МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(5)=2$
$f(7)=3$
$f(11)=5$
$f(13)=6$
$f(17)=8$
$f(19)=9$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1)=1$

$f\left(\frac{1}{16}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right)$

$\sqrt{\frac{167}{83}}$

$+ 6 + \frac{167}{83} - 6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Известно, что $a = a$; $b = ak$; $c = ak^2$, где k – шаг прогрессии (делитель).

Если ak^3 – корень $ax^2 - 2bx + c = 0$, т.е. $ax^2 - 2akx + ak^2 = 0$

$x = \frac{2ak \pm 2\sqrt{4a^2k^2 - 4a^2k^2}}{2a} = \frac{2ak}{2a} = k = ak^3$ по условию =>

=> $ak^2 = 1$, но $ak^2 = c$ = третьему члену прогрессии =>

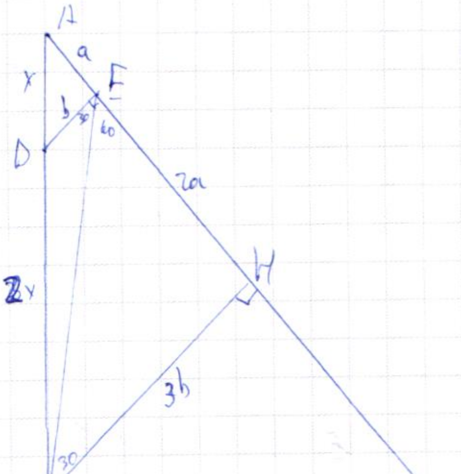
=> $\boxed{\text{Ответ: 1.}}$ ~~Понятно, что $k \neq 0$, поэтому можно было делить (иначе $b = c = 0$~~

Это вариант при $k \neq 0$, а если $k = 0$, то прогрессия вида $a; 0; 0; 0 \ldots$ тогда $ax^2 - 2bx + c = 0$ => $ax^2 = 0$ =>

=> $x = 0$ => есть решение, т.е. третий член 0 или 1.

Ответ: 0 или 1.

№4.



а) Проведём высоту в $\triangle ABC$ CH.

Если $AD = x$; $DC = 2x$, т.к. $AD : AC = 1 : 3$

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$ по 2 углам: $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ$; $\angle BAC$ – общий. => $k = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$,

т.е. если $AE = a$, то $EH = 2a$; если $DE = b$, то $CH = 3b$. $\angle CEH = 60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$.

Из $\triangle CEH$: $tg\, 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{3b}{2a} = \cancel{\frac{b}{a}}$

Но $tg \angle BAC$ из $\triangle DAE$: $tg \angle BAC = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ~~Ответ: $2\sqrt{3}$~~.

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$ Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

б) $AC = \sqrt{7} = 3x$ => $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$. $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ =>

=> $a = \frac{\sqrt{3}\, b}{2}$, но $a^2 + b^2 = x^2$, т.е. $\frac{3}{4}b^2 + b^2 = \frac{7}{9}$ из т. Пифагора $\triangle ADE$ =>

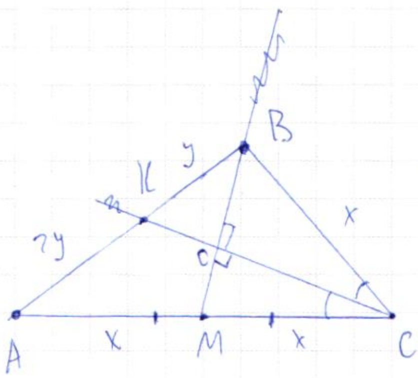
№4 б (продолжение). $\Rightarrow \frac{7}{4}b^2 = \frac{7}{9}$, т.к. $b^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$.

$a = \frac{2\sqrt{3}b}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. $S_{\triangle ADE} = \frac{ab}{2}$. $S_{\triangle AHC} = \frac{3a \cdot 3b}{2}$ $S_{\triangle CEH} = \frac{2a \cdot 3b}{2}$

$S_{\triangle DEC} = S_{\triangle AHC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CEH} = \frac{9ab}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{6ab}{2} = \frac{2ab}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3 \cdot 2\sqrt{3}}$.

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{3 \cdot 2\sqrt{3}}$.

№2.



Сначала рассмотрим случай, когда медиана и биссектриса из разных углов, тогда пусть $AM = x = MC$ (BM - медиана) $\Rightarrow \triangle MCO = \triangle OBC$ по II признаку: $\angle BCO = \angle OCM$ из условия (CO - биссектриса). $\angle BOC = \angle COM = 90°$ CO - общая сторона. O - точка пересечения CO и BM, т.е. медианы и биссектрисы. $\Rightarrow BC = CM = x$. $CO \cap AB =$ т. K.

По св-ву биссектрисы $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1} \Rightarrow$ пусть $AK = 2y$; $KB = y$.

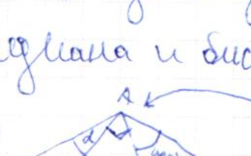
Тогда периметр $\triangle ABC = 3x + 3y = 900$ по условию $\Rightarrow x + y = 300$

Все стороны целые $\Rightarrow$ 299 вариантов ($x=1$; $y=299$; $x=2$; $y=298$... $x=299$ $y=1$), но надо проверить неравенство $\triangle$, т.е. $3y \leq 2x+x$, т.е. $3y \leq 3x \Rightarrow y \leq x$ и $2x \leq 3y + x \Rightarrow x \leq 3y$ для третьей стороны x будет выполняться всегда, когда для $2x$ выполняется, т.е.

$$\begin{cases} y \leq x & (1) \\ x \leq 3y & (2) \\ x + y = 300 & (3) \end{cases} \Rightarrow \cancel{x \leq 225} \quad (2) \text{ и } (3) \Rightarrow x \leq 225 \quad (1 \text{ и } 3) \Rightarrow y \leq 150$$

$x \in [150; 225] \Rightarrow$ ~~76~~ 74 вариантов

Случай, когда медиана и биссектриса из одного угла не подходит, т.к. и медиана и биссектриса лежат внутри любого угла, из которого выходят $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 

угол больше 180° т.к. угол в 90° лежит по одну сторону от биссектрисы $\Rightarrow$ и с другой стороны от неё угол хотя бы 90°, но в $\triangle$ все углы $< 180°$.

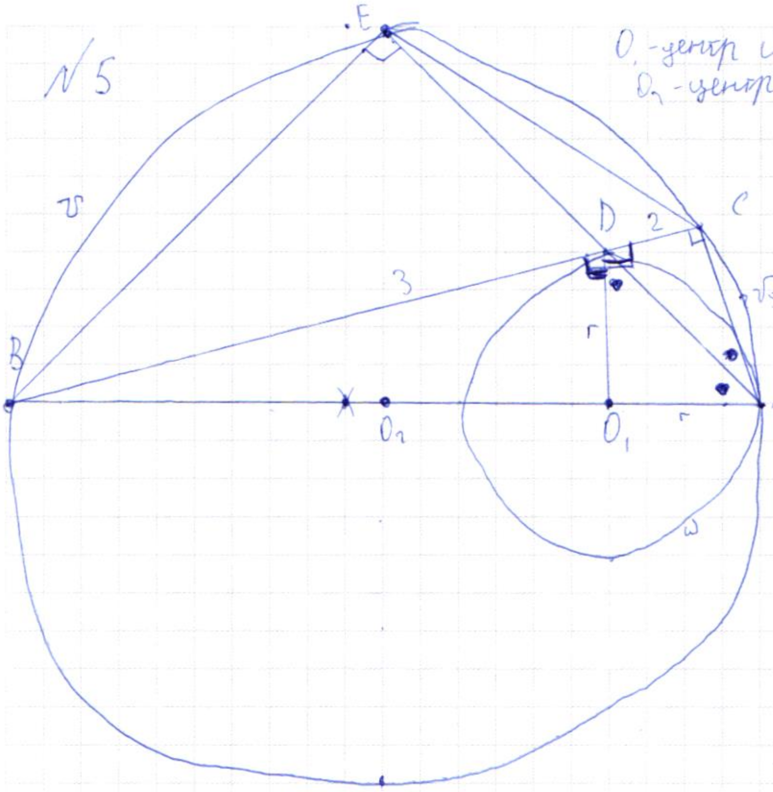
$\angle A = (90° + \alpha) \cdot 2 = 180° + 2\alpha$

Ответ: 74.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5

O_1 - центр ω
O_2 - центр ν



Центры окружностей лежат на AB, т.к. мы знаем, что т. касания всегда лежит на линии центров.

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta O_1BD$, по 2 углам: $\angle ACB = \angle O_1DB = 90^\circ$; $\angle ABC$ - общий. $\Rightarrow \frac{CA}{O_1D} = \frac{BC}{BD} = \frac{5}{3}$ $\angle O_1DB = 90^\circ$, т.к. это угол между радиусом и касательной.

$O_1D = r \Rightarrow AC = \frac{5}{3}r$. $O_1A = O_1D = r \Rightarrow \angle O_1AD = \angle O_1DA = \bullet$

$\angle ADC = 90^\circ - \bullet$ из $\angle O_1DC - \angle O_1DA$, но $\angle DAC = 90^\circ - \angle ADC$ из $\Sigma \angle$ в ΔADC.

$\angle DAC = 90^\circ - (90^\circ - \bullet) = \bullet$ $\Rightarrow AE$ - биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$ по св-ву $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}r = \frac{5}{2}r = 2R$ (r - радиус ω; R - радиус ν). По т. Пифагора ΔABC: $5^2 + \frac{25}{9}r^2 = \frac{25}{4}r^2$ $\frac{125}{36}r^2 = 25$

$\frac{5}{36}r^2 = 1 \Rightarrow \boxed{r = \frac{6}{\sqrt{5}}}$ $2R = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{R = \frac{3}{2}\sqrt{5}}$.

$AC = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{5}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5} \Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ACB} = 3\sqrt{5}$.

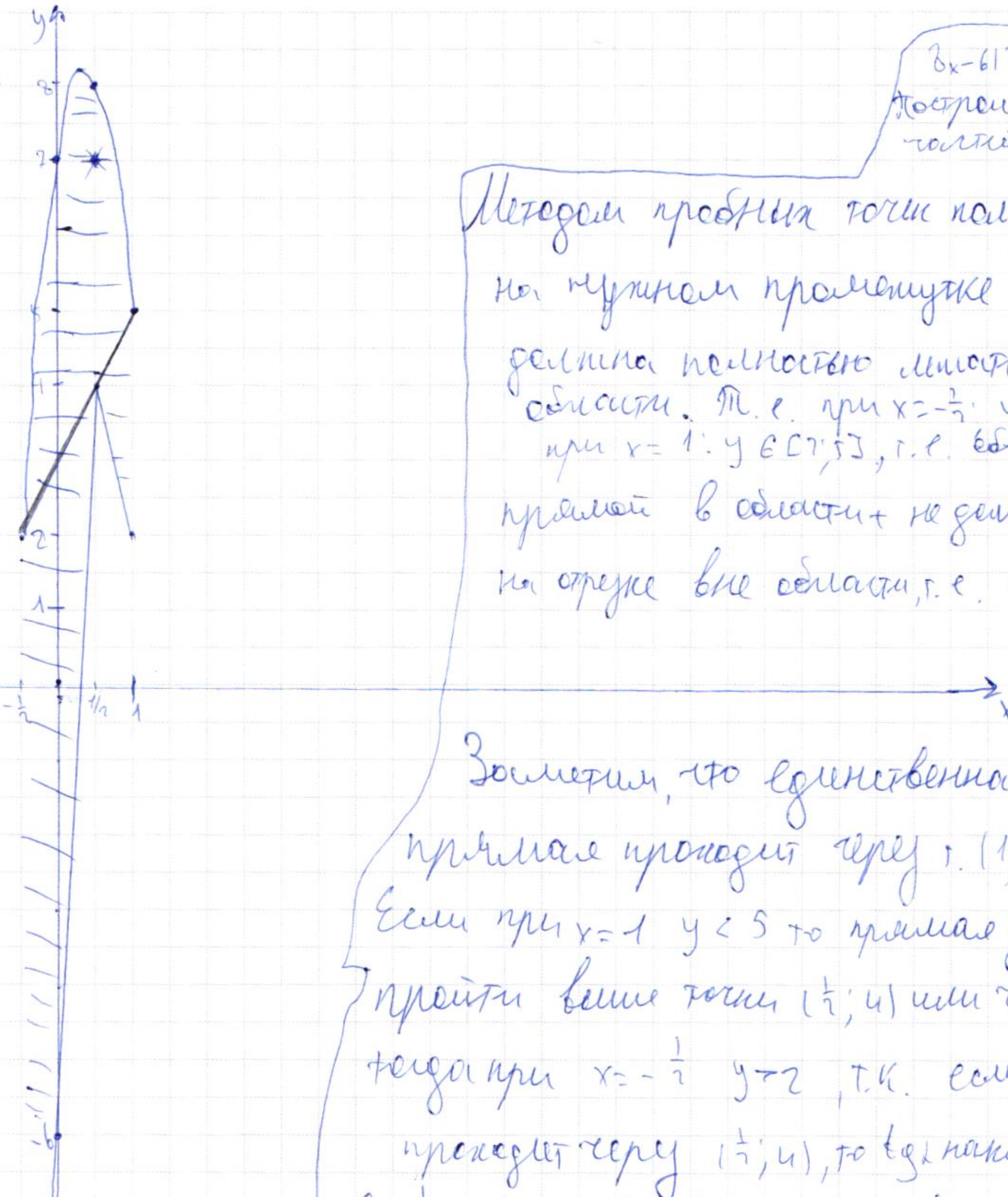
$\Delta ABE \sim \Delta ACD$ по 2 углам: $\angle EAB = \angle EAC$, $\angle BEA = \angle DCA = 90^\circ$, т.к. опираются на диаметр AB. $k = \frac{AB}{AD} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$, т.к. $AB = 2R = 3\sqrt{5}$, $AD^2 = 4 + 20$ из ΔACD по т. Пифагора. $\frac{S_1}{S_2} = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{45}{24} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_{\Delta ABE} = \frac{45}{24} \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{45}{24} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{45\sqrt{5}}{12} = \frac{15\sqrt{5}}{4}$. $\Delta AEC \sim \Delta ABD$ по 2 углам: $\angle BAD = \angle EAC$, $\angle CAE = \angle CBA$, т.к. опираются на одну дугу CA.

$k = \frac{CA}{DA} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$, $k^2 = \frac{5}{6}$. $\Rightarrow S_{ACE} = \frac{5}{6}S_{ABD} = \frac{5}{6} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

$S_{ABEC} = S_{ABE} + S_{AEC} = \frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{15\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$. Ответ: $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $R = \frac{3}{2\sqrt{5}}$, $S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



$|8x-6|-|7x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

Построим график. обеих частей только с x.

Методом пробных точек получаем, что на нужном промежутке прямая должна полностью лежать в заштрих. области. Т.е. при $x=-\frac{1}{2}$: $y \in [-16;7]$, а при $x=1$: $y \in [7;5]$, т.е. оба конца отрезка прямой в области + не должно быть точек на отрезке вне области, т.е. в зоне под $|8x-6|-|7x-1|$

Заметим, что единственная нужная прямая проходит через т. $(1;5)$, $(\frac{1}{2};4)$ и $(-\frac{1}{2};2)$. Если при $x=1$ $y<5$ то прямая должна пройти выше точки $(\frac{1}{2};4)$ или через неё, но тогда при $x=-\frac{1}{2}$ $y>2$, т.к. если $x=1$ $y<5$ и проходит через $(\frac{1}{2};4)$, то угл наклона $< \frac{2}{1}$, тогда в $-\frac{1}{2}$ $y>7$. В общем, мы взяли граничные условие и подошла 1 прямая в притык, понятно, что больше нет. Единственное решение:

$x=1$, $y=5$; $x=\frac{1}{2}$, $y=4$ $\Rightarrow$ $y=kx+b$, т.е. $\begin{cases} 5=k+b \\ 4=\frac{1}{2}k+b \end{cases} \Rightarrow 1=\frac{1}{2}k \Rightarrow$

$\Rightarrow k=2$. $b=3$. $ax+b=y$, т.е. $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Ответ: $a=2$; $b=3$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. продолжение. Описание построения графиков:

Для $8x-6|2x-1|$ $x=\frac{1}{2}$ переходная точка $y=4$ тут.

При $x=1: y=2$; при $x=0$; $y=-6$ так строим это выражение.

Для $-8x^2+6x+7$: парабола, ветви вниз, $x_в=\frac{-6}{-16}=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{8}$. $y(\frac{3}{8})=8\frac{1}{8}$; $y(1)=5$; $y(+\frac{1}{2})=2$. Так строим параболу.

~~№3~~ $\begin{cases} x-6y=2\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6y=2\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

$(x-6)=a$, $(y-1)=b$ $\Rightarrow$ $2\sqrt{ab}=x-6y$, $a^2+2b^2=18$ $\quad x-6y=2\sqrt{ab} \Rightarrow x-6y\geq 0 \Rightarrow x\geq 6y \Rightarrow$

$\Rightarrow 6a=6x$ $\quad 6b=6y-6\leq a$, т.к. $a\geq 6y-6$, т.к. $x\geq 6y$

Итого, $\begin{cases} a\geq 6b \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow a^2\geq 36b^2 \Rightarrow a^2+2b^2=18\geq 38b^2$

№3. $\begin{cases} x-6y=2\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6y=2\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

Введём $a=x-6$, $b=y-1$ $\Rightarrow \begin{cases} a-6b=2\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $\quad a-6b\geq 0$; $\begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+36b^2-13ab=0 \quad (1) \\ a^2+2b^2=18 \quad (2) \end{cases}$ ~~Из (2): $a^2=2(9-b^2)=2(3-b)(3+b) \to b(1)$~~

~~$18-2b^2+36b^2\pm 13\sqrt{18-2b^2}\,b=0$~~ $\quad$ Из (1): $a=\frac{13b\pm\sqrt{25b^2}}{2}=9b;\ 4b \to$

~~$34b^2\pm 13$~~

$\to$ во (2): $\left[\begin{array}{l} 81b^2+2b^2=18 \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}=\pm 3\sqrt{\frac{2}{83}} \\ 16b^2+2b^2=18 \Rightarrow b=\pm 1 \end{array}\right.$

$a=9b=\pm 27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$ или $a=4b=\pm 4$.

Проверка под ОДЗ, чтобы под корнем ≥ 0 и корень равнялся неотрицательному: $\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} b=3\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \\ a=27\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \end{cases}$

$\begin{cases} b=-3\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \\ a=-27\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \end{cases}$ ~~Так~~ Во втором уравнении ОДЗ нет $\Rightarrow$ только для I: $\sqrt{ab}=a-6b$ $ab\geq 0$, это верно для всех пар, т.к. везде они в одном знаке; $a-6b\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ не подходит. и

$\begin{cases} a=-27\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \\ b=-3\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \end{cases}$ не подходит.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=27\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \\ b=3\sqrt[3]{\frac{2}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=27\sqrt[3]{\frac{2}{83}}+6 \\ y=3\sqrt[3]{\frac{2}{83}}+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. 2 решения.

№7. $f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(5)=2$; $f(7)=3$; $f(11)=5$; $f(13)=6$; $f(17)=8$; $f(19)=9$; $f(4)=f(2)\cdot f(2)=1$; $f(6)=f(3)\cdot f(2)=1$ ... Любой $x\leq 22$ и y будут натуральными $\Rightarrow f(x)\in\mathbb{N}$, т.к. $x=p$ или $x=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, ~~а~~ а $f(p_i)\in\mathbb{N}$.

$f(2\cdot 1)=f(2)\cdot f(1)=1=1\cdot f(1)\Rightarrow f(1)=1$.

$f(x/y)=f(x)\cdot f(\frac{1}{y})$ $f(x)>0\Rightarrow f(\frac{1}{y})<0$, если $f(x/y)<0$.

~~$f(0{,}5)=f(\ )\cdot f(\ )=\dots$~~

$f(\frac{1}{n^2})\geq 0$, т.к. $f(\frac{1}{n^2})=f(\frac{1}{n})\cdot f(\frac{1}{n})=f^2(\frac{1}{n})$, т.е. $f(\frac{m}{n^2})\geq 0$. $m,n\in\mathbb{N}$

$f(n)=f(n^2)\cdot f(\frac{1}{n})$ $n\in\mathbb{N}$ $f(n)\geq 0$, т.к. $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, а $f(p_i)\in\mathbb{N}$,

$f(n^2)\geq 0\Rightarrow f(\frac{1}{n})\geq 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow f(\frac{m}{n})=f(m)\cdot f(\frac{1}{n})\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Таких пар x и y, что $x\in\mathbb{N}$, и $y\in\mathbb{N}$, и $f(\frac{x}{y})<0$ не существует.

Ответ: 0.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$a \quad ax \quad ax^2$~~ $\quad a \quad ak \quad ak^2 \quad ak^3$

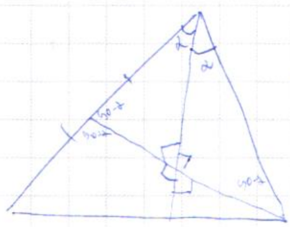
$a \quad b \quad c$

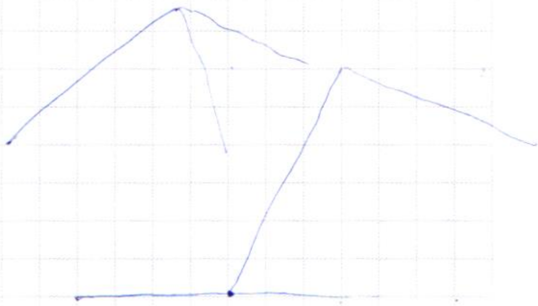
$\frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = ak^3$ $\quad 2a^2k^3 = 2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}$

$a^2k^3 = ak \pm \sqrt{a^2k^2 - a^2k^2}$

$a^2k^3 = ak \quad 1$

$ak^2 = 1$





$(x-6y) = \sqrt{y(x-6)-(x-6)^2} =$

$-\sqrt{(x-6)(y-1)} = x-6y$

$x-6=a$

$y-1=b$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 + 4b = 0$

$x^2+36y^2-12xy = xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+6y+x+36y^2-6=0$

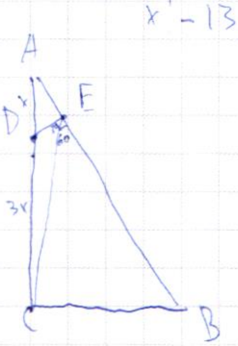
$\sqrt{ab} = x-6y$

$a^2+2b^2=18$

$(x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

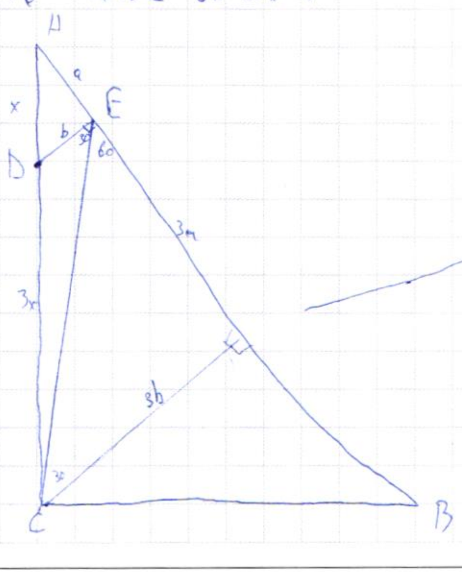
$\frac{75}{225}$

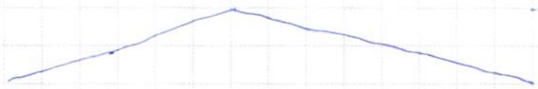


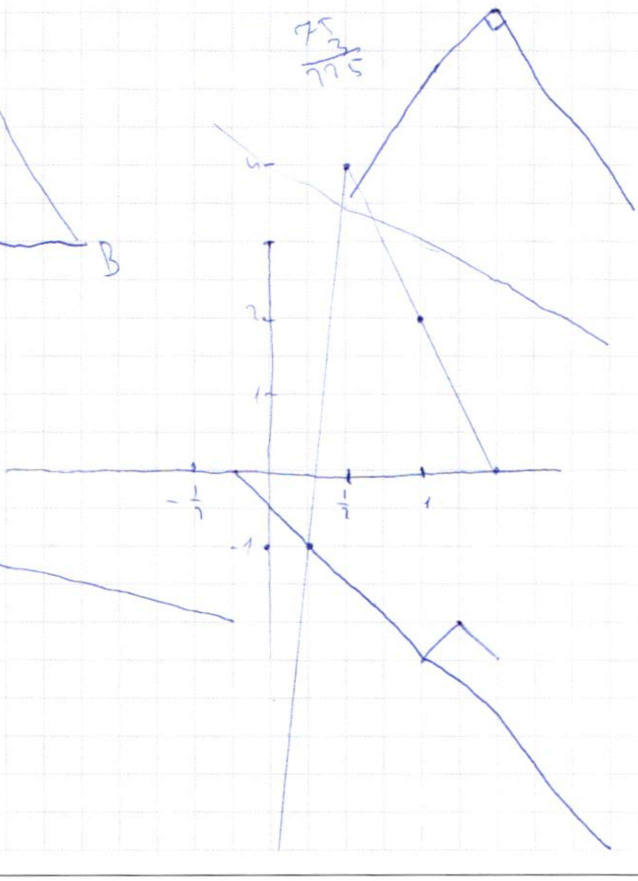
$x \in [\frac{1}{2}; 1]$:

$8x - 12x + 1$

$-4x+6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$







$-4x+6$

$20x-6$

$a = 13b \pm \sqrt{169b^2}$

$a_1 = \frac{13b \pm 5b}{2}$

$\frac{36}{4}$ 144

$x-6=a$

$y-1=b$

$1393b^4$

$a^4+6^4b^4 = -\frac{97}{4}a^2 - 97b^4 + \frac{97}{4}\cdot 18^2$

$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{3}r}{L} = \frac{2}{3}$

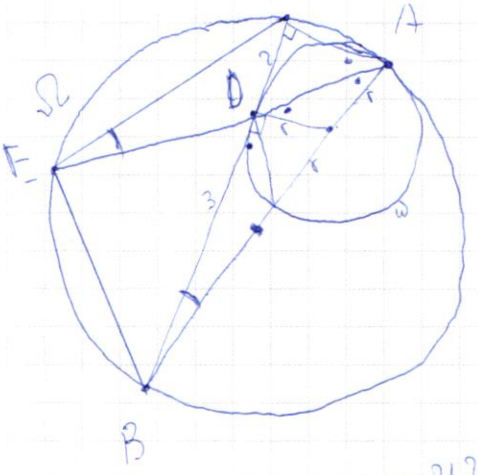
$L = \frac{5}{2}r = R$

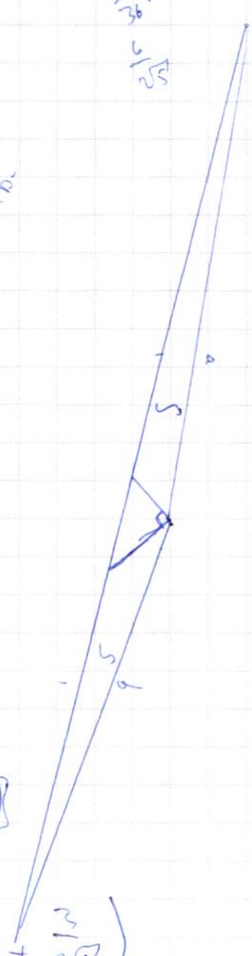
$\frac{25}{9}r^2 = \frac{25}{4}r^2$

$\frac{125}{36}r^2 = 25$

$\frac{5}{36}r^2 = 1$

$\frac{6}{\sqrt{5}}$





$-4a^2b^2 = a^4+4b^4-18^2$

$a-6b$

$x-6$

$97a^2b^2 = a^4+6^4b^4$

$a^4+4b^4 = 18^2-4a^2b^2$

$36 \cdot 36 = 1296$, $+97 = 1393$

$x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6}$

$x-6=a$

$y-1=b$

$xy-6y-x+6$

$x>6y$

$\sqrt{ab^2} = x-6y$

$a^2+2b^2=18$

$b<3$

$a<5$

$\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=3 \\ a=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}$

$b \in \left[-\frac{3}{2\sqrt{14}}; \frac{3}{2\sqrt{14}}\right]$

$\left(1-\frac{3}{2\sqrt{14}}; 1+\frac{3}{2\sqrt{14}}\right)$

$x>6y$

$6y-6$

$a^4+6^4b^4+72a^2b^2 = 169a^2b^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)