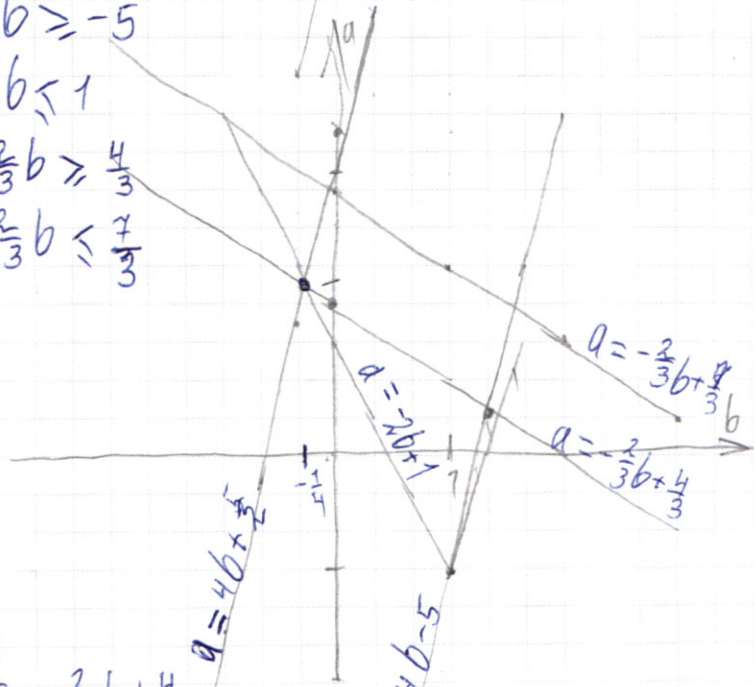
$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

$y\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{5}{8}$

$\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a+b\ge -\frac{5}{8} & |\cdot(-4) \\ -\frac{1}{4}a+b\le \frac{5}{4} & |\cdot(-4) \\ \frac{1}{2}a+b\le \frac{1}{2} & |\cdot 2 \\ \frac{3}{2}a+b\ge 2 & |\cdot\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}a+b\le 3,5 & |\cdot\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a-4b\le \frac{5}{2} \\ a-4b\ge -5 \\ a+2b\le 1 \\ a+\frac{2}{3}b\ge \frac{4}{3} \\ a+\frac{2}{3}b\le \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\le 4b+\frac{5}{2} \\ a\le 4b-5 \\ a\le -2b+1 \\ a\le -\frac{2}{3}b+\frac{4}{3} \\ a\le -\frac{2}{3}b+\frac{7}{3} \end{cases}$$



$4b+2,5=-2b+1$

$6b=-1,5$

$b=-\frac{1}{4} \qquad a=1,5$

$4b+2,5=-\frac{2}{3}b+\frac{4}{3}$

$\frac{14}{3}b=\frac{8}{6}-\frac{5}{2}=\frac{8}{6}-\frac{15}{6}=-\frac{7}{6}$

$14b=-\frac{7}{2} \qquad b=-\frac{1}{4} \qquad a=1,5$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$

№7.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{14}{18}\right)=f(14)+f\left(\frac{1}{18}\right)=f(2)+f(7)+f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

1) $f(a)=f(a)+f(1) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$

2) $f\left(\frac{1}{k}\right)+f(k)=f(1)$

$\boxed{f\left(\frac{1}{k}\right)=-f(k)}$

3) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=2f(2)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=3f(2)=3$

$f(9)=2f(3)=2$

$f(10)=f(5)+f(2)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=2f(2)+f(3)=3$

$f(13)=6$

$f(14)=f(2)+f(7)=4$

$f(15)=f(3)+f(5)=3$

$f(16)=4f(2)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=2f(3)+f(2)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=2f(2)+f(5)=4$

$f(21)=f(7)+f(3)=4$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

~~1·20+~~ 0 – 1 3 – 6 6 – 1

1 – 2 4 – 4 8 – 1

2 – 4 5 – 1 9 – 1

~~1·20+2·17+4·13+6·7+4·3+5·1·2+1·1=~~

$1\cdot20+2\cdot18+4\cdot14+6\cdot8+4\cdot4+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1=$

$=20+36+56+48+16+3+2+1=56+56+64+6=112+70=\boxed{182}$

Ответ: 182