МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(a+b-c)\cdot(a+b-c)^2=$

$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

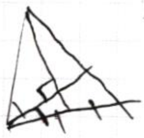
$\cancel{x-6y=\sqrt{3}}$

$+36 \quad -36 \quad -2+20$

$$\begin{cases}\sqrt{(x-6)(y-1)}=x-6y\\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18\end{cases}$$

$(x+y-7)^2 = x^2-12xy+36y^2+18-y^2+2y-1$

$x^2+y^2+49+2xy-14x-14y=x^2-12xy+36y^2+\dots$



$\cancel{14xy=34y^2}$

$x^2-26xy+34y^2=$

$32-14(x+y)$

$x^2-2\cdot 6x+36-36+2(y^2-2y+1)-2\cdot 1+20=0$

$$\begin{cases}(x-6)^2+2(y-1)^2=18\\ (x-6)^2\cdot(y-1)=(x-6y)^2\end{cases}$$

$a=m$

$b=m\cdot q$

$c=m\cdot q^2$

$d=m\cdot q^3=9$

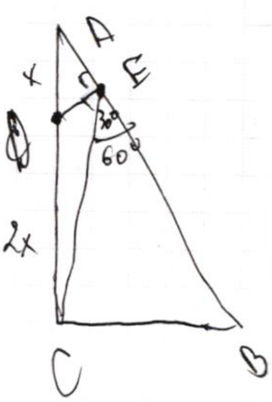
$d+x=2q$

$dx=q^2$

$x=2q-d$

$d^2-2qd+q^2=0$

$(d-q)^2=0$



$AED \sim ACB$

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

$\cancel{\frac{AB}{AE}}=\frac{3}{1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

№1

т.к a, b, c — посл. члены г.п. то

представим их так

$a = m$
$b = m \cdot q$
$c = m \cdot q^2$
$d = m \cdot q^3$ (четв-й член г.п. который является корнем ур-я)

т.к d — корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$,

то по т-ме Виета

$$\begin{cases} d + x_1 = \frac{2b}{a} = \frac{2m \cdot q}{m} = 2q \\ d \cdot x_1 = \frac{c}{a} = \frac{m \cdot q^2}{m} = q^2 \end{cases}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} d + x_1 = 2q \\ d \cdot x_1 = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2q - d & (1) \\ d x_1 = q^2 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

подст. x_1 в (2) ур-е

$$\Rightarrow \quad d(2q - d) = q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -d^2 + 2qd = q^2 \Rightarrow d^2 - 2qd + q^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (d - q)^2 = 0 \Rightarrow d = q$, а теперь

подст. $d = q$ в изн-е ур-ие для d

$$d = m \cdot q^3 = q \,|:q \Rightarrow mq^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = 1$

$\boxed{\text{Ответ: } c = 1}$ (третий член)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

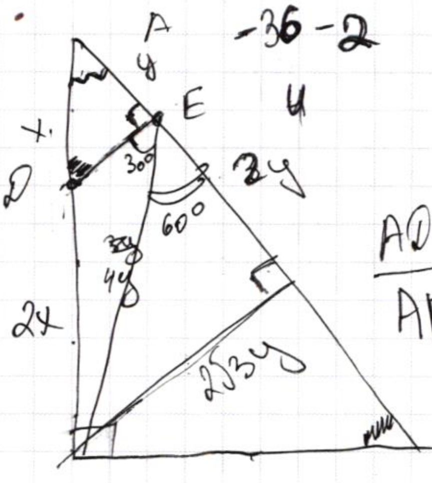
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-36-2$ $\quad$ u

$\frac{BC}{AC}$ – ?

$\frac{AD}{AC} = \frac{B}{3}$

$4y^2 + ny^2 = 16y^2$

$n = 12$

$2\sqrt{3}y$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ $\qquad$ $\frac{x}{AB} = \frac{AE}{3x}$

$9x^2 = 21y^2$

$7 = 2y^2$

$9x^2 = 17y^2 + 4y \cdot y$

$9x^2 = 21y^2$

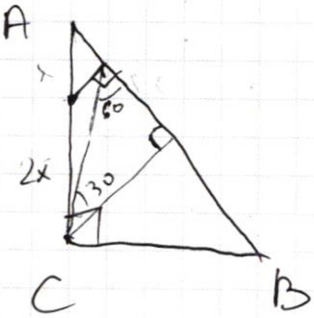
$\boxed{3y^2 = 1}$

$3x = \sqrt{7}$ $\qquad$ $3x^2 = 7y^2$

$tg = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$\sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \sqrt{7}$



$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot 4y$ $\qquad$ $\sqrt{3}y^2 = S$

$y^2 = \frac{1}{3}$

$\frac{18}{83} \cdot 2$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{3} = S_5$

$\frac{S_{DEC}}{S_5} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = S_{DEC}$

$u^2 - 12uv + 36v^2$

$u^2 - 2v^2$

$u(u-v) - 12v(u-v)$

$\begin{cases} (u-v)(u-12v) = 0 \\ u^2 + 2v^2 = 18 \end{cases}$

$((x-6) - 6(y-1))^2 = (x-6)(y-1)$

$18 = (y-1)(y-1+x-6)$

$\begin{cases} (x-6)^2 - 12(x-6)(y-1) + 36(y-1)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$(u-6v)^2 = uv$

$u^2 - 2v^2 = 18$

$6 \cdot - 2 \cdot 6^2 + 6 \cdot 6^2$

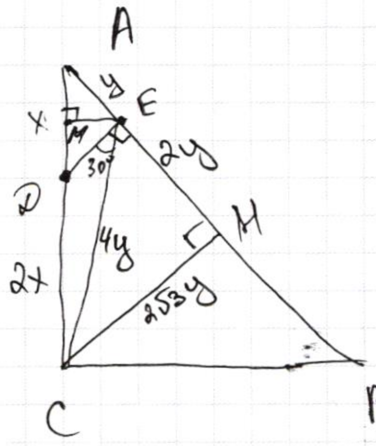
☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4



Дано:

$\triangle ABC$ ~~пр~~

$\angle C = 90°$, $\angle DEC = 30°$

$DE \perp AB$

$AD : AC = 1 : 3$

а) $tg\angle BAC$ — ?

б) $AC = \sqrt{7}$, S_{DEC} — ?

Решение:

1) Проведем высоту CH, т.к $CH \perp AB$ и $DE \perp AB$, то $CH \parallel DE$

2) т.к $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, то $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ => пусть

$AD = x$, $DC = 2x$;

По т-ме Фалеса отн. прямых AC и AH и $\parallel$ прямых DE и CH

Получаем, что $\cancel{\frac{AD}{AC}} = \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} = \frac{1}{2}$

Тогда пусть $AE = y$, $EH = 2y$

3) $\angle ECH = \angle DEC$ (как накрест лежащие)

По св-ву $\angle$ в $30°$ в прямоуг-м тр-ке получаем, что $EC = 2EH = 2 \cdot 2y = 4y$

4) $\angle AEC = \angle AED + \angle DEC = 90° + 30° = 120°$

По т-ме косинусов для $\triangle AEC$ и $\angle AEC$ имеем $9x^2 = y^2 + 4y^2 - 2 \cdot y \cdot 4y \cdot (-\frac{1}{2})$ =>

=> $(3x)^2 = 21y^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

5) По т-ме пифагора для $\triangle CEH$ получаем

$CH^2 + EH^2 = CE^2$

$CH^2 = 16y^2 - 4y^2 = 12y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CH = \sqrt{12y^2} = 2y \cdot \sqrt{3}$

$tg \angle BAC = tg \angle HAC = \frac{CH}{HA} = \frac{2\sqrt{3}y}{2y+y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

6) ~~из 4п.~~ $\Rightarrow$

из п.4 следует, что $(3x)^2 = 21y^2$

а значит $(\sqrt{7})^2 = 21y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

7) ~~$\frac{S_{DEC}}{S_{AEC}} = \frac{1}{2} \cdot F$~~ (пусть EM – перпенд-р к AC, тогда

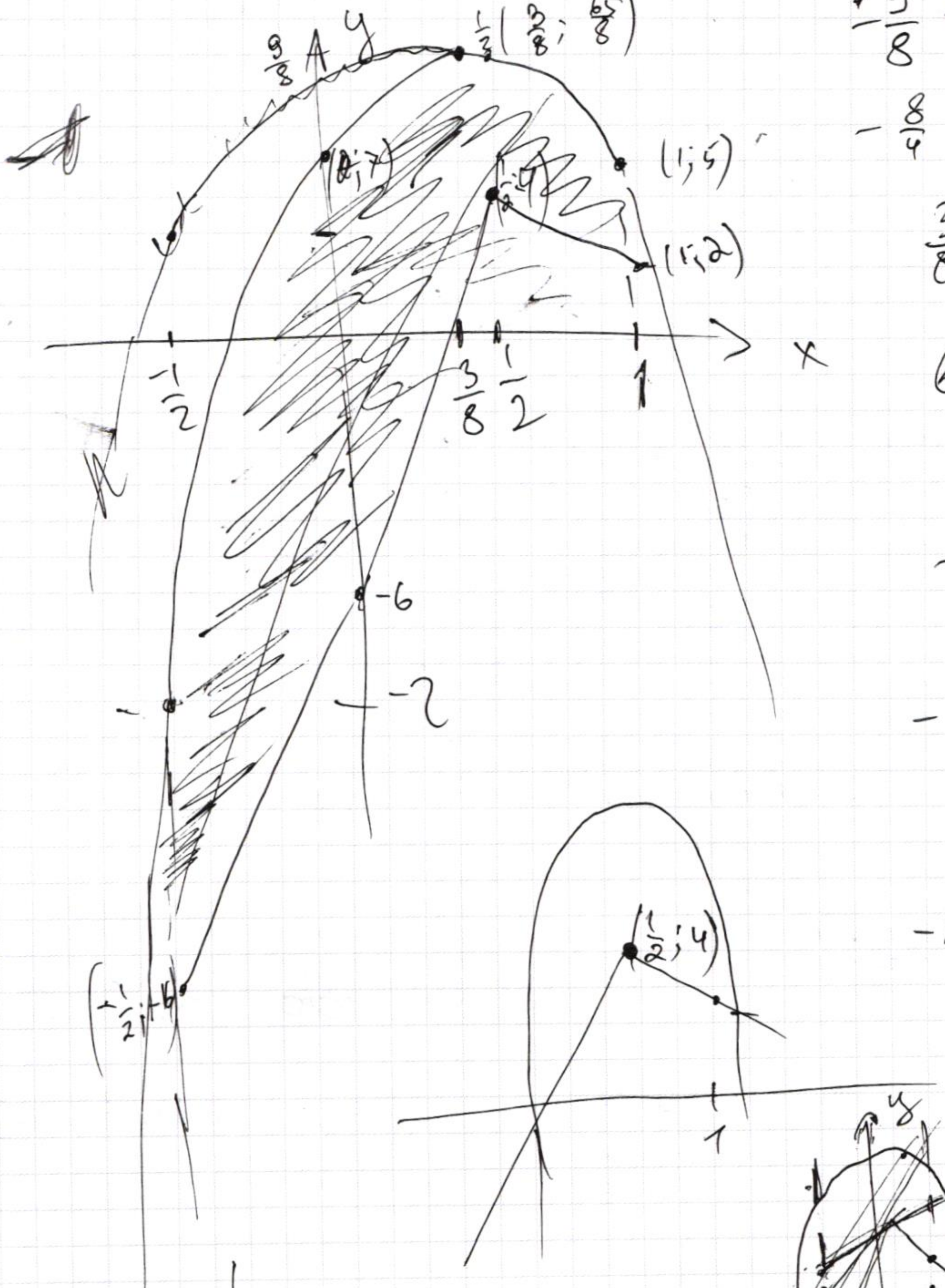
$\frac{S_{DEC}}{S_{AEC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot EM \cdot DC}{\frac{1}{2} \cdot EM \cdot AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{DEC} = \frac{2}{3} S_{AEC}$.

8) Найдем $S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \sin AEC \cdot AE \cdot EC =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4y \cdot y = \sqrt{3}y^2$ $\xrightarrow{\text{из п.6 имеем } y^2 = \frac{1}{3}}$ $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{DEC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, б) $S_{DEC} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$



$-\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7$

$-\frac{8}{4} - \frac{6}{2} + 7$

$\frac{3}{8}$

$b \leq 7$

$-4 - 12$

-16

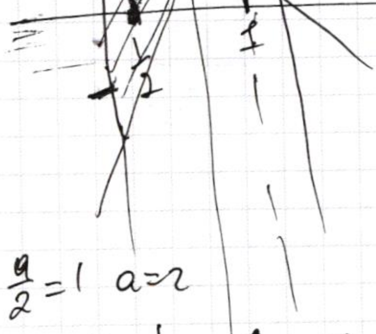
$-8 \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{2} + 7$

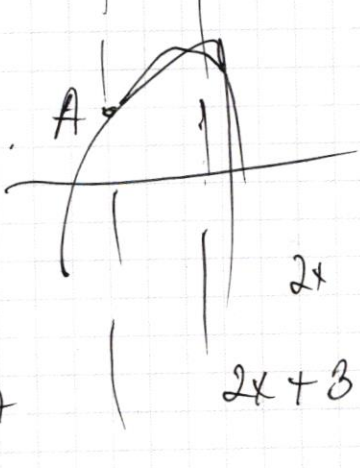
$-2 + 10$

8

$-8 + 6 + 7$

5





$-\frac{1}{2}$

$2x$

$2x + 3$

$\frac{a}{2} + b = 4 \quad \frac{a}{2} = 1 \quad a = 2$

$a + b = 5 \quad -8 \cdot \frac{1}{4} - \frac{6}{2} + 7$

$-2 - 3 + 7$

↓A
↑B
↓C

$A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ $B\left(\frac{1}{2}; 4\right)$

$C(1; 5)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

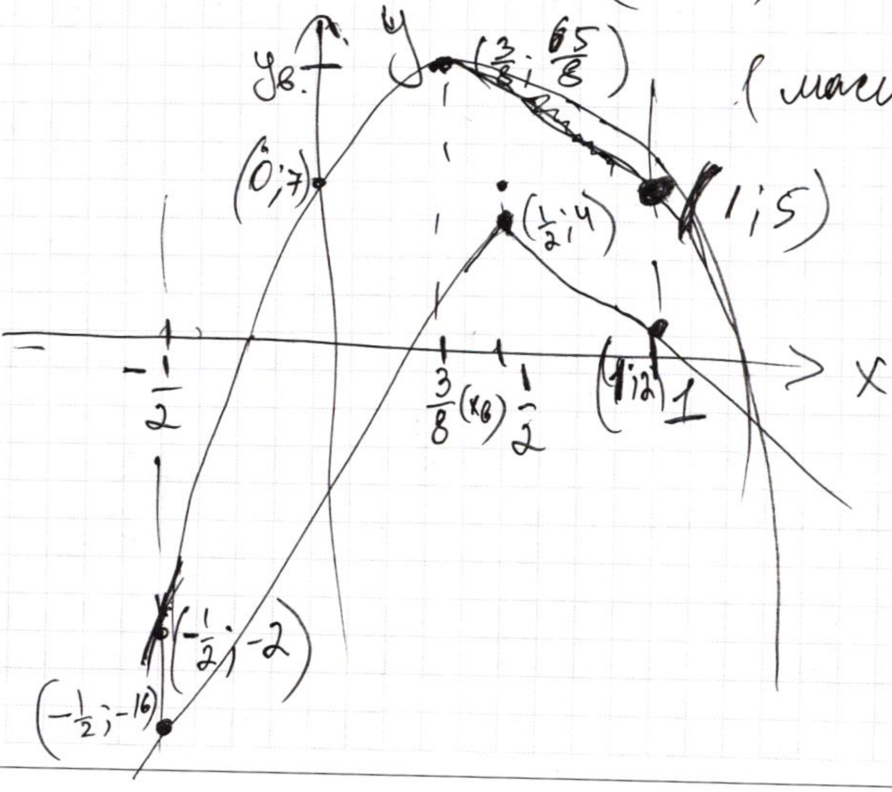
$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

Заметим, что 1-я часть $(8x - 6|2x-1|)$ → это прямая с изломом

а 2-я часть $(-8x^2+6x+7)$ это парабола ветвями вниз

Изобразим их на графике схематично (для I укажем точку излома и граничные точки в 0, $-\frac{1}{2}$ и 1)

для II ($x_в$, $y_в$ и точки в границ пром-ка и 0)



(масштаб не соблюден

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (продолж.)

Наша прямая должна быть выше графика с модулем ~~но~~ и при этом ниже графика параболы (на нашем промеж-ке ~~от~~ $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$)

следовательно прямая должна быть ~~выше~~ ниже (или проходить через нее) точки $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$, ~~и ниже и~~ выше (или проходить через нее) точки $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ и ниже (или проходить через нее) точки $(1; 5)$

Подставим $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ и $(1; 5)$ в ур-ие

$y = ax + b$ чтобы найти коэф. a и b.

$$\begin{cases} 4 = a \cdot \frac{1}{2} + b & (1) \\ 5 = a + b & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} (2)-(1):\ \frac{a}{2} = 1 \\ 5 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 5 = 2 + b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 2x + 3$, теперь подставим $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ и проверим пройдет ли через эту точку прямая $y = 2x+3$: $-2 = 2 \cdot -\frac{1}{2} - 3$ $\quad -2 = -2$ верно, следовательно a и b определ-ся единств-м образом.

Ответ: $(2; 3)$, т.е. $a = 2$, а $b = 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

Преобразуем (1)

$$x - 6 + 6 - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$$

$$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

~~Пусть $x-6=u$~~

① Пусть $x-6=u$
$y-1=v$, тогда

$$(u - 6v)^2 = uv$$

$$u^2 - 12uv + 36v^2 = uv$$

$$u^2 - 4uv - 9uv + 36v^2 = 0$$

$$u(u-4v) - 9v(u-4v) = 0$$

$$(u-4v)(u-9v) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} u = 4v & \text{(I)} \\ u = 9v & \text{(II)} \end{array}\right.$$

② Рассмотрим оба случая.

(I) ③ Преобразуем (2)

$$x^2 - 2 \cdot 6x + 36 - 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 2 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$u^2 + 2v^2 = 18$$

$$16v^2 + 2v^2 = 18 \Rightarrow 18v^2 = 18 \quad v^2 = 1 \Rightarrow v = \pm 1$$

(**) Вспомним что у нас было изначально

№3 (продолж.)

$\sqrt{uv}$ в (1) ур-ии $\Rightarrow$ $u \cdot v \geq 0$

ОДЗ: ↑

!!!

(4) Т.к ~~$v = \pm 1$ то $u =$~~

$v^2 = 1$ то $u^2 = 16v^2 = 16$

если $v = 1$ то $u = 4$ (из за ОДЗ)

а если $v = -1$, то $u = -4$ (↑)

Обр. замена

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-4 \\ y-1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

(II) из (п.3) возьмем что

$u^2 + 2v^2 = 18$

$81v^2 + 2v^2 = 18$

$v^2 = \frac{18}{83}$ $\quad v = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

если $v = \sqrt{\frac{18}{83}}$ то $u = 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

а, если $v = -\sqrt{\frac{18}{83}}$, то $u = -9\sqrt{\frac{18}{83}}$

Обр. замена:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1 = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-6 = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1 = -\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = -\sqrt{18/83} + 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (см. после всего реш-я ниже)

$(10; 2)$, $(2; 0)$

$\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6; \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)$,

$\left(-9\sqrt{\frac{18}{83}}+6; -\sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

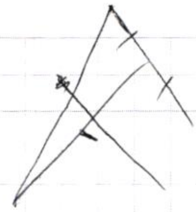
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

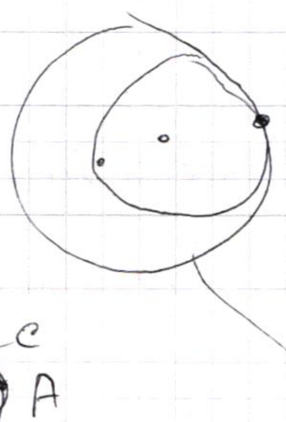
~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)$~~

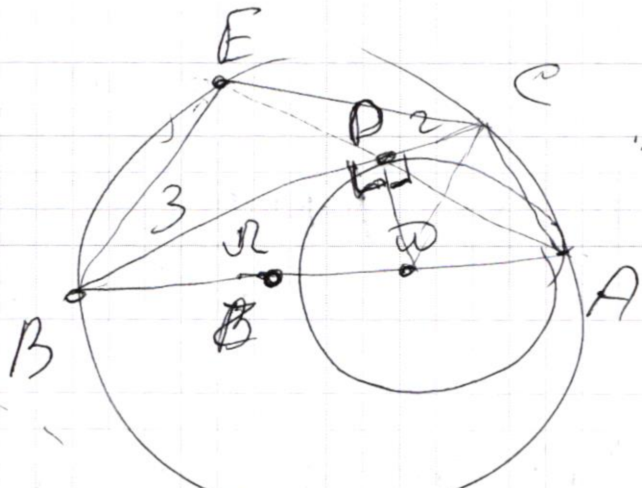
9^2

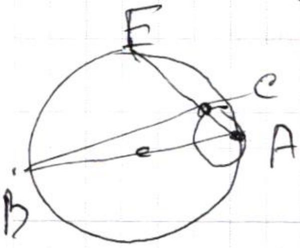
$3x + 4y \geq 28$

$3x > 8y$









$3y > k$

$ED \cdot DA = 6$

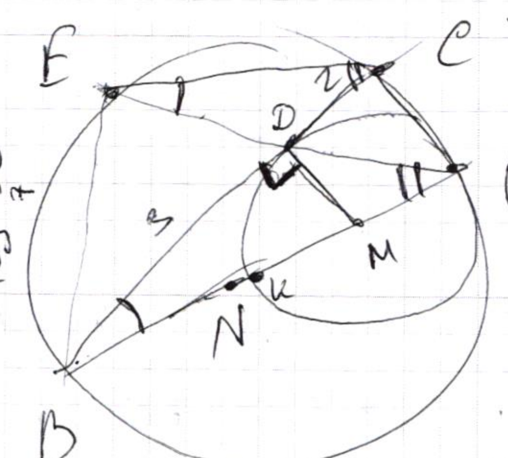
$\frac{x}{y} = 28$

$k > y$

$3x > y > x$

$3x > y$

$9^2 = AM^2 +$



$224 - 151$

$123 - 50$

$BA - AK$

$y + x = 300$

$3y + 3k = 900$

$24(BN - AM)^2 =$

$= 9 + AM^2$

$9 = BA \cdot BK$

$9 = BA(BA - AK)$

$9 = BA^2 - BA \cdot AK$

$9 = 4BN^2 - 4BN \cdot AM$

225

150

200

100

80224

$123 - 50 = 73$

151

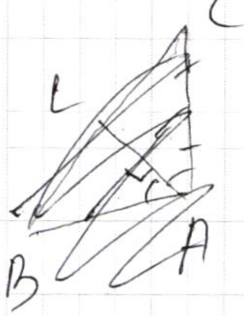
☑ черновик ☐ чистовик

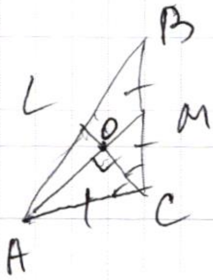
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2





Дано:
$\triangle ABC$
AM – медиана
CL – бисс-са
$CL \perp AM$
$CL \cap AM$ в т. O
$P_{ABC} = 900$

Пусть $BM = y$, тогда $MC = y$

2) $\measuredangle$ $\triangle AMC$ CO – бисс и высота $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\triangle AMC$ р/б и $AC = MC = y$

3) По св-ву бисс-сы CL

$$\frac{AL}{AC} = \frac{BL}{BC} \Rightarrow \frac{AL}{x} = \frac{BL}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow^{*} \frac{AL}{BL} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Пусть } AL = x$$
тогда $BL = 2x$.

4) По нерав-ву треуг-ка

(1) $AB + AC > BC$
$3x + y > 2y$
$3x > y$ (1)

(2) ~~BC+AC~~ $P_{ABC} = 3x + y + 2y = 900$
(2) $x + y = 900$

(3) $BC + AC > AB \Rightarrow 2y + y > 3x$
$y > x$. (3)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолж.

5)

$$\begin{cases} y > x \\ y < 3x \\ y + x = 300 \end{cases}$$

1) При $y \leq 150$

$x \geq 150 \Rightarrow y < x$ нельзя

2) При $y \geq 225$

$3x \leq 225 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq 3x$, нельзя

6) из 1 и 2 следует что

~~$y \in [150$ до $224]$~~

$y \in (150;\ 225)$, т.к по условию

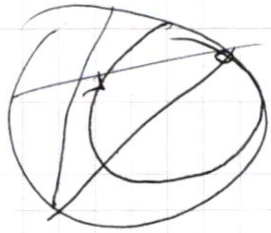
$y \in Z$ то $y \in [151, 224]$

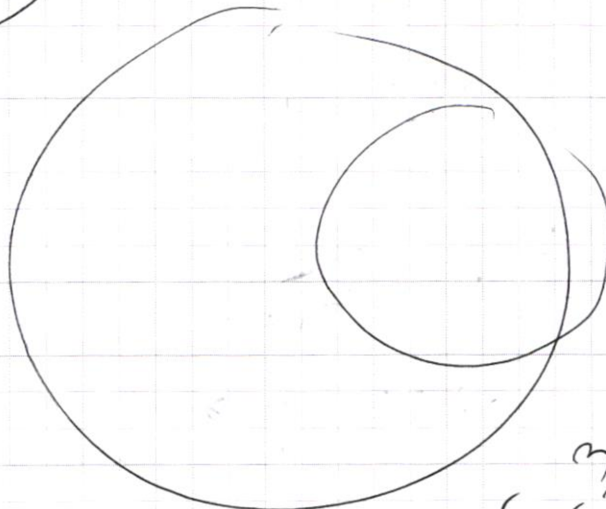
Всего таких y будет

$224 - 151 = 73$

Ответ: Существует ровно 73 таких треугольника

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



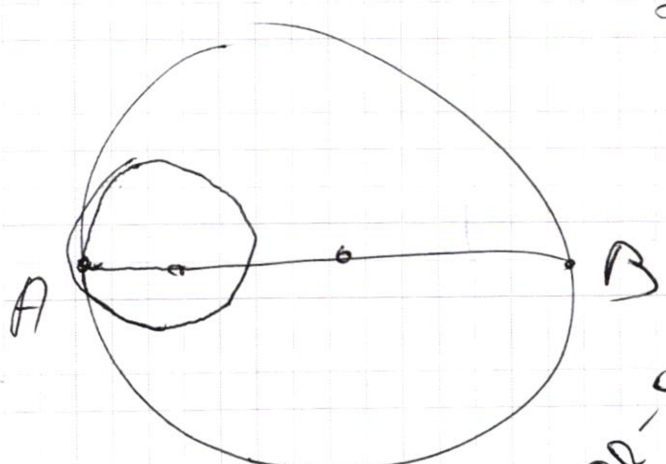


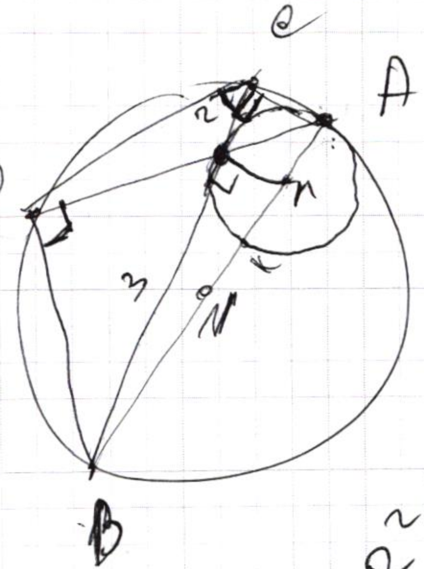
$9 = BA^2 - BA\cdot AK$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$\frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$





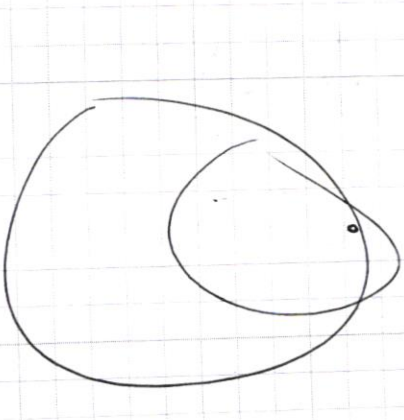
$10R - 5r = 6R$

$5r = 4R$

$r = \frac{4}{5}R$

$4R^2 - \frac{16}{5}R^2 = 9$

$\frac{4}{5}R^2 = 9$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

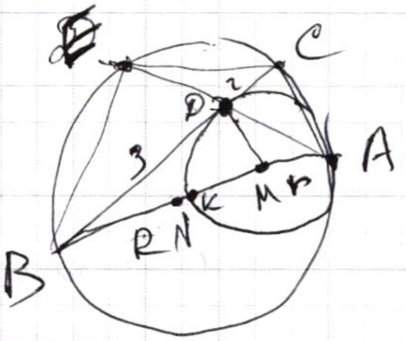
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Решение:

① $\begin{cases} \angle MDB = 90^\circ \text{ ~~конуст~~ } (\text{т.к } BC \text{ касат.}) \\ \angle ACB = 90^\circ \ (\text{т.к } AB - \text{диаметр}) \end{cases}$

$\Downarrow$

$\triangle ACB \sim \triangle MDB \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2+3} = \dfrac{\cancel{2R}\ BA - AM}{2R} = \dfrac{2R - r}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10R - 5r = 6R$

$5r = 4R \quad (1)$

② По т-ме о квадрате касат-й.

$\cancel{BK^2}\ BD^2 = BK \cdot BA \Rightarrow$

$9 = (BA - AK) \cdot 2R = 4R^2 - 4rR \quad (2)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

15 (продолжение)

③ $\begin{cases} 5r = 4R \\ 4R^2 - 4rR = 9 \end{cases}$ $\quad r = \frac{4}{5}R$

$4R^2 - \frac{16}{5}R^2 = 9$

$\frac{4}{5}R^2 = 9$

$R^2 = \frac{45}{4}$

$R = \pm\sqrt{\frac{45}{4}}$ (берем с + т.к R это длина)

$R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $r = \frac{4}{5}R = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

④ ~~По св~~

~~По т.~~ Распишем степень т. D

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$AD \cdot DE = 6$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin BDE =$

$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (AD + DE) \cdot \sin BDE =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (AD + DE) \cdot \frac{BE}{BD} =$

$= \frac{5}{6} AE \cdot BE = \ldots$

Ответ: $R = R_{\Omega} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$r = R_{\omega} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$