МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c – послед. члены геом. прогр. $\Rightarrow b = aq,\ c = aq^2$, q – знам. геом. прогр. d – корень $ax^2 - 2bx + c = 0$, и d – след. член. геом. прогр.

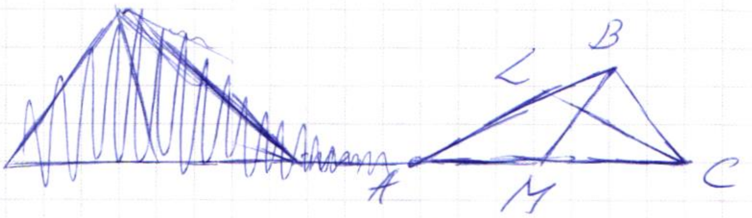
$d = aq^3$ $\quad a\cdot(aq^3)^2 - 2\cdot aq\cdot aq^3 + aq^2 = 0 \quad a^3q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

$a, q \neq 0$, т.к. дана геом. прогр. $\Leftarrow$ $a^2q^4 - 2aq^2 + 1 = 0$

$(\underbrace{aq^2}_{=c} - 1)^2 = 0 \quad (c-1)^2 = 0 \quad c = 1$

Ответ: третий член. геом. прогр. $c = 1$

№2



BM-медиана, CL-бис-са

$BM \perp CL \Leftrightarrow$ CL – высота треуг. $CBM \Leftrightarrow$, по усл. CL-бис-са $\Leftrightarrow \triangle CBM$ – равнобедр. $\Leftrightarrow CB = CM \Leftrightarrow$ (т.к. BM-мед.) $\Leftrightarrow AC = 2BC$ таким образом усл. задачи экв. тому что $2BC = AC$, обозначим $BC = a$, $AB = b$, тогда $AC = 2a$

$P = 900 \Rightarrow 3a + b = 900$, по нер. треуг. $2a \leq a + b$, $b \leq 3a \quad a \leq b \leq 3a \quad 900 = 3a + b \leq 6a \quad a \geq 150$

$900 = 3a + b \geq 4a \quad a \leq 225$, при этом $a \leq 2a + b$, тогда треугольник со сторонами $a, 2a, b$, где $150 < a < 225$, $b = 900 - 3a$ сущ. То есть подходят треуг. в которых a целое и $150 < a < 225$ и только они $k = 225 - 150 - 1 = 74$, k – кол-во таких треуг.

Ответ: $k = 74$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3 $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$ Решим систему

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{x(y-1)-6(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-36-2+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$ Введем $z=x-6$, $t=y-1$, тогда

$z-6t=x-6-6y+6=x-6y$

$\begin{cases} z-6t=\sqrt{zt} \\ z^2+2t^2=18 \end{cases}$ $z\geq 6t, zt\geq 0$ $z^2-12zt+36t^2=zt$

$z^2-13zt+36t^2=0$, пусть $t\neq 0$

$\left(\frac{z}{t}\right)^2-13\frac{z}{t}+36=0$ $D=169-144=25$ $\frac{z}{t}=\frac{13\pm 5}{2}$

1) $\frac{z}{t}=4$ $z=4t$ $z^2=16t^2$ $18t^2=18$ $t^2=1, t=\pm 1$

1.1) $t=1$ $z=4$, но $z-6t=-2<0$ - эти пара не подходят

1.2) $t=-1$, $z=-4$ $z-6t=2>0$, тогда

$x=z+6=2$, $y=t+1=0$ $(2,0)$

2) $\frac{z}{t}=9$ $z=9t$ $z^2=81t^2$ $83t^2=18$ $t=3\sqrt{\frac{2}{83}}$

~~$z^2=81\frac{18}{83}$~~ 27 2.1) $t=3\sqrt{\frac{2}{83}}$ $z=27\sqrt{\frac{2}{83}}$ $z-6t=3\sqrt{\frac{2}{83}}>0$

$x=z+6=6+27\sqrt{\frac{2}{83}}$, $y=t+1=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1$

2.2) $t=-3\sqrt{\frac{2}{83}}$ $z=-27\sqrt{\frac{2}{83}}$ $z-6t=-3\sqrt{\frac{2}{83}}<0$, (z,t) не подходит

Осталось проверить случай $t=0$, тогда

$z-6\cdot 0=\sqrt{z\cdot 0}$ $z=0$ $0^2+2\cdot 0^2=18$ - не верно

Ответ: $(2,0)$, $\left(6+27\sqrt{\frac{2}{83}}, 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

№7 $\forall a,b\in\mathbb{Q}^+$ $f(ab)=f(a)+f(b)$, возьмем $a=b=1$, тогда $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$ $f(1)=0$, теперь взяв за a и b k и $\frac{1}{k}$, $k>0, k\in\mathbb{Q}$, $f(k\cdot\frac{1}{k})=f(k)+f(\frac{1}{k})$ $f(k)=-f(\frac{1}{k})$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть если $f(\frac{x}{y})$ - пол. число $_{x,y\in\mathbb{N}}$, то $f(\frac{y}{x}) = -f(\frac{x}{y})$ - отриц. число, и наоборот, ~~тогда~~ так $2\le x\le 22$ и $2\le y\le 22$ ~~сли~~ среди пар (x,y) будет сущ. пара (y,x) и среди них либо только одна положительна, либо ~~обе~~ они обе нули, всего пар $21^2=441$, тогда ~~разход~~ положительных из них $\frac{21^2-k}{2}$, k - число нулевых пар. Если $x=y$, то $f(\frac{x}{y})=f(1)=0$, пусть $x\ne y$, и $(x,y)=1$ иначе можно сокр. на общ. множ. и допустим, что $f(\frac{x}{y})=0$ Выпишем чему равно $f(p)$, $p\le 22$, p - простое $f(2)=1, f(3)=2, f(5)=3, f(7)=4,$ $f(11)=6, f(13)=7, f(17)=9, f(19)=10$. ~~и будем перебирать x и y по ниш числам $f(\frac{19}{y})=10-f(y)=0$ $f(y)=10$ $y=p^\alpha\cdot q^\beta$ $2\cdot3\cdot5=30>22 \Rightarrow$ множителей не больше 2 $f(p^\alpha q^\beta)=f(p)+f(p^{\alpha-1}q^\beta)=\ldots=\alpha f(p)+\beta f(q)=10$ $f(p)=p\ne2, q\ne1$ Пусть среди простых множ. нет 2, тогда $f(p)=\frac{p+1}{2}$ $f(p^\alpha\cdot q^\beta)=\alpha f(p)+\beta f(q)=\alpha\frac{p+1}{2}+\beta\frac{q+1}{2}$ очевидно, что, 13, 17, 19 не могут идти вместе с другими простыми множит. тогда $10=6+4$ $11\cdot7>22$, то есть $10=f(17)$ не может быть представл. в вид $\alpha f(p)+\beta f(q)$, $p^\alpha\cdot q^\beta\le22$, аналог. $f(11)$ и $f(13)$~~

Рассмотрим все ~~вари~~ $y=p^\alpha\cdot q^\beta$, $2\le y\le 22$ т.к. $2\cdot3\cdot5=30>22$ ~~вр~~ в разл. не более 2 прост. мн.

$f(19)=10$, $f(17)=9$, $f(13)=7$, $f(11)=6$, $f(11\cdot 2)=f(6)+f(2)=7$

$f(7)=4$, $f(7\cdot 2)=f(7)+f(2)=4+1=5$, $f(7\cdot 3)=f(7)+f(3)=4+2=6$

$f(5)=3$, $f(5\cdot 2)=f(5)+f(2)=4$, $f(5\cdot 2\cdot 2)=f(5)+2f(2)=5$

$f(5\cdot 3)=f(5)+f(3)=3+2=5$, $f(3)=2$, $f(3\cdot 3)=2f(3)=$

$=4$, $f(3\cdot 2)=f(3)+f(2)=3$, $f(3\cdot 2\cdot 2)=f(3)+2f(2)=4$

$f(2)=1$, $f(2\cdot 2)=2f(2)=2$, $f(2^3)=3f(2)=3$, $f(2^4)=4f(2)=4$

найдём совп. числа, перебрав все такие разлож. можно получить все кол-во обр. в пару $f(4)=f(3)$, $f(8)=f(5)=f(6)$, $f(16)=$

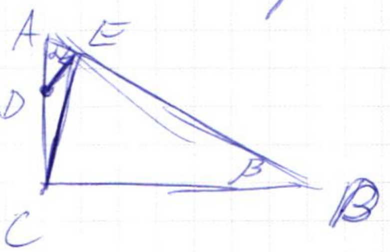
$=f(12)=f(9)=f(10)=f(7)$, $f(15)=f(14)=f(20)$
$f(21)=f(11)$

$k=21+\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}=21+1+3+60+3+1=$

$=89$ $\quad \frac{441-89}{2}=176$

Ответ. 176 пар

N.4



$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$, $DE\perp AB$, $AC\perp CB$, $\angle DEC=30^\circ$

$\angle ABC=\beta$, $\angle CAB=\alpha$

$\angle AEC=90^\circ+30^\circ=120^\circ$

по т. синусов $\frac{CB}{\sin\angle CEB}=\frac{CE}{\sin\beta}$

$CE=\frac{CB\cdot\sin\beta}{\sin 60^\circ}$ $\quad \left.\begin{matrix}\angle CAB = \text{общ.}\\ \angle DEA=\angle ACB\end{matrix}\right| \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BC}{DE}=\cancel{AE}\frac{AC}{AE}$ $\quad BC=\frac{AC\cdot DE}{AE}$ $\quad CE=\frac{AC\cdot DE}{AE\cdot\sin 60^\circ}\cdot\sin\beta=$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{AC\cdot DE}{AE}\cdot\cos\alpha=\cancel{\frac{2}{\sqrt3}\,3DE}\ 2\sqrt{3}\,\frac{AD}{AE}\cdot\cos\alpha\cdot DE=$
т.к. $\alpha=90-\beta$

$=2\sqrt{3}\,DE$, т.к. $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ $\quad CE=2\sqrt{3}\,DE$

$AC^2=AE^2+EC^2-2AE\,EC\cos 120^\circ=AE^2+EC^2+AE\,EC=$

$=AE^2+12DE^2+2\sqrt{3}\,AE\,DE=9AD^2=$

$AD^2=AE^2+ED^2$ $\quad =9AE^2+9ED^2$
по т. пиф. в $\triangle AED$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3DE^2+2\sqrt{3}EADE-8AE^2=0$

$3\left(\frac{DE}{AE}\right)^2+2\sqrt{3}\frac{DE}{AE}-8=0 \quad D=12+96=108=12\cdot 9=36\cdot 3$

$\frac{DE}{AE}=\frac{-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{DE}{AE}=\frac{-2\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{6}<0$ – не подх. т.к. $\alpha<90^\circ$

$\boxed{tg\,\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$AC=\sqrt{7} \quad 7=12ED^2+AE^2+2\sqrt{3}AEED$

$AE\perp ED \Rightarrow S_{AED}=\frac{AE\cdot ED}{2} \quad \frac{S_{AED}}{S_{ACE}}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3} \quad S_{ACE}=3S_{AED}=6AEED$

$AE\cdot ED=\frac{1}{6}S_{ACE} \;\Big|\; AE^2+ED^2=AD^2=\frac{7}{9} \;\Big|\; \frac{AE}{ED}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AE^2+ED^2=\frac{4}{3}ED^2+ED^2=\frac{7}{3}ED^2=AD^2=\frac{7}{9}$

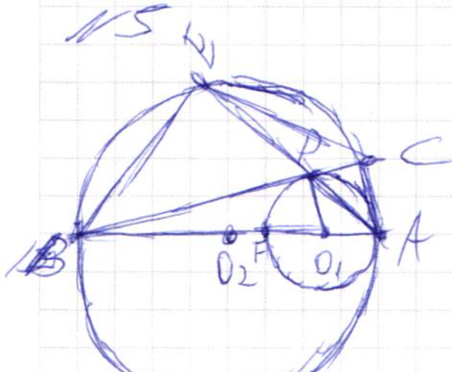
$ED^2=\frac{1}{3}$

$7=11\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{9}+\frac{1}{4}\sqrt{3}S_{ACE} \quad S_{ACE}=\left(\frac{56}{9}-\frac{33}{9}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}=$

$=\frac{92}{9\sqrt{3}}=\frac{92\sqrt{3}}{27}$

Ответ: $tg\,\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $S_{ACE}=\frac{92\sqrt{3}}{27}$

№5



$BD=3, DC=2$, BD – касат. к $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~BDADO₁~~ $\angle BDO_1=90$, BC – опир. на

AB – диам. $\Rightarrow \angle BCA=90^\circ=\angle BDO_1$ /
$\angle CBA$ – общ. / $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO_1 \sim BCA \Rightarrow \frac{BO_1}{BA}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{5}$

$\frac{BO_1}{BA}=\frac{2R-r}{2R}$, R – рад. большой окр. r – малой

BD – касат., BC $\Rightarrow BD^2 = BF \cdot BA = (2R-2r)2R = 4R^2 - 4rR$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 9 \\ \dfrac{2R-r}{2R} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \quad 10R - 5r = 6r \quad 4R = 5r \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$$

$$4R^2 - \frac{16}{5}R^2 = \frac{4}{5}R^2 = 9 \quad \boxed{R = \frac{3}{2}\sqrt{5}}$$

$$\boxed{r = \frac{6}{5}\sqrt{5}}$$

$BO_1 = 2R - r = \cancel{\sqrt{5}\left(\frac{6}{2} - \frac{6}{5}\right)}\ 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 6\sqrt{5} \cdot \frac{3}{10}$

$= \frac{9}{5}\sqrt{5}$ $\cancel{DO_1 = \sqrt{BO_1^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{81}{5} - 9} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}}$

$DO_1 = r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ $AC = DO_1 \cdot \frac{BA}{BO_1} = \frac{6}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{5}{9\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} =$

$= 2\sqrt{5}$ $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = 5\sqrt{5}$ $DA = \sqrt{AC^2 + DC^2} =$

$= \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6}$ $\cancel{DA \cdot DE = DB \cdot BC}$

$\cancel{DE = \frac{DB \cdot BC}{DA} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}}$ $\sin\angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\parallel$

$\sin\angle BEC$

$$S_{EBC} = \frac{BE \cdot BC \cdot \sin\angle BEC}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot BE$$

$DE = \frac{DB \cdot BC}{DA} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $EA = ED + DA = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

как хорды окр.

$$BE = \sqrt{BA^2 - EA^2} = \sqrt{45 - \frac{75}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$S_{EBC} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ $S_{ACEB} = S_{EBC} + S_{ABC} = \frac{13}{2}\sqrt{5}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, $S_{ACEB} = \frac{13}{2}\sqrt{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

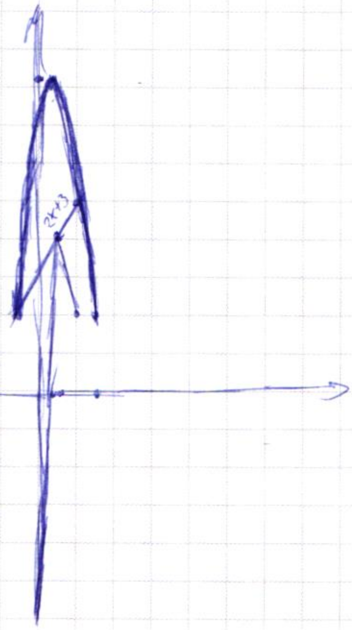
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 найти (a, b) $\quad 8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$-8x^2+6x+7$ — парабола с ветв. напр. вниз

$x_в = -\frac{6}{-16} = \frac{3}{8}$ $\quad y_в = -8\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2+6\cdot\frac{3}{8}+7 = -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7 = \frac{65}{8}$

то есть прямая $ax+b$ лежит под графиком параболы на отрезке $[-\frac{1}{2}, 1]$



$x=1$ $\quad -8+6+7=5$

~~$x=\frac{3}{2}$~~

$x=-\frac{1}{2}$ $\quad -2-3+7=2$

$y=8x-6|2x-1|$

1) $x \ge \frac{1}{2}$ $\quad y=-4x+6$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad x=1$

2) $x < \frac{1}{2}$ $\quad y=20x-6$

$x=0,\ y=-6$

пусть $(1,5)$ и $(-\frac{1}{2}, 2) \in$ графику $ax+b$

$a+b=5$ $\quad 3b=9$ $\quad b=3$ $\quad a=2$ $\quad$ в точке $\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}a+b=2$ $\quad ax+b=4$, тогда прямая $ax+b$ пересекает параболу в двух точках — $-\frac{1}{2}$ и 1, и обе прямые $y=20x-6$ и $y=-4x+6$ в точке $\frac{1}{2}$, при этом тогда такая прямая удовлетв. усл., т.к. в таком случае её график лежит над гр. первой функции и под графиком второй, при этом она ед.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

единств. удовлетв. данным условиям, т.к. любые другие будет иметь пересечение с графи- ком какой-то из функций на $(-\frac{1}{2}, 1)$ т.к. разность меняет знак - что очевидно приводит к противоречию, ~~Т.к.~~ Любая прямая параллельная данной очевидно пересечёт какой-то из графиков ~~$\frac{1}{2}$~~ на $(-\frac{1}{2}, 1)$, при этом каждая прямая может быть получена из ~~данной~~ парал. поворотом вокруг точки ~~нас~~ с абсциссой $\frac{1}{2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

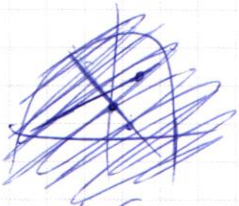
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

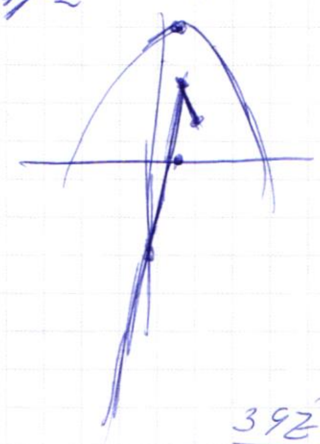
$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{8}$ $\quad y_0 = -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7 = \frac{9}{8}+7 = \frac{63}{8}$

$ax+b \le$

$x \ge \frac{1}{2}$ $\quad 8x-12x+6 = -4x+6$



$x < \frac{1}{2}$



$20x - 6$

$t = x-6,\ z = y-1$

$t-6z = x-6y$

$t = \frac{34z^2+18}{13z}$

$t-6z = \sqrt{6z}$ $\quad \frac{34z^2+18}{13z} - 6z = \sqrt{\frac{34z^2+18z}{13}}$

$\frac{39z^2-78z^2+18}{13z} = \frac{-44z^2+18}{13z} = \sqrt{\frac{34z^2+18}{13}}$

$44^2z^4 - 2\cdot18\cdot44z^2+18^2 = 13\cdot34z^4+18\cdot34z^2$

$(44^2-13\cdot34)s^2 - 18\cdot122s+18^2 = 0$ $\quad \begin{array}{r}+61\\61\\\hline 61\\366\\\hline 3721\end{array}$

$122 = 2\cdot61$ $\quad 61^2 = 3721$

$\begin{array}{r}44\\\times44\\\hline176\\176\\\hline1936\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}13\\\times34\\\hline52\\39\\\hline442\end{array}$ $\quad 1494 = 2\cdot747 = 2\cdot9\cdot83$

$\begin{array}{r|l}747 & 9\\72 & 83\\\hline27 & \end{array}$ $\quad D = 18^2\cdot122^2 - 4\cdot18^3\cdot83 = 18^2(122^2-4\cdot18\cdot83) =$

$= 18^2\cdot2^2(61^2-1494)$ $\quad \begin{array}{r}3721\\-1494\\\hline2227\end{array}$ $\quad t-6z = \sqrt{6z}$

$t-6z \ge 0$ $\quad t^2+2z^2 = 18$

$t^2-12tz+36z^2 = 6z$

$144 = 25$

$\left(\frac{t}{z}\right)^2 - 13\frac{t}{z}+36 = 0$ $\quad D = 196 - \cancel{144}$

$\frac{t}{z} = \frac{13\pm5}{2}$ $\quad 1)\ \frac{t}{z} = 2$ $\quad t^2 = 4z^2$ $\quad 6z^2 = 18$ $\quad z = \sqrt{3}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

~~$f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$~~

$f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$ $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$0=f(2\cdot\frac{1}{2})=1+f(\frac{1}{2})$ $f(\frac{1}{2})=-1$ f

$f(k\cdot\frac{1}{k})=f(k)+f(\frac{1}{k}) \Rightarrow f(\frac{1}{k})=-f(k)$

$f(\frac{x}{y})=-f(\frac{y}{x}) \Rightarrow$, если $f(\frac{x}{y})$ - пол., то $f(\frac{y}{x})$ - отриц.

$x=y$ $f(\frac{x}{y})=0$ $21^2-21=420$

$f(\frac{6}{7})=-f(\frac{7}{6})$ $f(\underset{\substack{\| \\ f(1) \\ \| \\ 0}}{k\cdot\frac{1}{k}})=f(k)+f(\frac{1}{k})$

$f(k)=-f(\frac{1}{k})$

(x,y) - пара $\Rightarrow$ (y,x) - пара

$f(\frac{x}{y})$ - пол. $\Rightarrow f(\frac{y}{x})=-f(\frac{x}{y})$ - отриц. $p\le q$

$f(\frac{x}{y})\neq 0$ $f(\frac{x}{y})=0$, $x\neq y$ $x=p^{\alpha}\cdot q^{\beta}$ $\alpha\le q$, $\beta<2$

~~$f(\frac{x}{y})=f(\frac{p_1^{\alpha}\cdot q_1^{\beta}}{p_2^{\alpha}\cdot q_2^{\beta}})=f(p_1^{\alpha}\cdot q_1^{\beta})+f(\frac{1}{p_2^{\alpha}\cdot q_2^{\beta}})=f(p_1^{\alpha}\cdot q_1^{\beta})-$~~

~~$-f(p_2^{\alpha}\cdot q_2^{\beta})=\alpha_1 f(p_1)+\beta_1 f(q_1)-\alpha_2 f(p_2)+\beta_2 f(q_2)=$~~

~~$=\alpha_1\left[\frac{p_1}{2}\right]+\beta_1\left[\frac{q_1}{2}\right]-\alpha_2\left[\frac{p_2}{2}\right]+\beta_2\left[\frac{q_2}{2}\right]=0$~~

~~$p_1=2$, $p_2=2$ $\alpha_1-\alpha_2+\beta_2\frac{q_2-1}{2}-\beta_2\frac{q_2-1}{2}=0$~~

~~$f(\frac{p_1^{\alpha_1}\cdot q_1^{\beta_1}}{p_2^{\alpha_2}\cdot q_2^{\beta_2}})=\alpha_1\cdot\frac{p_1-1}{2}+\beta_1\frac{q_1-1}{2}-\alpha_2\frac{p_2-1}{2}-\beta_2\frac{q_2-1}{2}$~~

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$ $x-6y=\sqrt{x(y-1)-6(y-1)}=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$ $2\sqrt{2}(x-6y)^2=2\sqrt{2}(x-6)(y-1)$

$(\underset{t}{x-6})^2+2(\underset{z}{y-1})^2-36-2+20=0$

~~$(x-6)^2+2\sqrt{2}(x-6)(y-1)+2(y-1)^2$~~ $t-6z=\sqrt{tz}$

$t^2+2z^2=18$ $t^2+2\sqrt{z}$ $t^2+12tz+36z^2+12tz-34z^2=18$

$13tz-34z^2=18$ ~~$34z^2+18$~~ $t=\frac{34z^2+18}{13z}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, aq, aq^2, aq^3 $\quad a^3q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$ $\quad \cancel{a=0, q=0}$

$a^2q^5 - 2aq^3 + q = 0$ $\quad aq^3(aq^2-1) + q(1-aq^2) =$

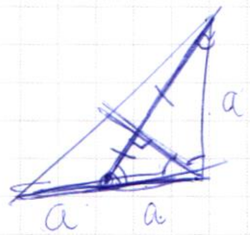
$= (aq^3-1)(aq^3-q) = 0$ $\quad (aq^3-1)(aq^2-1) = 0$

$\exists\, aq^3 = 1$ $\quad a - 2b + c = 0$ $\quad b = \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} = b$

$\Rightarrow a = c \Rightarrow q = 1$

$a^3 - 2a^2 + a = 0$ $\quad a(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Ответ: 1

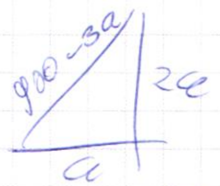


$a + 2a + b = 900$ $\quad 2a \leq a + b \Rightarrow b \geq a$,

$a < b \leq 3a$ $\quad 900 \leq 6a$ $\quad a \geq 150$

$900 \geq 4a \Rightarrow a \leq 225$

$225 - 150 + 1 = 76$ $\quad a \in [150, 225]$



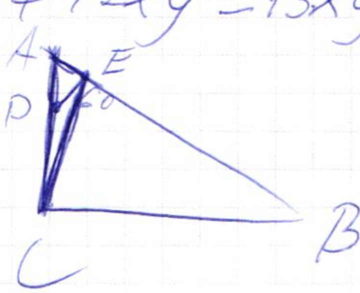
$3a \geq 900 - 3a$ $\quad 2a \leq 900 - 2a$

$b = \frac{39z^2+18}{137}$

$\cancel{(x-6y)^2}$ $\quad x^2 - 12xy + 36y^2 = (x-6y)^2$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 24y + 20 = (x-6y)^2 - 12x - 24y + 20 - 34y^2 +$

$+ 12xy = 13xy - 13x - 26y + 26 - 34y^2 = 0$



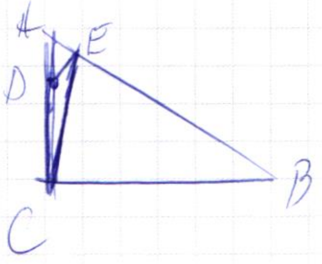
$\angle CED = 30^0$ $\quad 3AD^2$

$AD^2 = AE^2 + ED^2$ $\quad AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2AE\cdot EC\cos 120^0 =$

$= AE^2 + EC^2 + AE\cdot EC$

$8AD^2 = AE\cdot EC$ $\quad \frac{AC}{\sin 120^0} = \frac{EC}{\sin\alpha}$ $\quad 3AD = AC$

$\frac{8}{3}AD\cdot\frac{\sqrt3}{2} = AE\cdot\sin\alpha$ $\quad \frac{AE}{AD} = \cos\alpha$ $\quad \sin\alpha = 4\sqrt3$

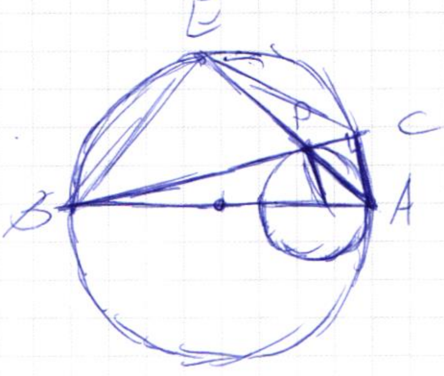


$AB = \frac{AC}{3}$ $\quad AD^2 = AE^2 + ED^2$

$9AD^2 = AC^2 = \cancel{9AD} \; AE^2 + EC^2 - 2AE\,EC\cos 120^\circ =$ $\;\; -\frac{1}{2}$

$= AE^2 + EC^2 + AE \cdot EC$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB}$ $\quad \frac{AC}{CB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \cancel{AD}$



$CP = 2BP = \cancel{3}$ $\quad AD \cdot ED = 6$

$8AD^2 = EC^2 - ED^2 + AE \cdot EC$

$\frac{EC}{\sin\beta} = \frac{CB}{\sin 60}$ $\quad EC = \sin\beta \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} CB =$

$\cancel{ED = \frac{AE \cdot CB}{AC}}$ $\quad CB = \frac{ED \cdot AC}{AE}$

$= \sin\beta \cdot \frac{2ED \cdot AC}{\sqrt{3}\,AE} = \frac{2\sqrt{3}\,ED \cdot AD}{AE} \sin\beta$

$\frac{12ED^2AD^2}{AE^2}\sin^2\beta - ED^2 + \cancel{AE} \; 2\sqrt{3}\,ED\,AD\,\sin\beta = 8AD^2$

$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{AE}{AD}$

$\cancel{12ED^2\sin^2\beta + 12\frac{ED^2}{AE}\sin}$ $\quad 12ED^2 - ED^2 + 2\sqrt{3}\,AE \cdot ED =$

$= 8AE^2 + 8ED^2$ $\quad \boxed{EC = 2\sqrt{3}\,ED}$

$3ED^2 + 2\sqrt{3}\,AE\,ED - 8AE^2 = 0$

$\cancel{12AE \ldots 96AE^2}$ $\quad 3\left(\frac{ED}{AE}\right)^2 + 2\sqrt{3}\frac{ED}{AE} - 8 = 0$

$D = 12 + 96 = 108 = 9 \cdot 12$ $\quad ctg\alpha = \frac{-2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\quad 7 = 12ED^2 + AE^2 + AE \cdot EC$

$7 = 11ED^2 + AD^2 + 2\sqrt{3}\,AE \cdot ED$

$7 - \frac{7}{9} = 11ED^2 - 4\sqrt{3}\,S_{AED}$ $\quad \frac{AE}{ED} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad AE^2 + ED^2 = \frac{4}{3}ED^2 +$

$+ ED^2 = \frac{7}{9}$ $\quad ED^2 = \frac{1}{3}$ $\quad \boxed{\frac{56}{9} = \frac{11}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} S_{AED}}$

$\cancel{\frac{56}{3} - 11 =}$

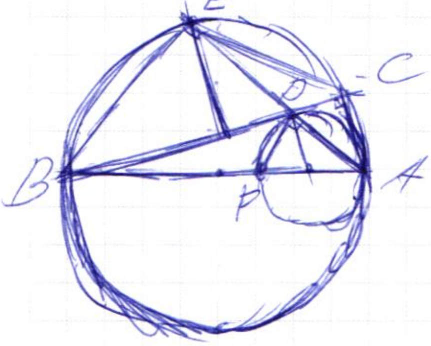
☑ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD=2,\ BD=3 \quad AD\cdot AE=6$

$\cancel{9=BD^2=2(R-r)\cdot 2r}$

$\frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AB}=\frac{r}{R} \quad \frac{AD}{AE}R^2=Rr$

$\frac{AD}{2r}=\cos\alpha=\frac{AE}{2R} \quad \frac{3}{2rR}=\cos^2\alpha$

$\cancel{2rR=\frac{3}{\cos^2\alpha} \quad \frac{6}{\cos^2\alpha}-4r^2=9}$

$6-4AD^2=9\cos^2\alpha$

$9=BD^2=2(R-r)\cdot 2R=4R^2-4rR=4R^2-4R^2\cdot\frac{AD}{AE}=$

$=4R^2\cdot\frac{AE-AD}{AE}=4R^2\cdot\frac{AD}{AE}$

$\frac{3}{5}=\frac{BD}{BC}=\frac{2R-r}{2R} \quad 9=4R^2-4rR$

$6R=10R-5r \quad 5r=4R$

$4R^2-\frac{16}{5}R^2=9 \quad \frac{4}{5}R^2=9 \quad R=\frac{3}{2}\sqrt5$

$f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(5)=3,\ f(7)=4,\ f(11)=6$

$f(13)=7,\ f(17)=9,\ f(19)=10$

$\cancel{f\left(\frac{p^2q^\beta}{z^\gamma\omega}\right)=\alpha f(p)+\beta f(q)-\gamma f(z)-\omega f(t)}$

$f\left(\frac{11\cdot 2}{p^\alpha q^\beta}\right)=7-\alpha \underset{3}{f(p)}-\beta \underset{4}{f(q)}=0$

$2\cdot 2$

$f\left(\frac{7\cdot 2}{3\cdot 5}\right)=f(7)+f(2)-$
$-f(3)-f(5)=$
$=4+1-3-2=0$

$5-\alpha \underset{2}{f(p)}-\beta \underset{3}{f(q)}=0 \quad 3$

$6-\frac{1}{3}-\frac{4}{4}=3$

$8x-6|2x-1|\le -8x^2+6x+7$

$-8x^2-2x+6|2x-1|+7\ge 0$ $\quad$ 1) $x\le \frac{1}{2}$

$-8x^2-14x+13\ge 0$ $\quad$ 2) $x\ge\frac{1}{2}$ $\quad -8x^2+10x-1\ge 0$

$D=100-32=68$ $\quad x=\frac{-10+2\sqrt{17}}{-16}=\frac{-\sqrt{17}+5}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{17}+5}{8}\ge 0$

$\cancel{\frac{-\sqrt{17}+5}{8}\ge\frac{1}{2}\quad -\sqrt{17}+5\ge -4\quad -\sqrt{17}\ge -9}$

352

$-8x^2-2x+6|2x-1|+7=0$ $\quad x=\frac{1}{2}$ $\quad x=-\frac{1}{2}$ $\quad x=1$

$\cancel{-2-1+7=4}$ $\quad \cancel{12+7}$ $\quad 6-8-2+7=3$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА