МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; 1]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть d - разность прогрессии
Тогда:

$a = a$

$b = a + d$

$c = a + 2d$

Т.к. $a > 0 > c$, то $a > a + 2d \Rightarrow 2d < 0 \Rightarrow d < 0$

Уравнение $a^2 + 2bx + c = 0$ принимает следующий вид:

$ax^2 + 2(a+d)x + (a+2d) = 0$ Найдем его корни.

$D = 4(a+d)^2 - 4(a+2d)a = (4a^2 + 8ad + 4d^2) - (4a^2 + 8ad) = 4d^2$

$$x_1 = \frac{-2(a+d) + \sqrt{4d^2}}{2a} = \frac{-2a - 2d + 2d}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$$

$$x_2 = \frac{-2(a+d) - \sqrt{4d^2}}{2a} = \frac{-2a - 2d - 2d}{2a} = -1 - \frac{2d}{a}$$

Т.к. $d < 0$, а $a > 0$, то $\frac{2d}{a} < 0 \Rightarrow -1 - \frac{2d}{a} < -1 \Rightarrow -1$ — меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$

Ответ: -1.

№2.

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57 \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68 \end{cases}$$

Вычтем из первого выражения второе:

$x - y = 57 - (-68) = 125$

$\sqrt[3]{x^2 - y^2} = \sqrt[3]{(x-y)(x+y)} = \sqrt[3]{125 \cdot (x+y)} = 5\sqrt[3]{x+y}$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt[3]{x+y} = 57 \\ y + 5\sqrt[3]{x+y} = -68 \end{cases}$$

~~Обозначим за~~ Пусть $x+y=a^3$, тогда $\sqrt[3]{x+y}=a$, и $y=a^3-x$

$$\begin{cases} x+5a=57 \\ (a^3-x)+5a=-68 \end{cases}$$

Сложим 2 выражения, получим:

$a^3+10a=-11$

$a^3+10a+11=0.$

Рассмотрим 3 случая:

1) $a<-1$. Тогда:

$a^3<(-1)^3=-1$

$10a<(-1)\cdot 10=-10$

Сложив 2 нер-ва получаем:

$a^3+10a<-11 \Rightarrow a^3+10+11<0 \Rightarrow$ если $a<-1$, то оно не является корнем уравнения $a^3+10a+11=0$

2) $a=-1$. Подставим в уравнение:

$(-1)^3+10(-1)+11=-1-10+11=-11+11=0 \Rightarrow a=-1$ - корень уравнения $a^3+10a+11=0$

3) $a>-1$. Тогда:

$a^3>(-1)^3=-1$

~~a^3 это~~ $10a>10(-1)=-10$

Сложив 2 нер-ва получаем:

$a^3+10a>-11 \Rightarrow a^3+10a+11>0 \Rightarrow$ если $a>-1$, то оно не является корнем уравнения $a^3+10a+11=0$

Перебрав все случаи, мы нашли единственный корень уравнения $a^3+10a+11=0$ — $a=-1$.

Тогда $x+y=a^3=(-1)^3=-1$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=125 \end{cases}$$

$x = 125+y$ подставим в первое:

$125+2y=-1$

$2y=-126$

$y=-63$

$x=125+(-63)=62$

Ответ: единственное решение – $x=62$ и $y=-63$.

№3

Пусть число $\overline{abcdef}$ подходит. Посмотрим каким оно может быть. ~~Аналогично также~~ Пусть степени десятки, сумма остатков на которые равна 12468, – $10^a, 10^{a+1}, 10^{a+2}$. Если $a \geq 4$, то $10^{a+2} \geq 1000000$, и тогда остаток при делении $\overline{abcdef}$ на 10^{a+2} равно $\overline{abcdef}$. $\overline{abcdef}$ – шестизначное число $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ оно больше 12468, а значит и сумма остатков при делении $\overline{abcdef}$ на 10^a, 10^{a+1} и 10^{a+2} – больше $12468 \Rightarrow a<4$.

Если $a=2$, то остатки при делении $\overline{abcdef}$ на $10^a, 10^{a+1}$ и 10^{a+2} равны $\overline{ef}$, $\overline{def}$ и $\overline{cdef}$. Т.к. $\overline{ef} \leq 100$, $\overline{def}<1000$ и $\overline{cdef}<10000$ $\Rightarrow$ их сумма $< 10000+1000+100=11100<12468 \Rightarrow a \neq 2$. Аналогично не подходит $a<2$, сумма остатков при делении $\overline{abcdef}$ на $10^a, 10^{a+1}, 10^{a+2}$ будет меньше 12468. Значит единственный возможный вариант – $a=3$.

Рассмотрим остатки $\overline{abcdef}$ на 1000, 10000, и 100000.

Они равны $\overline{def}$, $\overline{cdef}$ и $\overline{bcdef}$. Давайте сложим их столбиком: Их сумма — 12468.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ \overline{bcdef} \\ +\ \overline{cdef} \\ +\ \overline{def} \\ \hline 12468 \end{array}$$

Заметим, что число f+f+f оканчивается на 8. Единственный возможный случай — f=6. (см. таблицу ниже) => произошел переход через десяток. Тогда 3e+1 оканчивается на 6 => 3e оканчивается на 5. Ед. возможный случай — e=5. Опять

цифра (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
на что оканчивается 3x	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0
на что оканчивается 2x	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0

произошел переход через десяток. Тогда 3d+1 оканчивается на 4 => 3d оканчивается на 3, Ед. возможный случай — d=1. Перехода через десяток не произошло =>

=> 2c оканчивается на 2. Возможны 2 случая:

1) c=1. Тогда переход через десяток не было и b=1.

2) c=6. Тогда переход был и b=0.

Отсюда получаем, что $\overline{bcdef}$ равно либо 11156, либо 06156, а при них может быть любые, кроме 0 =>

=> всего подходящих шестизначных чисел — 9 с $\overline{bcdef}$ = 11156 и 9 с $\overline{bcdef}$ = 06156, т.е. 18.

Ответ: 18.

111156	106156
211156	206156
311156	306156
411156	406156
511156	506156
611156	606156
711156	706156
811156	806156
911156	906156

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

Пусть числа, кратные 5, но не кратные 7, — a, а числа, кратные 7, но не кратные 5, — b. $a, b \in \mathbb{N}$

a: $\vdots 5$, $\not\vdots 7$ $\quad$ b: $\not\vdots 5$, $\vdots 7$

Нам нужно найти $a+b$.

Тогда тройки, в которых хотя бы одно число $\vdots 5$ и одно $\vdots 7$, делятся на 2 типа (т.к. числа, которые $\vdots 5$ и $\vdots 7$ обязательно различны):

1) 2 числа кратны 5 и 1 кратно 7;

2) 2 числа кратны 7 и 1 кратно 5.

Понятно, что ни одна тройка не может быть и того, и того типа. Подсчитаем, сколько можно выбрать подходящих троек из описанного выше набора отдельно по типам.

1) 2 числа $\vdots 5$ и 1 число $\vdots 7$ => кол-во троек − $C_a^2 \cdot C_b^1 =$

$$= \frac{a!}{(a-2)!\,2!} \cdot \frac{b!}{(b-1)!\,1!} = \frac{(a-1)\cdot a \cdot b}{2}$$

2) 2 числа $\vdots 7$ и 1 число $\vdots 7$ => кол-во троек − $C_a^1 \cdot C_b^2 =$

$$= \frac{a!}{(a-1)!\,1!} \cdot \frac{b!}{(b-2)!\,2!} = \frac{a\cdot(b-1)\cdot b}{2}$$

Каждая тройка посчитана ровно 1 раз => всего таких троек: $\frac{(a-1)ab}{2} + \frac{ab(b-1)}{2} = \frac{ab(a-1+b-1)}{2}$.

По условию это равно 49

т. е.

$$\frac{ab(a+b-2)}{2}=49$$

$ab(a+b-2)=7^2\cdot 2.$

a - делитель $7^2\cdot 2$ => возможны 6 случаев:

1) $a=1$. Тогда $b\cdot(b-1)=7^2\cdot 2$ но $7^2\cdot 2=98$ не является произведением 2-х ~~попарн~~ последовательных целых чисел;

2) $a=2$. Тогда $2b(b)=7^2\cdot 2$ $b^2=7^2$ => $b=7$ и $a+b=9$;

3) $a=7$. Тогда $7\cdot b\cdot(b+5)=7^2\cdot 2$, $b(b+5)=2\cdot 7$, $b^2+5b-14=0$, $D=25+4\cdot 14=81=9^2$, $b_1=\frac{-5+\sqrt{81}}{2}=2$ и $b_2=\frac{-5-\sqrt{81}}{2}=-7$, единственный натур. корень $b=2$, и $a+b=9$;

4) $a=2\cdot 7$. Тогда $b(b+12)=7$, но $b(b+12)\geq 13$ для $b\in\mathbb{N}$, противоречие;

5) $a=7\cdot 7$. Тогда $b(b+47)=7$, но $b(b+47)\geq 48$ для $b\in\mathbb{N}$, противоречие;

6) $a=2\cdot 7^2$, Тогда $b(b+96)=7$, но $b(b+96)\geq 97$, для $b\in\mathbb{N}$, противоречие.

Во всех возможных случаях $a+b=9$ => всего чисел было выписано 9.

Ответ: 9.

№5.

на след. стр.

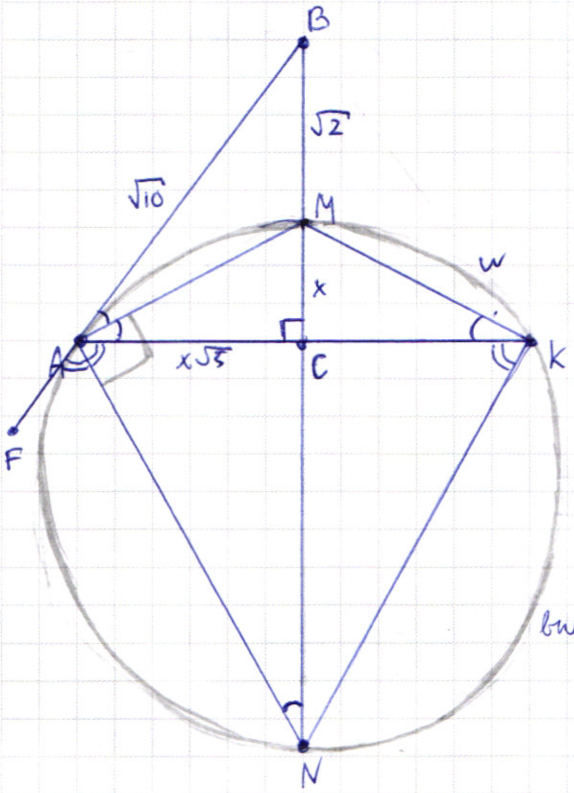
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5.

Решение: AM - биссектриса внутр. угла A, а AN - внешнего => угол между ними равен 90°, т.е. $\angle MAN = 90$. Значит MN - диаметр в окр. описанной вокруг $\triangle AMN$, т.к. на него опирается угол, равный 90°. $\angle MAC + \angle CAN = 90°$. Т.к. AB касается окр. (AMN) (w), то угол между ней и хордой AM равен впис. углу, опирающемуся на эту хорду. Т.е. $\angle BAM = \angle ANM$. Таким образом, $\angle ANM + \angle NAC = \angle NAC + \angle MAC = 90$, тогда $\angle ACN = 180 - \angle CAN - \angle CNA = 180 - 90 = 90$. $\angle ACB$ и $\angle ACN$ - смежные => $\angle ACB = 90°$. Пусть окр. описанная ~~вокруг~~ около AMN ~~равна~~ - w. $\angle AKN = \angle$ ~~MAC~~ FAN (F - точка на продолжении BA за точку A), $= \angle NAK$. => $\triangle NAK$ - р/б => $AN = NK$. $\angle AKM = \angle ANM$, т.к. опираются на одну дугу, т.е. $\angle MAK = \angle MKA$ => $\triangle MKA$ - р/б => ~~MAK~~ - $AM = KM$. => ANKM - дельтоид и его площадь равна $2 \cdot S_{ANM} = 2 \cdot \frac{AC \cdot MN}{2} = AC \cdot MN$.

Посмотрим на степень точки B относительно w. Это AB^2 и $BM \cdot BN$, т.е. $AB^2 = BM \cdot BN = BM \cdot (BM + MN) = BM^2 \cdot BM \cdot MN$

$AB^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$, $BM^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$, $BM \cdot MN = \sqrt{2} \cdot MN$. Отсюда

$10 = 2 + \sqrt{2}\, MN$,

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$MN=\frac{8}{\sqrt{2}}$. Тогда радиус ω равен $\frac{4}{\sqrt{2}}$, т.к. MN - диаметр.

Теперь посмотрим на $\triangle ABC$. AM - биссектриса => по золотому правилу биссектрисы $\frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CM}$. $\frac{AB}{BM}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$.

Тогда $AC=\cancel{BM}\,CM\cdot\sqrt{5}$. Пусть $\cancel{BM}\,CM=x$, тогда $AC=x\sqrt{5}$.

По т. Пифагора: $AB^2=AC^2+BC^2$. $AB^2=(\sqrt{10})^2=10$, $AC^2=(\sqrt{5}\cdot x)^2=5x^2$,

$BC^2=(BM+MC)^2=(\sqrt{2}+x)^2=2+2x\sqrt{2}+x^2$. Тогда

$$10=5x^2+2+2x\sqrt{2}+x^2$$

$6x^2+2\sqrt{2}x-8=0$ Решим как уравнение от x.

$$D=(2\sqrt{2})^2-(-8)\cdot 6\cdot 4=$$

$$=8+192=200.$$

$$x_1=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{200}}{12}=\frac{-2\sqrt{2}+10\sqrt{2}}{12}=\frac{8\sqrt{2}}{12}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$x_2=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{200}}{12}=\frac{-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{12}=\frac{-12\sqrt{2}}{12}=-\sqrt{2}$$, не подходит, т.к. $x>0$, т.к. это длина стороны.

$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ => $x\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{10}}{3}=AC$.

Тогда $S_{AMKN}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{16\cdot\sqrt{5}}{3}$.

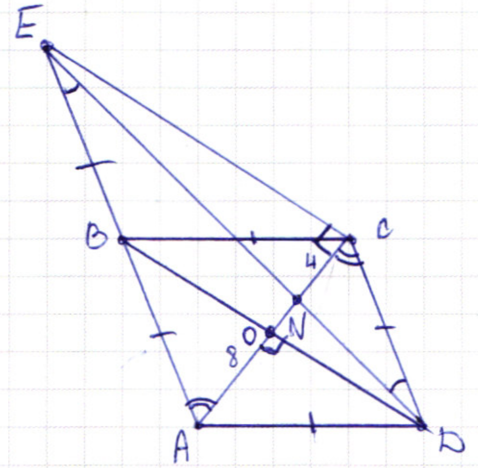
Ответ: $\angle ACB=90^\circ$, $r_\omega=\frac{4}{\sqrt{2}}$, и $S_{ANKM}=\frac{16\cdot\sqrt{5}}{3}$

N 4

см на след. странице.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.



Решение: Т.к. $EA \parallel CD$, то $\angle NEA = \angle NDC$ и $\angle EAN = \angle NCD$ как накрест лежащие => $\triangle ENA \sim \triangle DNC$ по 2-м углам. => $\frac{EA}{CD} = \frac{AN}{NC} = \frac{8}{4} = 2$ => $EA = 2CD$. $EA = 2CD = EB + BA = EB + CD$ => $EB = CD$. Тогда CB – медиана, проведенная из прямого угла => она равна половине гипотенузы, т.е. $BC = BA$. $AD = BC = BA = CD$ => $ABCD$ – ромб. Тогда его диагонали явл. биссектрисами его углов, ~~значит~~ и его диагонали ~~делятся~~ пересекаются под углом $90°$. Пусть O – точка пересечения диагоналей в ABCD. Т.к. ABCD – ромб, $AO = OC = \frac{AC}{2} = 6$, $BO = OD$, $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ADC$. По условию $tg(\frac{1}{2}ADC) = tg\angle ADB = \frac{2}{5}$. Посмотрим на $\triangle AND$. Он прямоугольный. Тогда $tg\angle ADB = \frac{AN}{OD}$. $\frac{AN}{OD} = \frac{2}{5}$, $AN = 6$ => $OD = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Тогда $BD = 2OD = 30$. EBDC – параллелограмм, т.к. $EB \parallel CD$ и $EB = CD$. => $BD = EC$, т.е. $EC = 30$. Посмотрим на $\triangle ACE$. Он прямоугольный, значит $tg\angle EAC = \frac{EC}{AC} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$, т.е. $tg\angle BAC = \frac{5}{2}$.

$S_{\triangle ENA} = S_{\triangle EAC} - S_{\triangle CEN} = \frac{EC \cdot AC}{2} - \frac{EC \cdot NC}{2} = \frac{30 \cdot 12}{2} - \frac{30 \cdot 4}{2} = 120$.

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{5}{2}$, б) $S_{\triangle ENA} = 120$.

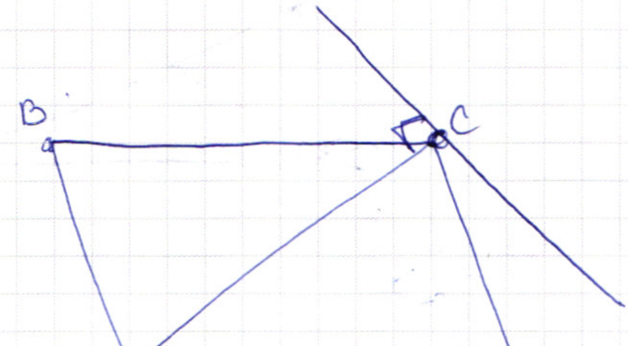
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x^2+5x$

$tg\angle BAC$

$$\begin{array}{r} 11156 \\ 1156 \\ 156 \\ \hline 12468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 06156 \\ 6156 \\ 156 \\ \hline 12468 \end{array}$$

$tg=\frac{\sin}{\cos}$

$4x^2+25x^2=$

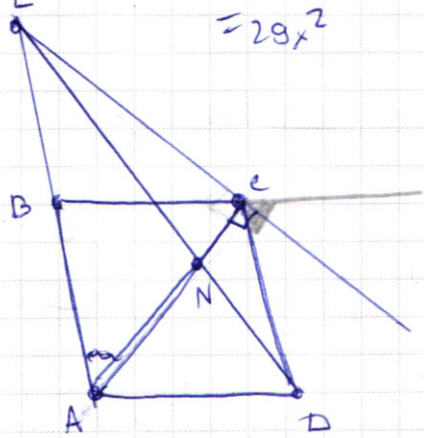
$=29x^2$

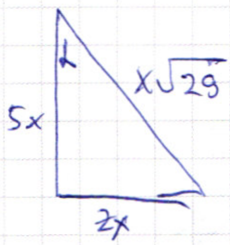
$\frac{EC}{AC}$

111156

$EC^2+AC^2=AE^2$

$tg\alpha=\frac{2}{5}$





$CN=4$

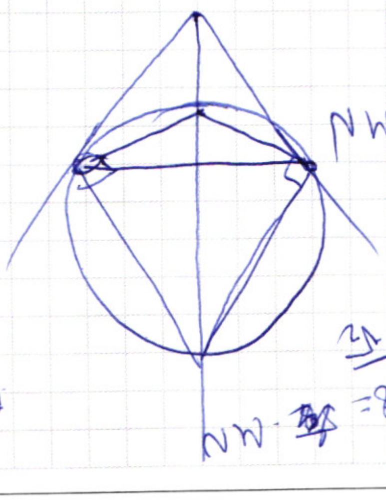
$AN=8$

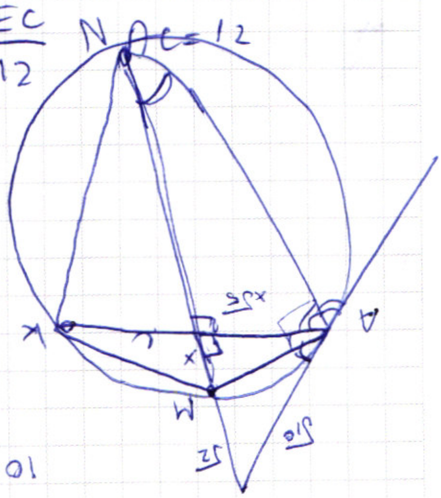
$tg\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right)=\frac{2}{5}$

$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{29}}$

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}}$

$tgBAC=\frac{EC}{AC}=\frac{EC}{12}$ $AC=12$





$7 \cdot b \cdot (b+5) = 7^2 \cdot 2$

$b(b+5) = 7 \cdot 7$

$b^2+5b-14=0$

$D = 25+56 = 81$

$b_1 = \frac{-5+9}{2} = 2$

b^2

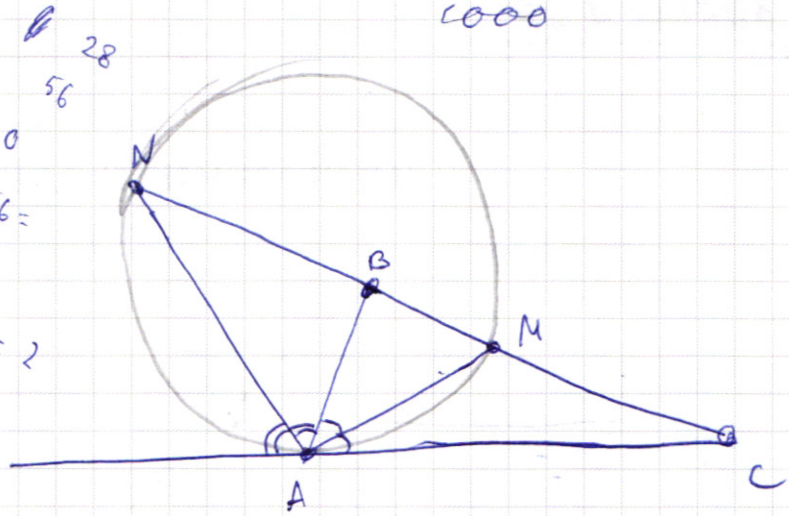
28

56

1000

10^4 10^5 10^6

1000000



100+1000+1000·

$AB=\sqrt{10}$

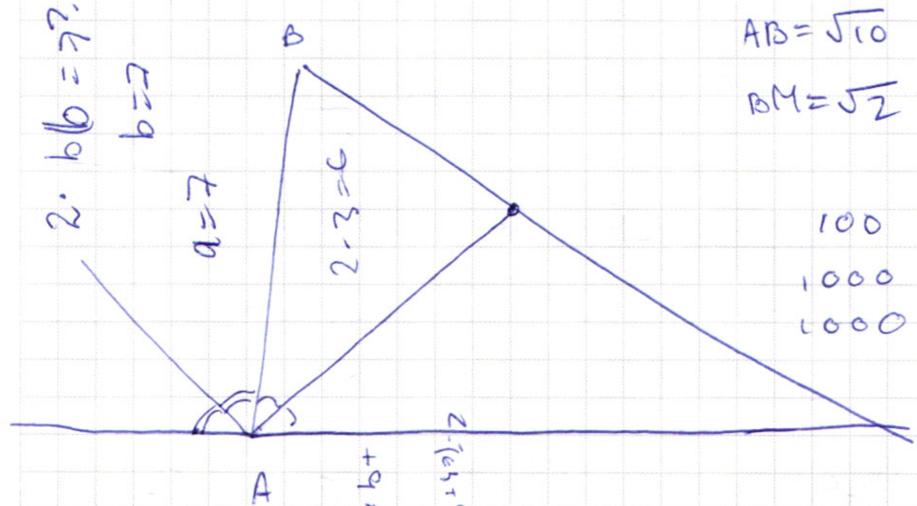
$BM=\sqrt{2}$

$2 \cdot b(b) = 7^2 \cdot 7$

$b=7$

$a=7$

$2 \cdot 3 = c$



100

1000

10000

$b(b+$

$b(b+4) \cdot 2$

$a=1$

$a=2$

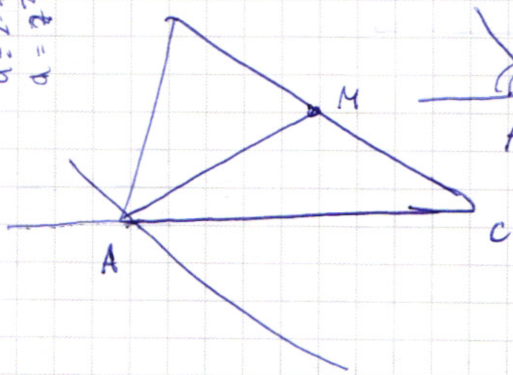
$a=7$

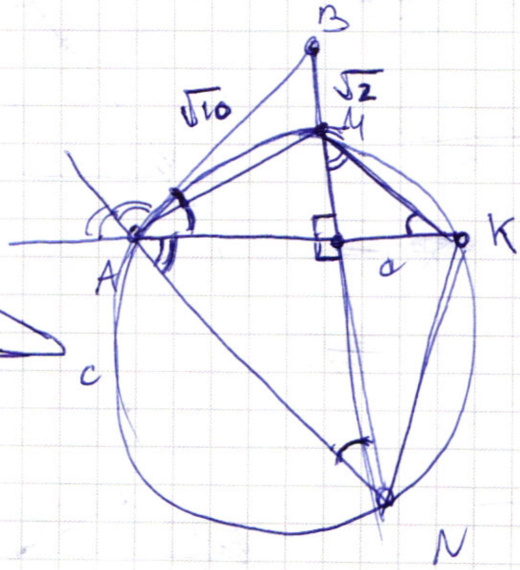
$b(b+1)=7^2 \cdot 2$

$a=2 \cdot 7$

$a=2 \cdot 7 \cdot 7$

$a=7^2$





7

49

$a+b-2=7$

черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

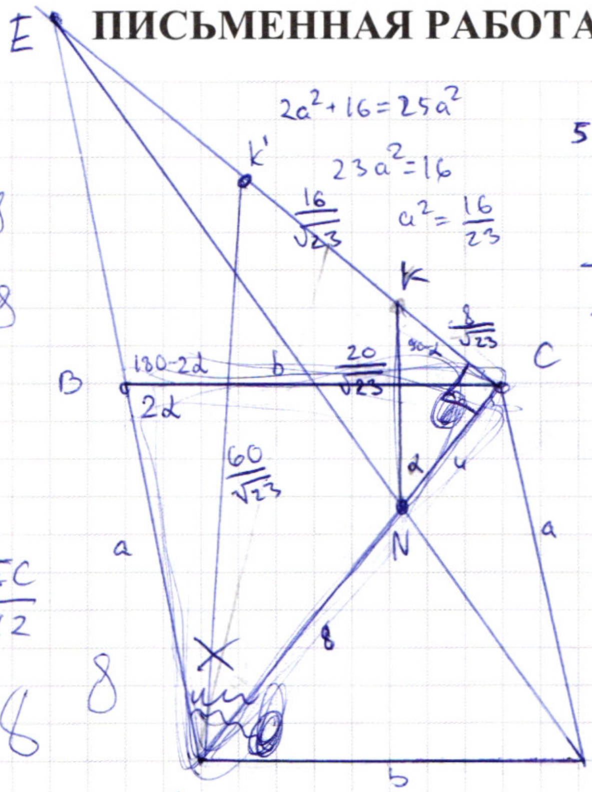
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



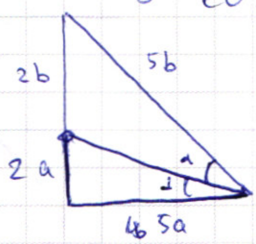
$2a^2+16=25a^2$

$23a^2=16$

$a^2=\frac{16}{23}$

$tg\left(\frac{1}{2}ADC\right)=\frac{2}{5}$

$tg=\frac{\sin}{\cos}$ – $\frac{\text{прот.}}{\text{прил.}}$



$2\alpha=\angle ADC$

$tg\angle BAC=\frac{EC}{AC}=\frac{EC}{12}$

$EC=\sqrt{EN^2+16}$

$2(a+b)^2=4a^2+8ab+4b^2+25a^2=25b^2$

$-21b^2+8ab+29a^2=0$

$D=64a^2+2413a^2=$

$=2477a^2$

$\cos x=\frac{AC}{EA}$ $a=\sqrt{\frac{16}{23}}=\frac{4}{\sqrt{23}}$

$EC^2=EN^2-CN^2=EN^2-16$

$EC^2=EA^2-AC^2=EA^2-144$

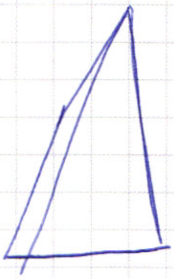
$128=64-16EA\cdot\cos x$

$EN^2-EA^2=144-16=128$

$EA^2+64-16EA\cdot\cos x=EN^2$

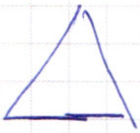
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

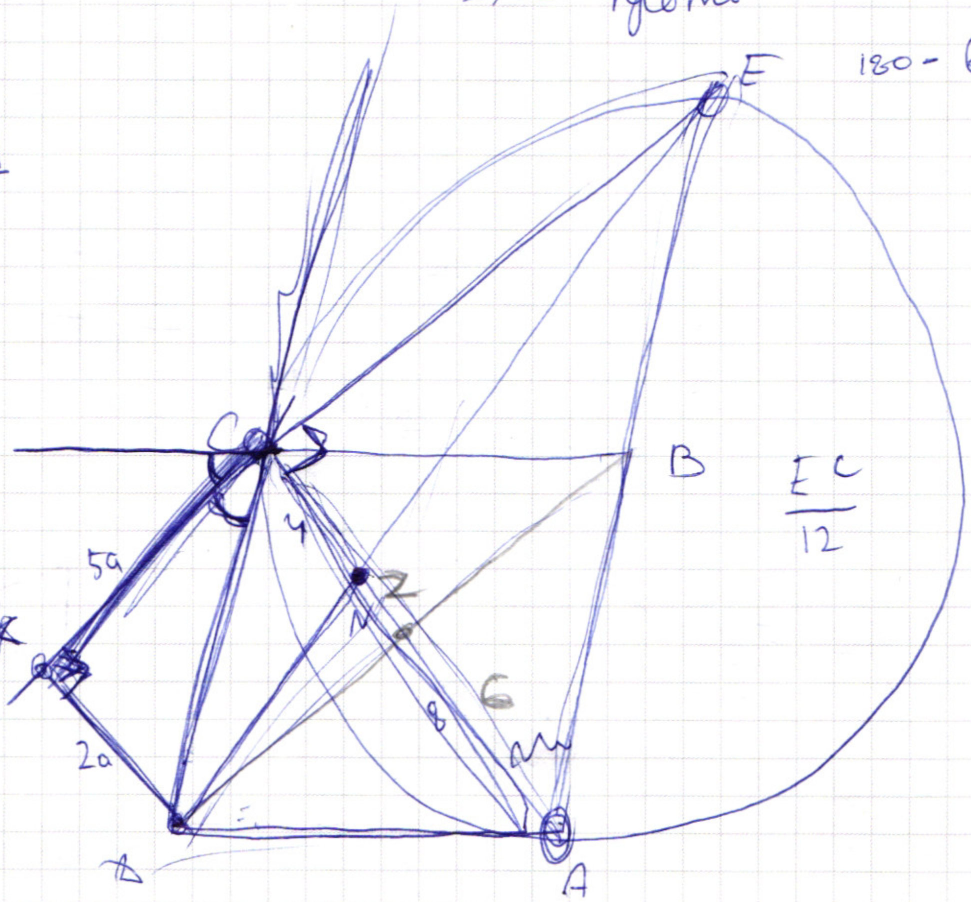
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



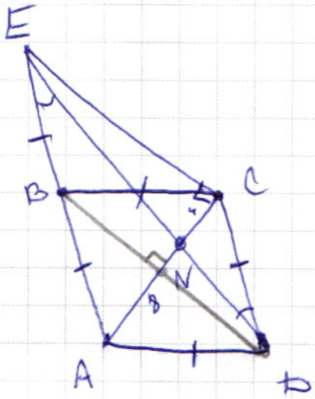
sin проти

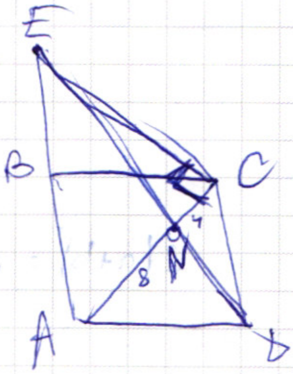
$180 - 60 = 120$

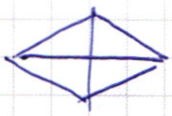




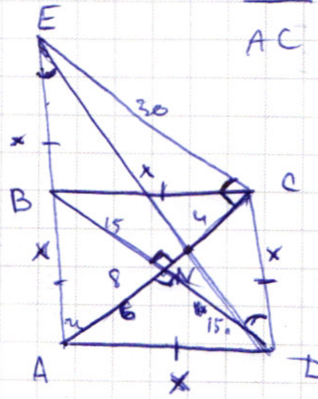
$\frac{EC}{12}$



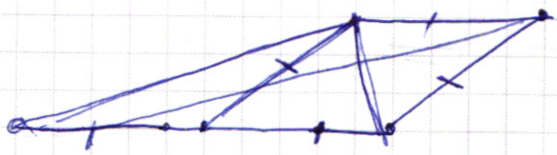




$\frac{EC}{AC} = \frac{EC}{12}$



2



$\frac{30 \cdot 8}{2} =$

$\frac{2}{5}$

$EC = 24x^2 - 144$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$c<0<a$ $\quad -1 \quad +\frac{2}{\cancel{4}}$

$0{,}5 \quad 0 \quad -0{,}5$

$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d$ $\quad d<0$

$\cancel{ax^2+a+d}$ $\quad -1$

$a \quad b \quad c$ $\quad d=0{,}5$

$-\frac{4d}{2a}$ $\quad 0{,}5 \quad 0 \quad -0{,}5 \quad -1$

$ax^2+2(a+d)x+(a+2d)=0$ $\quad 0{,}5x^2-0{,}5=0$

$D = 4(a+d)^2-4(a+2d)a =$

$= 4(a^2+2ad+d^2-a^2-2da) = 4d^2$

30

$x_1 = \frac{-2(a+d)+2d}{2a} = \; x_1 = \frac{-2(a+d)+2d}{2a} = \frac{-2a-2d+d}{2a} = -1+\frac{d}{2a}$

$= \frac{-2a-2d+2d}{2a} = -1$ $\quad -d$

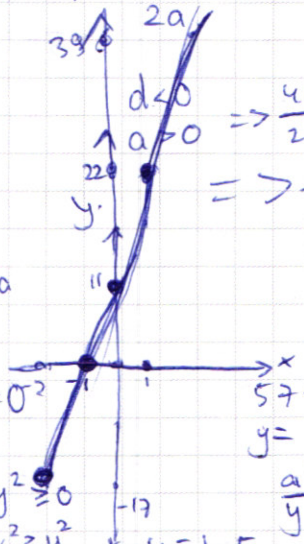
$-28+11=-17$

$-1-\frac{3d}{2a}$

$x_2 = \frac{-2(a+d)-2d}{2a} = \frac{-2a-4d}{2a} = -1-\frac{4d}{2a}$

$-8-20+11=$

$=$



$d<0$, $a>0$ $\Rightarrow \frac{4d}{2a}<0 \Rightarrow d<3d \quad d>3d$

$-\left(1+\frac{3d}{2a}\right) = a+3d$

$\Rightarrow -1-\frac{4d}{2a} < -1$ $\quad \frac{d}{2a} > \frac{3d}{2a}$

$a+3d+\frac{3d}{2a}+1=0 \;\Big|\cdot 2a$

125 $\quad 8+20+11= \quad -1-\frac{d}{2a} < -1-\frac{3d}{2a}$

$2a^2+(3d+1)a+3d=0^2$

$57+68=$ $\quad a^3+10a+11=0$

$y=a^3+10a+11=0$

a	-1	1	0	-2	2
y					

$x+y=a$ $\quad -1$ - корень

$x^2-y^2 \geq 0$

$x^2 \geq y^2$ $\quad x-y=125$

$$\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 \end{cases}$$

$x+y=a^3$

$x+\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=57$ $\quad y=a^3-x$

$$\begin{cases} x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt[3]{x+y}=-68 \end{cases}$$

$a^3+10a=-11$

$$\begin{cases} x+5a=57 \\ a^3-x+5a=-68 \end{cases}$$

$a(a^2+10)=-11$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

9
12
9

a061156

a1156

$x+y=a^3$

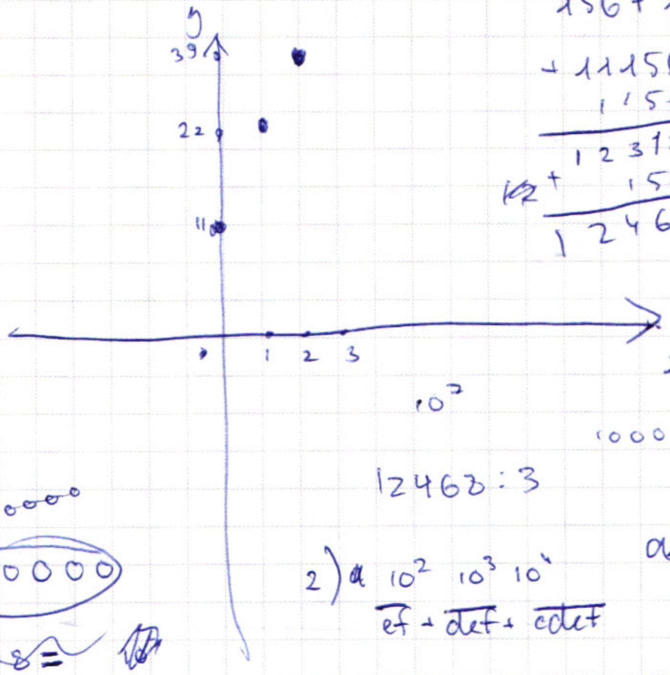
$a^3+10a+11=0$

156 + 1156 +
+ 11156
1156
12312
+ 156
12468

$a>-1$
$a^3>-1$
$10a>-10$
$a^3+10a>-11$
$a^3+10a+11>0$

+156
6156
+ 6156
12312

$a<-1$
$a^3<-1$
$10a<-10$
$a^3+10a<-11$
$a^3+10a+11<0$



10^7

1000000

12468

12468 : 3

100000

100000

$a=-1$

2) 10^2 10^3 10^4
$\overline{ef}+\overline{def}+\overline{cdef}$

9999 + 999 + 99
999
10998
+ 10998
999
11997

$1+2+4+6+8=$

1 10 100

10 100 1000

100 1000 10000

1000 10000 100000 10^0

$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=125 \end{cases}$

$f=6$

$x=125+y$

$125+2y=-1$

$2y=-126$

$y=-63$

$x=62$

10^3 10^4 10^5

125+2y=-1
2y=-126
y=63
x=188

12345
36925
67890
81470

1) 10^1 10^2 10^3
2) 10^2
3) 10^3
~~4) 10^4 10^6~~
~~5) 10^5 10^6 10^7~~

3e 5

18
6

10^2 10000000

10^6 1000000

10^5 100000

1000

$\overline{abcdef}$

$\overline{def}+\overline{cdef}+\overline{bcdef}=12468$

$b<2$

$\overline{bcdef}$
+ $\overline{cdef}$
$\overline{def}$
12468

180

$d=1$
$f=6$
$e=5$

1) 10^1 10^2 10^3

$3e+1=0$

222

666

$f+\overline{ef}+\overline{def}=12468$

$f+10e+f+100d+10e+10f=12468$

$100d+20e+3f=12468$

$3f<27$
$20e<180$
$100d<9000$

9000

b=
2c=2
$3f=10x+8$
3d=3
3d=4

6
1

1) c = 6
b = 0
2) c = 1 b = 1

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$C_3^2 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2$

1 2 3

124 451
125 452
134 453
135
234
235

$C_2^2 \cdot C_3^1 = 1 \cdot 3 = 3$

$90+\alpha$

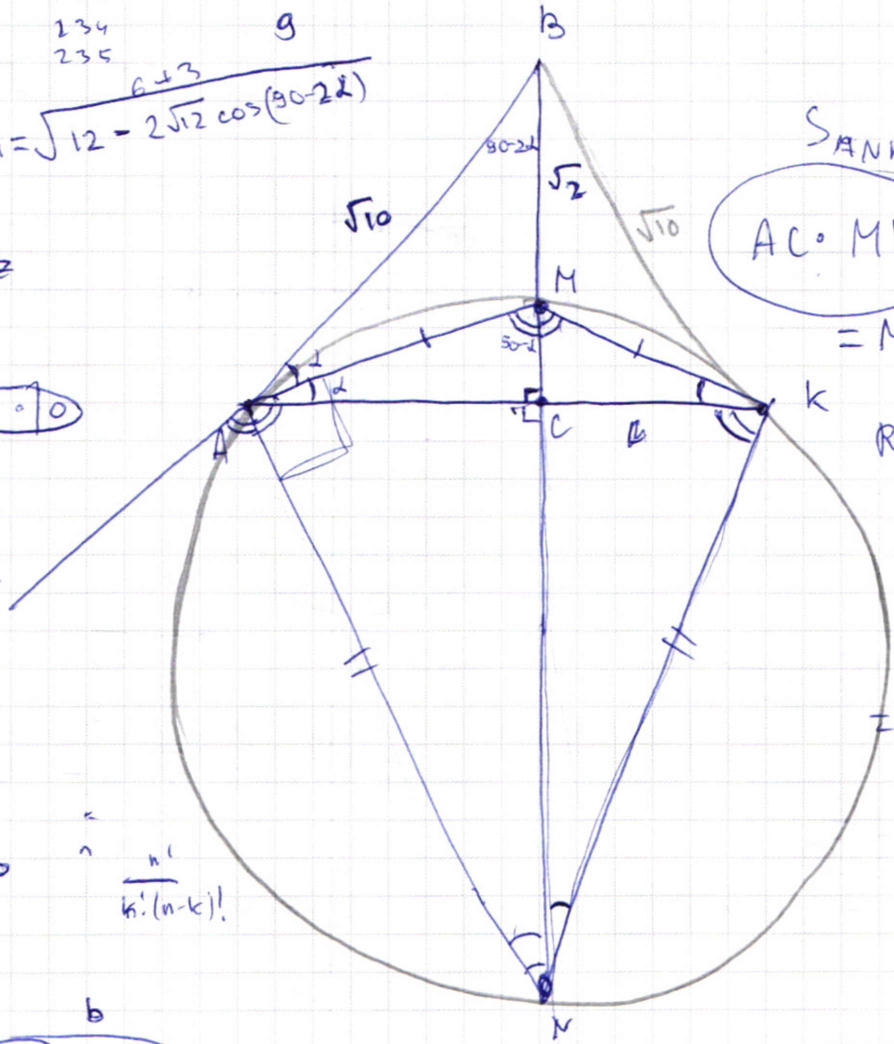
$2\sqrt{12}$

$\sqrt{10}$

4 5

$AM = \sqrt{12 - 2\sqrt{12}\cos(90-2\alpha)}$

6+3



S_{ANKM}

$AC \cdot MN =$

$= MK \cdot KN$

$R = \frac{MN}{2}$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

x y z

$ab(a+b) = a \cdot 7^2 \cdot 2$

$\frac{ab(a+b)}{2} = 49$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

a b

:5 :7 :5 :7

$AC^2 + MC^2 + 2BM \cdot MC + 2 = 10$ 8

$AC^2 + MC^2 + 2\sqrt{2} \cdot MC = 8$

$AM^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot MC = 8$

a=2
b=7

9

1) $C_a^2 \cdot C_b^1 = \frac{a!}{2!(a-2)!} \cdot b = \frac{a \cdot (a-1) \cdot b}{2}$

2) $C_b^2 \cdot C_a^1$ $\frac{b \cdot (b-1) \cdot a}{2}$

$\frac{ab(a+b-2)}{2} = 49$

$ab(a+b-2) = 7^2 \cdot 2$

27

$4-3x-|6x-2| \le ax+b$

$4-3x-|6x-2| \le ax+b$

$x \in [-1;1]$

$x \ge -1$

$x \le 1$

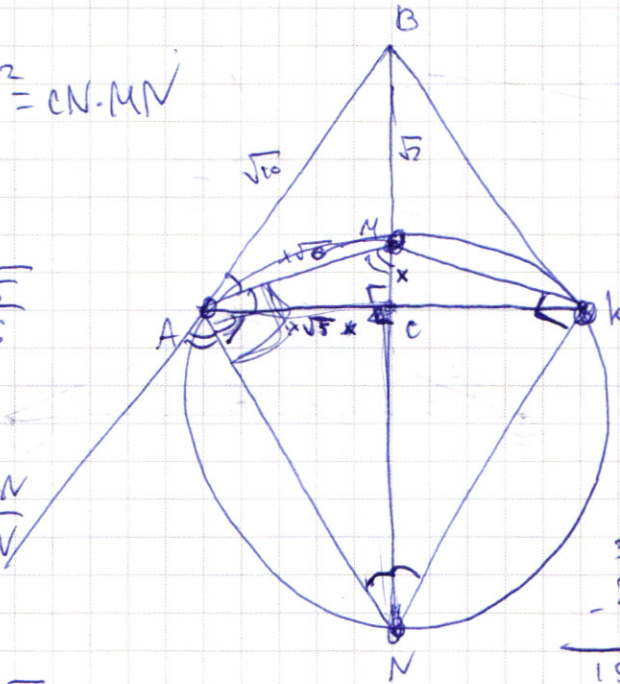
$ax+b = \dfrac{17+15x}{5+3x}$ $\quad x \ne -\dfrac{5}{3}$

$AM^2 = x^2+5x^2 = 6x^2$

$BA^2 = BM\cdot(BM+MN)$

$AN^2 = CN\cdot MN$

$S_{ANKM} = AC\cdot MN = AM\cdot AN$



$\dfrac{AC}{AM} = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

$\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}} = \sqrt{5}$

$\sqrt{10}$

$\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{AN}{MN}$

$4\cdot6\cdot8 =$ $\quad 10 = \sqrt{2}\cdot(MN+\sqrt{2})$

$10 = \sqrt{2}MN+2$

$\begin{array}{r} 3 \\ 24 \\ \times\ 8 \\ \hline 192 \end{array}$

$2 \quad \dfrac{8}{\sqrt{2}} = MN$

$4 \quad 4\cdot2$

$AM = x\sqrt{6}$

$(x\sqrt{5})^2+(x+\sqrt{2})^2 = 10$

$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ R

$\dfrac{2\sqrt{20}}{3}$

$5x^2+x^2+x2\sqrt{2}+2 = 10$

$6x^2+2\sqrt{2}\cdot x-8 = 0$

$D = 8+192 = 200$

$x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = MC$

$\sqrt{2}$

$x_1 = \dfrac{-2\sqrt{2}+10\sqrt{2}}{12} = \dfrac{8\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$AC = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}.$

$x_2 = \dfrac{-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{12} < 0$

$\dfrac{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{16\sqrt{5}}{3}$ | S

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)