МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

• a, b, c, d - члены геометрической прогрессии. тогда $b = a \cdot q$; q - частное прогрессии, тогда $c = b \cdot q = a \cdot q^2$; $d = c \cdot q = a q^3$;

• d - корень ур-ния $ax^2 + 2bx + c = 0$;

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$; $a \neq 0$, т.к. является членом прогрессии.

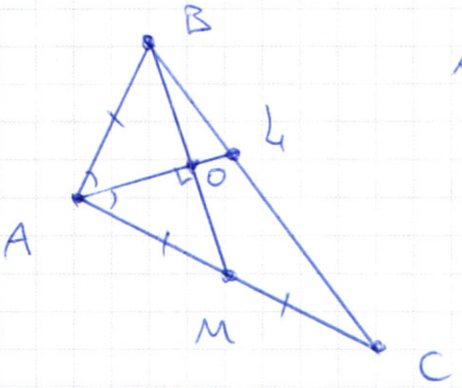
• тогда $x^2 + 2qx + q^2 = 0$; $(x+q)^2 = 0$; $x = -q$,

• тогда $aq^3 = -q$, $q \neq 0$, значит $aq^2 = -1$,

$c = aq^2 = -1$;

Ответ: -1;

№2.



AL - биссектриса; BM - медиана;

$AL \perp BM$; $P_{ABC} = 1200$;

$AB, BC, AC \in \mathbb{Z}$;

1) $AL \cap BM = O$; $AO \perp BM \Rightarrow AO$ - высота $\triangle ABM$, т.к. AL - биссектриса, то AO тоже биссектриса, тогда по пр-ку р/б треугольника: $\triangle ABM$ - р/б с осн. $BM \Rightarrow$ по опр. р/б треуг. $AB = AM$, а по опр. медианы треуг. $AM = MC$, тогда пусть $AM = MC = AB = x$, а $BC = y$, тогда

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x, y \in \mathbb{Z}$ и по н-ву треуг.:
$x, y > 0 \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$

$2x + y > x$; $x + y > 2x$ и $x + 2x > y$;

$x + y > 0$; $x < y$ и $y < 3x$;
всегда,

т.к. $x, y \in \mathbb{N}$ $x < y < 3x$;

$x + 2x + y = P$; $y = 1200 - 3x$;

$x < 1200 - 3x < 3x$;

$\begin{cases} x < 1200 - 3x \\ 1200 - 3x < 3x \end{cases}$; $\begin{cases} 4x < 1200 \\ 6x > 1200 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 300 \\ x > 200 \end{cases}$;

$200 < x < 300$, т.к. $x \in \mathbb{N}$, то всего

решений: $300 - 200 - 1 = 99$;

Ответ: 99;

№3.

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}; \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)}; \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3 \end{cases}$;

1) Пусть $a = (x - 1)$; $b = (y - 2)$;
тогда

$\begin{cases} b - 2a = \sqrt{a \cdot b} \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} b^2 - 4ab + 4a^2 = ab \\ b^2 + 2a^2 = 3 \\ b - 2a \geq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (b - a)(b - 4a) = 0 \\ b^2 + 2a^2 = 3 \\ b - 2a \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = a \\ b = 4a \end{array}\right. \\ b^2 + 2a^2 = 3 \\ b \geq 2a \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = a \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} b = 4a \\ \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ b \geq 2a \end{cases}$;

• $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ $b \geq 2a$: $1 \geq 2$ – ложь ⊖

• $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ $b \geq 2a$: $-1 \geq -2$ – истина ⊕

• $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$ $b \geq 2a$: $4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \geq 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}$ – истина ⊕

• $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = -4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$ $b \geq 2a$: $-4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \geq 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ – ложь ⊖

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

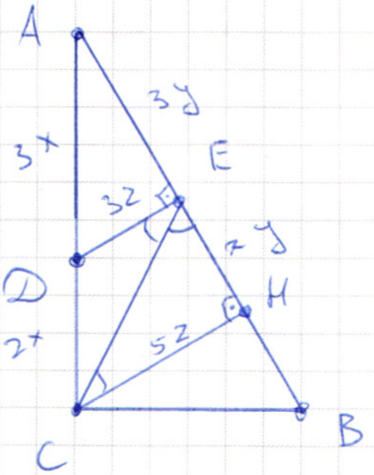
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда остаётся 2 решения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=-1\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases} a=\frac{\sqrt6}{6}\\ b=\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-1=-1\\ y-2=-1\end{cases}\\ \begin{cases} x-1=\frac{\sqrt6}{6}\\ y-2=\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt6}{6}\\ y=2+\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(0;1);\ \left(1+\frac{\sqrt6}{6};\ 2+\frac{2\sqrt6}{3}\right)\right\}$;

№4.



$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$; $DE\perp AB$; $\angle CED=45^\circ$;

а) $tg\angle BAC$ − ?

б) $AC=\sqrt{29}$; S_{CED} − ?

1) $AD:AC=3:5 \Rightarrow AD:DC=3:2$;
CH − высота $\triangle ABC$, тогда $DE\perp AB$ и $CH\perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow DE\parallel CH$, тогда накрест леж. углы при сек. CE равны: $\angle DEC=\angle ECH$, причём

2) $\angle DEH=90^\circ$; $\angle CEH=\angle DEH-\angle DEC=90^\circ-45^\circ=45^\circ=$ $=\angle ECH \Rightarrow$ по пр-ку р/б треуг. $\triangle CEH$ − р/б с осн. $CE \Rightarrow$ по опр. р/б треуг. $EH=CH$;

3) Пусть $AD=3x$, тогда $CD=2x$, тогда по теореме Фалеса: $\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EH}$, т.к. $DE\parallel CH$, значит пусть $AE=3y$, $EH=2y$;

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4) $\triangle DAE \sim \triangle CAH$ по двум углам, т.к. $\angle BAC$ – общий, а $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ$, тогда по св-ву подобных треуг.

$\frac{DE}{CH} = \frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, тогда пусть $DE = 3z$,

тогда $CH = 5z$, тогда $CH = EH$; $5z = 2y$;

$\frac{z}{y} = \frac{2}{5}$; В $\triangle ADE$: $\angle AED = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = \angle DAE \Rightarrow tg\angle BAC = tg\angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{3z}{3y} = \frac{z}{y} = \frac{2}{5}$,

тогда $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$;

5) Если $AC = \sqrt{29}$, то т.к. $\angle BAC$ – острый (в прямоуг. треуг.) $(\cos\angle BAC > 0)$,

то $tg^2\angle BAC + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle BAC}$; $\cos^2\angle BAC = \frac{1}{\frac{4}{25} + \frac{25}{25}}$;

$\cos\angle BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{29}}$;

тогда $5x = AC = \sqrt{29}$; $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$;

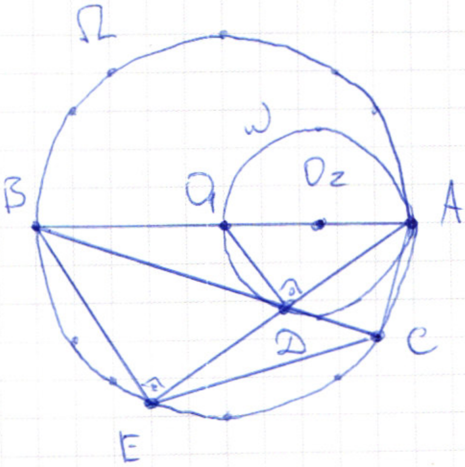
$DE = \sin\angle BAC \cdot AD = \frac{3}{5}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$;

$AE = \cos\angle BAC \cdot AD = \frac{3}{5}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = 3$;

тогда $EH = \frac{2}{3}\cdot AE = 2$; т.к. $EH \perp DE$:

$S_{\triangle CED} = \frac{DE\cdot EH}{2} = \frac{\frac{6}{5}\cdot 2}{2} = \frac{12}{10} = 1,2$;

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) 1,2;

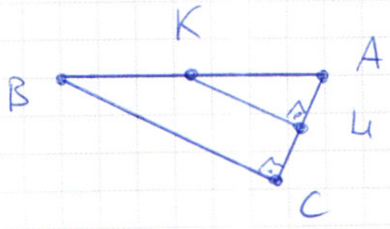


№5.

$CD = 1$; $BD = 3$;

O_1A, O_2A – ?

S_{BACE} – ?



1) $\omega \cap AB = A, K$, тогда запишем степень точки B: $BK\cdot BA = BD^2 = 3^2 = 9$, т.к. BD – касат. к ω;

точки C: $CL\cdot CA = CD^2 = 1^2 = 1$, т.к. CD – касат. к ω;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\angle KLA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AK, аналогично $\angle BCA = 90^\circ$; $\angle KAL = \angle BAC$ (общий)

• использую факт, что линия центров содержит точку касания;

тогда $\triangle BAC \sim \triangle KAL$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC}$, тогда $\frac{CL}{AC} = \frac{BK}{AB} = k$,

тогда $BK \cdot BA = BK^2 \cdot k = 9$; $CL \cdot AC = CL^2 \cdot k = 1$; $\Big\} \Rightarrow \frac{BK}{CL} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = 3 \Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$;

3) В $\triangle BAC$: $BC = BD + DC = 3 + 1 = 4 \Rightarrow AC = x$, $AB = 3x$;

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $(3x)^2 = x^2 + 4^2$; $8x^2 = 16$;

$x = \sqrt{2}$, тогда $AC = \sqrt{2}$; $AB = 3\sqrt{2}$; $O_1A = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

$BK \cdot AB = 9$; $BK = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = O_1A = O_1B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка K совпадает с точкой O_1, тогда $O_2A = \frac{1}{2}O_1A = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}$;

4) $\angle O_1DA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр окр.;

Аналогично $\angle BEA = 90^\circ$; $\angle BAE = \angle O_1AD$ (общий)

тогда по 2-м углам $\triangle BAE \sim \triangle O_1AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AO_1}{O_1B} = 1 \Rightarrow AD = DE$;

5) $S_{ADC} = \frac{AD \cdot h_1}{2}$; $S_{EDC} = \frac{ED \cdot h_1}{2} \Rightarrow S_{EDC} = S_{ADC}$;

h_1 - расстояние от т. C до AE; Аналогично,

$S_{BDA} = S_{BDE} \Rightarrow S_{BAC} = S_{BEC}$; $S_{BACE} = 2S_{BAC}$;

$S_{BAC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$; $S_{BACE} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $R_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$;

№6

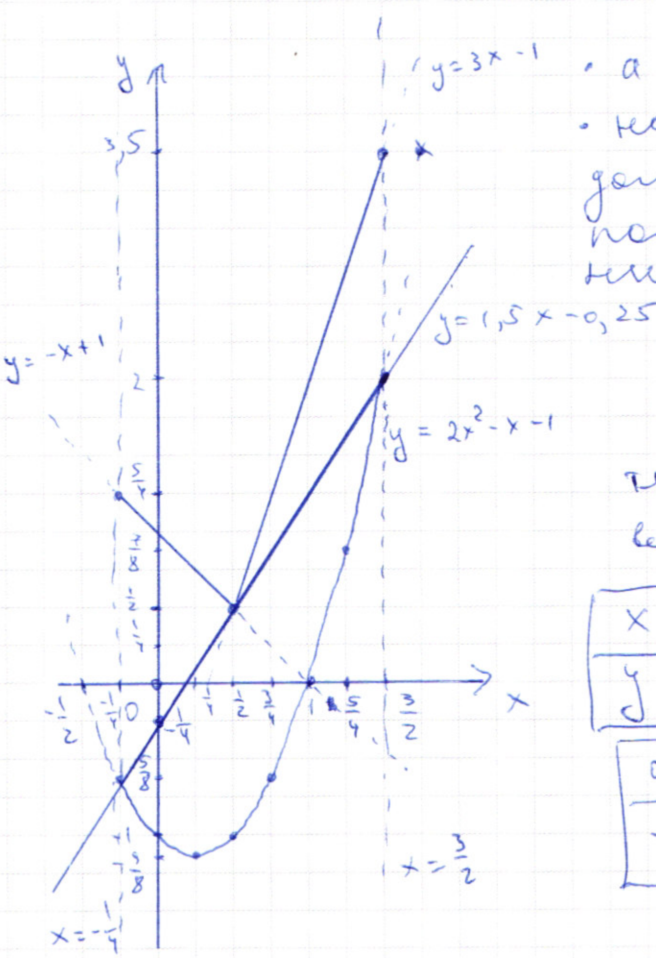
$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

• $2x^2 - x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ – парабола $y = 2x^2$, сдвинутая на $\frac{1}{4}$ вправо по оси Ox и на $\frac{9}{8}$ вниз по оси Oy;

• $x + |2x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \ge 0,5; \\ -x + 1, & x < 0,5; \end{cases}$

x	0,5	1,5
y	0,5	3,5

x	0,5	−0,25
y	0,5	1,25



• $ax + b$ – график прямой
• на моём чертеже она должна полностью помещаться в ограниченную область;

график при $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$;

точки параболы

вершина $x = -\frac{1}{4}$; нули $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$

x	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5
y	0	$-\frac{5}{8}$	−1	$-\frac{9}{8}$	−1

0,75	1	1,25	1,5
$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{7}{8}$	2

• Заметим, что такая прямая единственная, можно в этом легко убедиться, повращав её, и докажем, что она проходит через три точки: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$;

$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b = 2 \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$; $a = 1,5$; $\begin{cases} a = 1,5 \\ b = -0,25 \end{cases}$; $1,5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 0,25 = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$;

• ниже этой прямой прямых быть не может, т.к. она содержит две верхние точки параболы, но и выше её прямых быть не может, т.к. она содержит нижнюю точку верхней границы.

Ответ: $(1,5; -0,25)$.

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = [p/2]$; p - простое;

$f(1 \cdot a) = f(a) + f(1)$; $f(1) = 0$, тогда

$f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$; $f(a) = -f(\frac{1}{a})$;

~~Тогда $1 \le x, y \le 21$ для таких чисел: $f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(\frac{y}{x}) > 0$, т.к. x и y равно правны, то таких случаев поровну, но есть и случаи, когда $x = y$: таких 21, а всего случаев $21 \cdot 21$, тогда нужных нам всего $\frac{21 \cdot 21 - 21}{2} = 21 \cdot \frac{20}{2} = 210$,~~

~~Ответ: 210 пар~~;

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(a)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3

19	20	21
9	4	4

Пусть есть два числа $1 \le x, y \le 21$, что $f(x/y) < 0$, тогда $f(y/x) > 0$, значит всего способов $21 \cdot 21$, теперь нужно найти такие, что $f(x/y) = 0$;

• во-первых если $x = y$, тогда остается найти такие, что $x \ne y$, но $f(x) = f(y)$;

$f(x) = 1$: 2 и 3 $\qquad f(x) = 3$: 7, 8, 10, 12, 15, 18

$f(x) = 2$: 4, 5, 6, 9 $\qquad f(x) = 4$: 14, 16, 20, 21

$2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 56$ - при $x \ne y$;

21 пара при $x = y$;

тогда ответ равен $\frac{441 - 21 - 56}{2} = 182$;

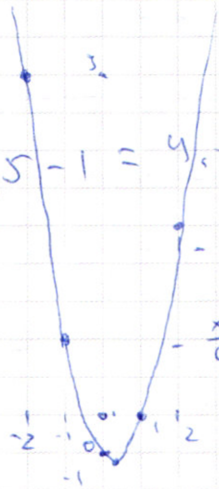
Ответ: 182 пары;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2x+1=-x+|2x-1| \geq 0$

$x+|2x-1|$



$3\cdot 1{,}5-1=4{,}5-1=3{,}5$

$-\frac{1}{q^2}; -\frac{1}{q}; -1; -q;$

$-\frac{x^2}{q^2}-2\frac{x}{q}-1=0$

$\frac{x}{q}=-1$

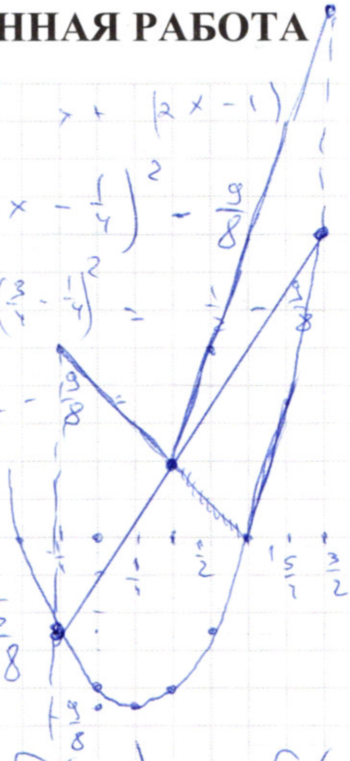
$x=-q$ $-\frac{5}{8}$

$a\cdot\frac{3}{2}+b=2$

$2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

$2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{9}{8}$

$2-\frac{9}{8}$



$\frac{25}{8}-\frac{9}{8}=\frac{16}{8}$

$-\frac{5}{8}$

$\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

$2-\frac{9}{8}=\frac{7}{8}$

201

603 597 201 402

$f=1094$

3105 295 598

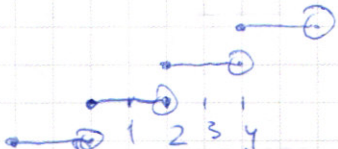
$f \qquad f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$ $\qquad f(x/y)<0$

$1 \leq x \leq 21$

$1 \leq y \leq 21$

$> k$



$21 \cdot 21$ 42 441

$f(4)=2;$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f(7)=3$

$f(11)=5;$

$f(13)=6;$

$f\left(\frac{y}{x}\right)>0;$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{10}\right)$

$1+f\left(\frac{1}{10}\right)$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=-2;$

$f(a)=f(1)+f(a)$

$f(1)=0;$ $\quad -3$

$f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\frac{3}{5}\sqrt{29}$

$21\cdot 21=441;$

$441-21=420$

210

5^2 29 36 174 87 1044

$9+1{,}44$

$10{,}44$

$\frac{21\cdot 20}{2}=210;$

$\frac{1}{10}=-3$

$(3\sqrt{2})^2=\sqrt{2}^2+4^2$

$18=2+16$

$\frac{9}{25}\cdot 29$ $\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}\cdot 4}{2}=2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a,\ ad,\ ad^2$

$ax^2+2adx+ad^2=0$

$a(x+d)^2$

$x=-d$

$ad^3=-d$

$\boxed{ad^2=-1}$

$1=\sqrt{2-1}$

$1-4+3=0$

$2\cdot\frac{\sqrt6}{6}=\sqrt{4\cdot\frac{\sqrt6}{6}-1\sqrt{\frac{6}{6}}}$

$1+\frac{\sqrt6}{6};\quad 2+\frac{2\sqrt6}{3}$

$2\cdot\frac{1}{6}+\frac{4\cdot 6}{6}=\frac{18}{6}=3$

$10=3$

$7=3$

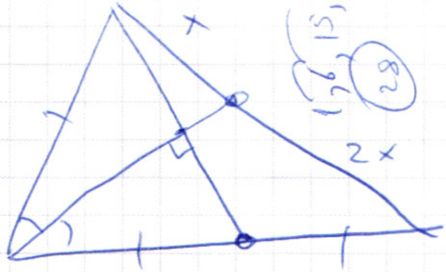
$\frac{10}{7}=0$

$\frac{1}{7}=-3$

$b^2+2a^2=3$

$18a^2=3$

$a^2=\frac{16}{36}$



$1,76\ 15,6\ 28$

$210-28=$

$200-18=182$

$x+y>2x$

$y>x;$

$3x>y$

$P=1200;$

$x,y\in\mathbb{Z};$

$P=3x+y;$

$a=1$

$b=1$

$x=2$

$y=3$

$y=1200-3x$

$x<y<3x$

$x<1200-3x<3x$

$6x>1200$

$x>200$

$4x<1200$

$x<300$

$300-200=100-1=99$

$20<x<30$

$2-1-1$

0

$1<2<8$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{x(y-2)-(y-2)}=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$(y-2)^2+2(x-1)^2-4-2+3=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3;$

$a=x-1$

$b=y-2$

$b-2a\geq0$

$ab\geq0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt6}{6} \\ y=2+\frac{2\sqrt6}{3}, \end{cases}$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{a\cdot b} \\ b^2+2a^2=3 \end{cases}$$

$b^2-4ab+4a^2=ab$

$(b-a)(b-4a)=0$

$\left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a \end{array}\right.$

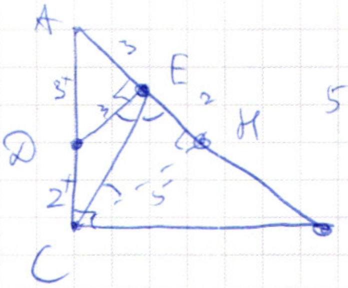
$3a^2=3\quad a=\pm1$

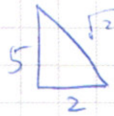
$1-2\geq0\ (-)\qquad -1+2\geq0\ (+)$

$16a^2+2a^2=3;\quad 6a^2=1;\quad a=\pm\sqrt{\frac16};$

$\frac{\sqrt6}{6}$ и $\frac{4\sqrt6}{6}$

$b-2a\geq0\qquad \frac{4\sqrt6}{6}-\frac{2\sqrt6}{6}\geq0$





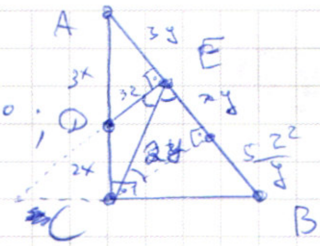
$\sqrt{29} \operatorname{tg} \quad BAC - ?$

$\angle CED = 45°; D$

$\frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$

$BC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$\frac{3y}{5z} = \frac{3z}{5\frac{z^2}{y}}$



$\frac{z}{y} - ?$

$2y = 5$

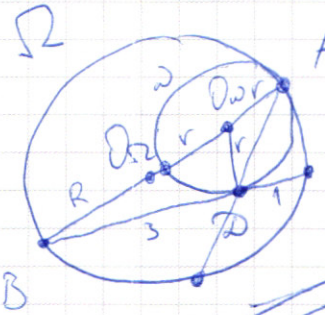
$\frac{z}{y} = \frac{2}{5}$

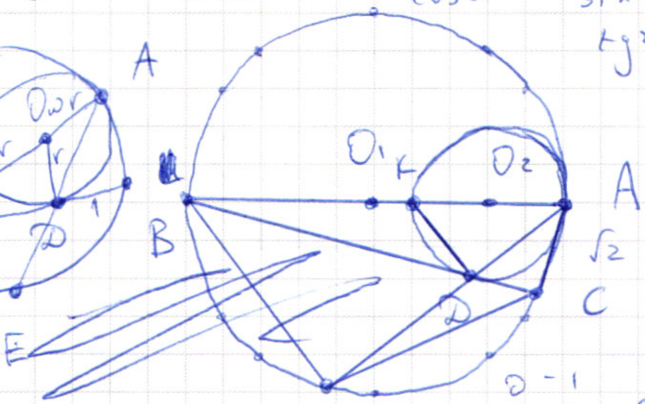
$x =$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$





~~BKDE~~;

~~BK·BA~~

$2\sqrt{2}\,x = 4$

$x = \sqrt{2}$

2·1 4·3 6·5 4·3

2 12 30 12

~~BK~~

5 6

0 – 1
1 – 2
2 – 4
3 – 6
4 – 4
5 – 1
6 – 1

2 1

2 3
4 5 6 9
7 8 10 12 15 18
14 16 20 21

~~x·y = 8~~

$BA \cdot BK = 9;$

$AD \cdot DE = 3;$

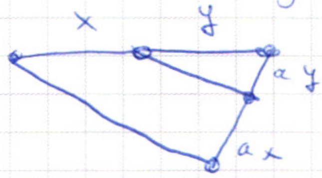
8·1
9·1

$(x+y)\cdot x = 9$

$2 + 12 \cdot 2 + 30 =$
24

$a(x+y)\cdot a y = 9$

$a^2(xy + y^2) = 9$



$a^2 \cdot x \cdot (x+y) = 1$

$a^2 = \frac{1}{3}$

$2 + 16 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

$1{,}5\sqrt{2} = R;$

$\cos \angle BAC = \frac{1}{3};$

$\frac{3}{2}\sqrt{2}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{2}$

$x \cdot 3\sqrt{2} = 9$

$x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$

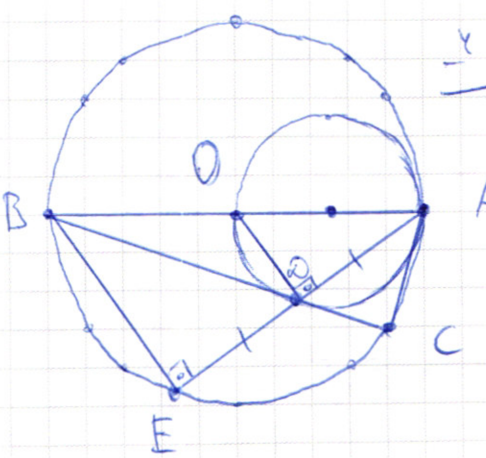
420 − 56

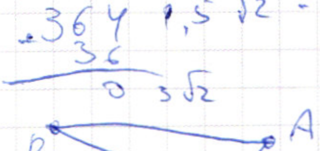
400 − 36 = 364 − 36 = 0

$1{,}5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9$

364 / 2 = 182

$3\sqrt{2}$





$\frac{1\cdot\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

$C \quad -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

$\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$8 + 2 - 1 = 9 \quad 2 + 1 - 1 \quad 2 - 1 - 1 \quad 8 - 2 - 1 = 5$

$20 + 18 \cdot 2$

1, [2, 3], [4, 5, 6, 9], [7, 8, 10, 12, 15, 18], [14, 16, 20, 21], 11, 13, 17, 19

70

$56 + 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 3 + 2 + 1$