

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Решение.

1) Пусть a_0 - первое число прогрессии, q - коэффициент прогрессии, тогда первые члены данной прогрессии: $a_0, a_0q, a_0q^2, a_0q^3$ ($a_0 \neq 0$ и $q \neq 0$)

2) Т.к. a, b, c - это первые 3 члена прогрессии соответственно, то перепишем уравнение в виде: $a_0x^2 + 2a_0qx + a_0q^2 = 0$

$$D = (2a_0q)^2 - 4a_0 \cdot a_0q^2 = 0 \Rightarrow \text{единств. корень}$$

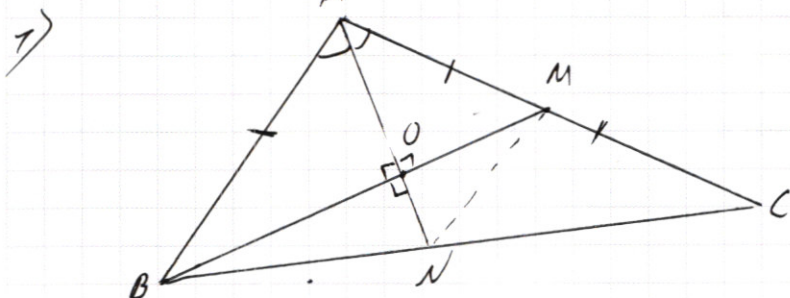
$$x = \frac{-2a_0q}{2a_0} \Rightarrow x = -q \text{ т.к. } a_0 \neq 0$$

3) Тогда т.к. IV член прогрессии - корень, то:

$$a_0q^3 = -q \Rightarrow a_0q^2 = -1 \text{ т.к. } q \neq 0 \text{ т.е. 3-й член прогрессии равен } -1.$$

Ответ: -1 .

№2



2) Пусть $\triangle ABC$, где BM - медиана, $AN \perp BM$
~~каждый из~~ медиана и биссектриса проведены из
разных вершин т.к. в треугольнике медиана
~~и биссектриса~~ медиана и биссектриса

если равен медиана и биссектриса ~~не~~ лежат
внутри угла, тогда если есть AN и AM - биссектриса
и медиана соответственно, то из отр. биссектрисы
 $\angle A \geq 2\angle MAN$ н.р. в нашем случае $\angle A \geq 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ это
быть не может, значит медиана и биссектриса
проверены из разных углов.)

3) Пусть $AN \cap BM = O$, тогда н.к. по условию $AN \perp BM$,
то $\angle AOB = \angle AOM = 90^\circ$ (по отр. перпендикулярных прямых)

4) $\angle BAO = \angle CAO$ (по отр. биссектрисы)
 $\angle AOB = \angle AOM$
 AO - общая сторона } \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle BAO = \triangle MAO$ (по стороне и 2 прилежащим к ней углам) \Rightarrow

$\Rightarrow BA = MA$ (по отр. равных треугол.) } \Rightarrow
 $AM = \frac{1}{2} AC$ (по отр. медианы)

$\Rightarrow AB = \frac{1}{2} AC$ - в треугольнике соотв. условию.

5) Тогда пусть $AB = a$, тогда $AC = 2a$, а $BC = b$,
тогда запишем систему:

$$\begin{cases} a + 2a + b = 1200 & \text{- по отр. периметра} \\ 2a < a + b \\ b < 2a + a \\ a < b + 2a \end{cases} \text{ по н-ву треугольника}$$

6) Из нее $\begin{cases} 3a + b = 1200 \\ a < b < 3a \end{cases} \Rightarrow 300 < b < 600$, тогда возмозжны
значения b всего ~~299~~ 299, по

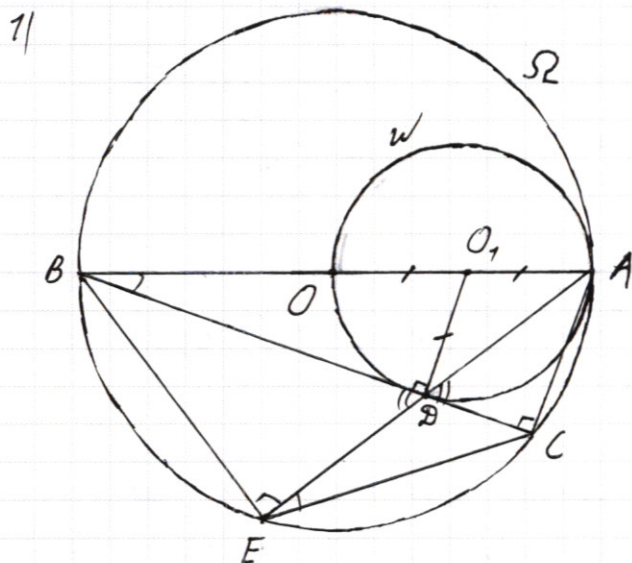
$1200 - b = 3a$ и т.к. $a, b \in \mathbb{Z}$, то $a = 1200 - b : 3 \Rightarrow b : 3 \Rightarrow$

\Rightarrow всего $[299/3] = 99 \Rightarrow 99$ различных в т.ч. 99 разн. треугольников

Ответ: 99

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5
Геометрия



2) $\angle ABC$ - острый

$\angle O_1DB = 90^\circ$ - по т. о касательной

$\angle ACB = 90^\circ$ - (по св-ву впис. угла опирающегося на диаметр.)

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ (по 2 соотв. равным углам)

3) Пусть R - радиус Ω , а r - радиус ω

4) Тогда из $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD \Rightarrow \frac{BO_1}{BD} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{AB - AO_1}{BD} = \frac{AB}{BD + DC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2R - r}{3} = \frac{2R}{4} \Rightarrow 8R - 4r = 6R \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r$$

5) Заметим, что $O_1D = O_1A$ (по оп. радиуса окружности),

тогда из $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD \Rightarrow \frac{BO_1}{O_1D} = \frac{BA}{BD}$ $\angle BDO_1 = 90^\circ$ по

теореме Пифагора: $BD^2 + O_1D^2 = BO_1^2 \Rightarrow 9 + O_1A^2 = (AB - O_1A)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9 + r^2 = (2R - r)^2 \Rightarrow 9 + r^2 = (4r - r)^2 \Rightarrow 9 + r^2 = 9r^2 \Rightarrow 9 = 8r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

6) Тогда $R = 2r = 2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

7) $\angle BDE = \angle BDC$ (как по т. о верт. углах)

$\angle BEA = \angle ACB$ (как вписанные опирающиеся на одну дугу) \Rightarrow

$\Rightarrow \Delta BDE \sim \Delta ADC$

8) Аналогично: $\Delta BAD \sim \Delta ECD$ \Rightarrow

$\Rightarrow S_{BDE} = \left(\frac{BD}{AD}\right)^2 \cdot S_{ADC}$ и $S_{BAD} = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2 S_{ECD}$, тогда т.к.

по аксиоме измерения площади: $S_{ABCE} = S_{BAD} + S_{ADC} + S_{ECD} + S_{BDE}$, то: $S_{ABCE} = S_{ADC} + \left(\frac{BD}{AD}\right)^2 S_{ADC} + S_{BAD} + S_{BAD} \cdot \left(\frac{CD}{AD}\right)^2 =$

$= \left(1 + \frac{BD^2}{AD^2}\right) S_{ADC} + \left(1 + \frac{CD^2}{AD^2}\right) S_{BAD}$

9) $\Delta BDO_1 \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow O_1D = AC = \frac{4}{3} \cdot O_1D \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \frac{4}{3} O_1A \Rightarrow AC = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

10) $\angle BCA = 90^\circ$ (по св-ву впис. угла опир. на диаметр) \Rightarrow

\Rightarrow по т. Пифагора: $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

11) Так как $\angle BCA = 90^\circ$, то $S_{BCA} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

12) Также: $\frac{S_{BAD}}{S_{CAD}} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{1}$ (по св-ву ~~равновеликости~~ ^{треугольников} ~~равновеликости~~)

13) Тогда $S_{BAD} = \frac{3}{4} \cdot S_{BCA} = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, а $S_{CAD} = \frac{1}{4} S_{BCA} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

14) Из этого: $S_{ABCE} = \left(1 + \frac{3^2}{\sqrt{3}^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1^2}{\sqrt{3}^2}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = (1+3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $4\sqrt{2}$

н.т.
Заметки.

1) Заметим, что для прямой имеет значения ^{цели} функции известны, а для всех остальных ^{цели} значений можно определить как $f(ab) = f(a) + f(b)$ т.к. ~~любо~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- целые числа расширяется на простые множители
(0 - это исключение, по от взаимно простым не взаим.)
- 2) Составим из этого таблицу значений функции
для всех натуральных чисел от 1 до 21.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(n)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f(n)	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

- 3) Если $f(ab) = f(a) + f(b)$, то при $a \in \mathbb{N}$ $b = \frac{1}{a}$: $f(1) = f(a) + f(b) \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$
- 4) Тогда $f(\frac{x}{y}) < 0$ если $f(x) < f(y)$ т.к. $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$
- 5) Тогда для каждого x от 1 до 21 найдём по таблице
 количество y т.ч. $1 \leq y \leq 21$ и $f(x) < f(y)$, сумма
 полученных значений и будет искомым
 количеством пар.

6) ~~$1=20+2 \cdot 18+4 \cdot 14+6 \cdot 8+4 \cdot 4+3+2+1+0$~~

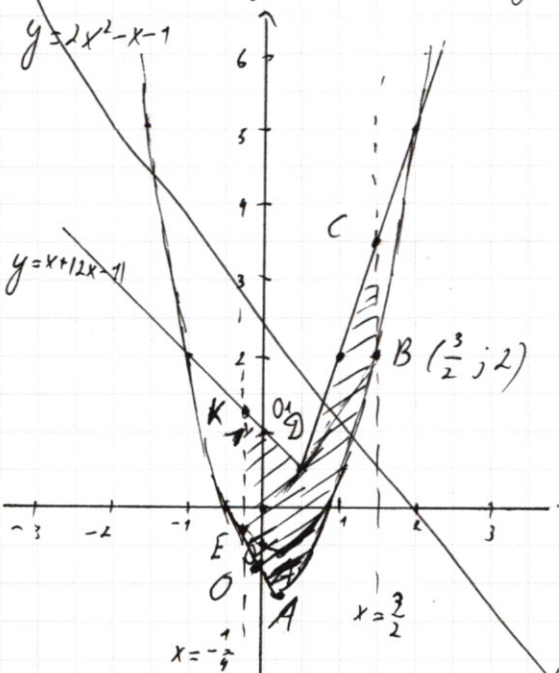
$$1 = 20 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 + 0 =$$

$$= 20 + 36 + 56 + 48 + 16 + 6 = 56 + 56 + 54 + 16 =$$

$$= 112 + 70 = 182$$

Ответ: 182 пар.

1) Схематично параболы графиков $2x^2 - x - 1$ и $x + 12x - 1$



$y = 2x^2 - x - 1$ - вершина
 параболы в точке: $A(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8})$
 $y = x + 12x - 1$ м.р. $\begin{cases} y = 3x - 1 \text{ при } x \geq 0.5 \\ y = 1 - x \text{ при } x < 0.5 \end{cases}$

Заметим, что это бы
 неравенство выполняется
 отрезок $ax + b$ при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ должен
 увеличиваться в заданной области.

ИЗвр): $a \geq 0 \Rightarrow ax + b$ - возрастает

2) Заметим, что т.к. парабола возрастает, а
 п-во выполняется на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$, то тогда
 при $x = \frac{3}{2}$: $ax + b \geq 2$ м.р. $\frac{3}{2}a + b \geq 2$, а следовательно
 для точки $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$: $3\frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}a + b \geq 2$

3) Аналогично для $D(0.5; 0.5)$: $0.5 \geq 0.5a + b$

4) И для $E(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$: $-\frac{5}{8} \leq -\frac{1}{4}a + b$ и $K(-\frac{1}{4};$

5) ~~И для точки D: в даву из т. А, Е, B, $-\frac{5}{8}$ и 0.5 : $-1 \leq b \leq 1$~~

6) Запишем систему:

$$\begin{cases} 2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3\frac{1}{2} \\ 0.5a + b \leq 0.5 \\ -\frac{5}{8} \leq -\frac{1}{4}a + b \leq 1\frac{1}{4} \\ a > 0 \\ -\frac{5}{8} \leq b \leq 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \leq 3a + 2b \leq 7 \\ 2a + a + 2b \leq 0.5 \\ -5 \leq -2a + 8b \leq 10 \\ -\frac{5}{8} \leq b \leq 0.5 \\ a > 0 \end{cases}$$

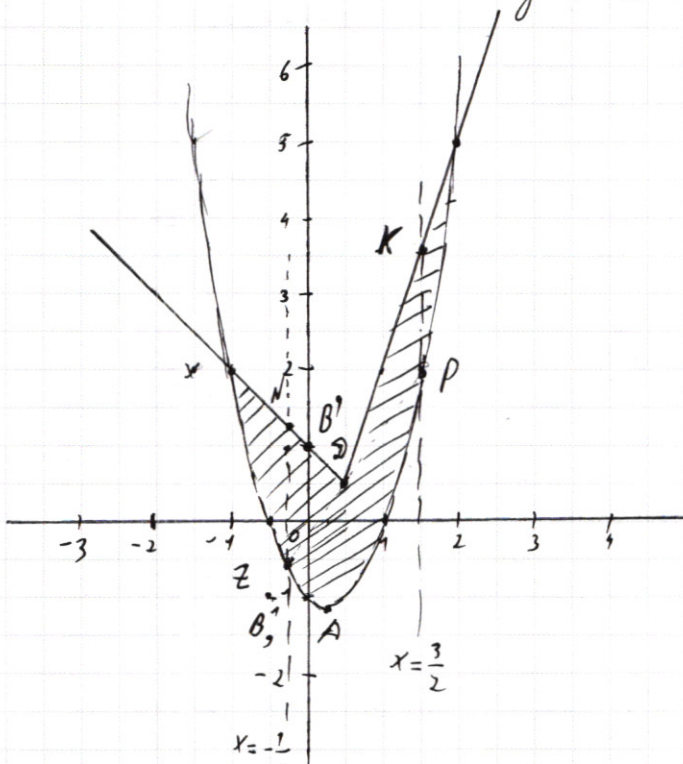
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

1) Нарисуйте графики функций: $y = 2x^2 - x - 1$ и

$$y = x + 1 \quad | \quad y = 2x - 1$$

2)



$y = 2x^2 - x - 1$ - вершина
параболы в т. $A(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$
 $y = x + 1 \quad | \quad y = 2x - 1$
 $\begin{cases} y = 3x - 1 \text{ при } x \geq 0.5 \\ y = 1 - x \text{ при } x \leq 0.5 \end{cases}$

3) Заметим, что это-был n -во выпуклого отрезок функции $y = ax + b$ определенной на $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$ должен лежать в закрашенной области от $-\frac{1}{4}$ до $\frac{3}{2}$ и ~~одна~~ его левый конец должен принадлежать ZN , а правый: KP и т.к. $ax + b$ - ~~прямая то~~ она при $x = 0.5$ имеет D .
Из этого и из того что для $x = 0$: $ax + b = b$ - составим систему неравенств ($a > 0$ т.к. Y ордината т. N меньше ординаты точки P , а значит $ax + b$ - возрастает

$$4) \begin{cases} -\frac{5}{8} \leq -\frac{1}{4}a + b \leq \frac{5}{4} \\ 0.5a + b \leq 0.5 \\ 2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq \frac{7}{2} \\ -1 \leq b \leq 1 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq -2a + 8b \leq 10 \\ a + 2b \leq 1 \\ 4 \leq 3a + 2b \leq 7 \\ -1 \leq b \leq 1 \\ a > 0 \end{cases}$$

5) Так как $a + 2b \leq 1$, то так как $a > 0$, то $b \leq 0.5$

6) ~~Заметим, что точка Z, D и P лежат на~~

~~прямой: $y = 0.5x + 1$~~ Заметим что при $b > 0$ реш. нет (по графику)

$$\Rightarrow \begin{cases} -15 \leq -6a + 4b \leq 30 \\ a + 2b \leq 1 \\ -1 \leq b \leq 0 \\ a > 0 \\ 8 \leq 6a + 4b \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq 2b \leq 0 \\ a + 2b \leq 1 \\ -1 \leq b \leq 0 \\ a > 0 \\ 4 \leq 3a + 2b \leq 7 \\ -5 \leq -2a + 8b \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} \leq b \leq 0 \\ -1 \leq b \leq -\frac{1}{2} \\ a + 2b \leq 1 \\ a > 0 \\ 4 \leq 3a + 2b \leq 7 \\ -5 \leq -2a + 8b \leq 10 \end{cases}$$

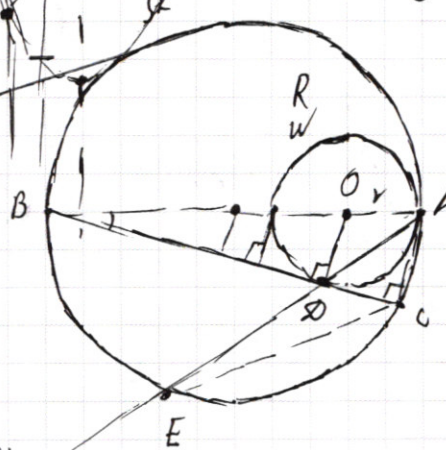
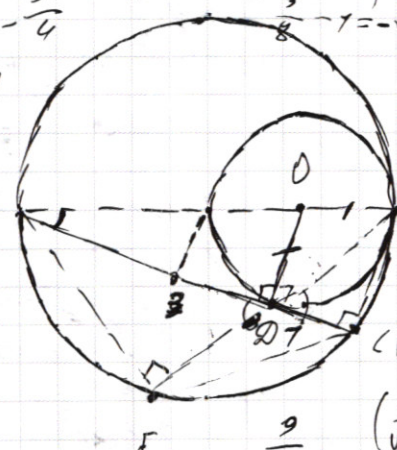
7) Заметим что точки Z, D, P лежат на

прямой уравнения $y = 1.5x - 1$, тогда заметим что т.т. данные a и b подходят по системе неравенств, то:

если увеличим или уменьшим a , то график $y = 1.5x - 1$ будет ниже Z или ниже P соответственно а из системы ~~не~~ b -единственного.

Ответ: $1.5 - 1$

$2x^2 - x - 1 = 2x - 1$ $2x^2 - x - \frac{5}{4}$
 $2x^2 - 4x = 0$ $x \geq 0.5$ $2x = 1$
 $x(x-2) = 0$ $x = 0$ $x = 2$
 $0.4 + 0.8 = 1$
 $y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$
 $y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$
 $4x^2 - 2xy^2 - 8x - 8y + 8 = 0$
 $-5xy + y^2 + 2x + y - 3 = 0$
 $4.5 - 1.5 - 1 = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1$
 $2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{2}{4} - 1$
 $\frac{R+V}{2} = \frac{eR}{2}$
 $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1$
 $\frac{1}{8} - \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{8} - \frac{10}{8}$



$\frac{R}{2}$
 $9 + V^2 = (R+V)^2$
 $9 + V^2 = 9V^2$
 $8V^2 = 9$
 $V = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$
 $8R + 4V = 6R$
 $2R - 4V = 0$
 $R = 2V$
 $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, \dots, aq, aq^2, aq^3, \dots$ - корень
 $298 \quad 297 \quad 3$
 $\frac{22}{99}$
 299

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$
 $D = (2aq)^2 - 4a^2q^2 = 0$
 $x = \frac{-2aq}{2a} = -q \neq 0$
 $-q = aq^3 \Rightarrow aq^2 = -1$
 $2x^2 - x - 1 = 0$
 $D = 1 + 4 = 5$
 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$2x^2 - x - 1 = 0$
 $3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$
 135
 $2x^2 - x - 1$
 $2x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$
 $(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{3}{2}$
 $(\sqrt{2}x)^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$3a + c = 1200$
 $3a > c$
 $c + a > 2a$
 301
 $q > 300$

$g - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$
 $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$
 $2x^2 - x - 1$
 $300 < c < 600$

299
 $901 > 3$
 3456
 $3d \ 160$
 599
 601
 $250 = 250 \cdot 3$
 601
 1200
 450
 750