МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① a, b, c — $\because$

1. $ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac$

$x = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ — 4-ый член $\because$

заметим, $b = \sqrt{ac}$ — св-во $\because$, тогда $x = \frac{\sqrt{ac} \pm \sqrt{(\sqrt{ac})^2 - a}}{a} = \sqrt{\frac{c}{a}}$.

2. Последовательность выглядит так:

$a;\ b;\ c;\ x$, то есть: $\underset{b_1}{a};\ \underset{b_2}{\sqrt{ac}};\ \underset{b_3}{c};\ \underset{b_4}{\sqrt{\frac{c}{a}}}$

заметим что $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3} = q$, то есть $\frac{\sqrt{ac}}{a} = \frac{\sqrt{c}}{c\sqrt{a}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \Leftrightarrow c\sqrt{a} = \sqrt{a} \,\Big|: \sqrt{a}$, т.к $a \neq 0$ (члены отличны друг от друга)

$c = 1$

Ответ: $c = 1$.

③ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

1. Преобразуем: $\begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(y-1)\cdot(x-6)} \\ 2(y-1)^2 + (x-6)^2 - 18 = 0 \end{cases}$

Замена: $x - 6 = a$; $y - 1 = b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ 2b^2 + a^2 - 18 = 0 \end{cases}$

2) $a \geq 6b$, возведём первое в квадрат: $a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \,\Big|: b^2,\ b \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0$

$\frac{a}{b} = 4$; $\frac{a}{b} = 9$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1 случай: $\frac{a}{b} = 4 \Rightarrow a = 4b$

подставим b: $2b^2 + a^2 - 18 = 0$

$2b^2 + 16b^2 - 18 = 0$

$18b^2 = 18$

$b = \pm 1$

$b = 1,\ a = 4$ – п.к. т.к условие $a \geq 6b$ не выполняется

$\underline{b = -1;\ a = -4}$ – подходит

2 случай:

$\frac{a}{b} = 9 \Rightarrow a = 9b$

аналогичной подстановкой получаем: $2b^2 + 81b^2 - 18 = 0$

$83b^2 = 18$

$b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}} = \pm\frac{3\sqrt{166}}{83}$

тогда, если

$b = \frac{3\sqrt{166}}{83}$, $a = \frac{27\sqrt{166}}{83}$, удовлетворяет $a \geq 6b$

$b = -\frac{3\sqrt{166}}{83}$, $a = -\frac{27\sqrt{166}}{83}$, не удовлет. $a \geq 6b$ – п.к.

3) Вернемся к замене:

$\begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} y - 1 = -1 \\ x - 6 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

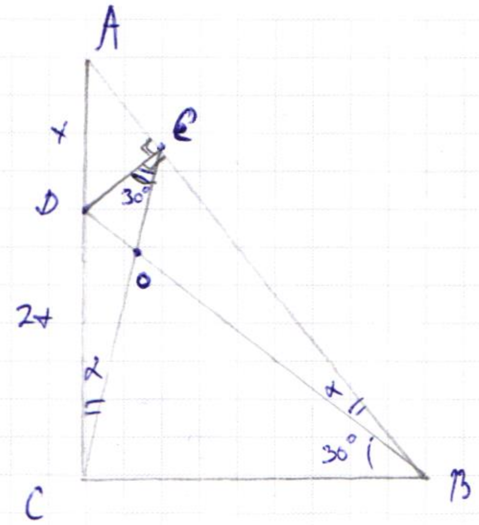
и $\begin{cases} b = \frac{3\sqrt{166}}{83} \\ a = \frac{27\sqrt{166}}{83} \end{cases}$ $\begin{cases} y - 1 = \frac{3\sqrt{166}}{83} \\ x - 6 = \frac{27\sqrt{166}}{83} \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{3\sqrt{166}}{83} + 1 \\ x = \frac{27\sqrt{166}}{83} + 6 \end{cases}$

__Ответ:__ $(x = 2;\ y = 0)$; и $\left(x = \frac{27\sqrt{166}}{83} + 6;\ y = \frac{3\sqrt{166}}{83} + 1\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



а) 1. пусть $\angle EBD = \alpha$, тогда:

$\angle EDB = 90 - \alpha$;

$\angle ADB = \angle CEB$ (т.к. CDEB – вписанный $\angle C = \angle DEB$)

$\angle CDB = 90^\circ - 30 = 60^\circ$

$\angle ADE = 180^\circ - (\angle EDB - \angle CDB) =$
$= 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ + \alpha = 30^\circ + \alpha$

т.к. CDEB - вписанный, $\angle ADE = \angle EBC = 30^\circ + \alpha$ (сумма противополож. $= 180^\circ$)

если $\angle EBC = 30^\circ + \alpha$, а $\angle EBD = \alpha$, то $\underline{\angle DBC = 30^\circ}$

2. $\triangle CDB$ - прямоугольн.

т.к. $AD : AC = 1 : 3$, обозначим $AD = x$, тогда $DC = 2x$.

$DB = 2DC = 4x$ (катет напротив $\angle 30^\circ$)

$\Rightarrow CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$

3. Имеем: $AC = 3x$; $CB = 2\sqrt{3}x \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} =$
$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б)
1. $AC = \sqrt{7} \Rightarrow AC = \sqrt{7} = 3x$, $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$AB = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = 21x^2 = 21 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = 7\sqrt{7}$

тогда $\sin\angle ABC = \sin(30^\circ + \alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$.

2. В $\triangle CEB$: $\frac{CB}{\sin 60} = \frac{CE}{\sin ABC}$; $CB = 2\sqrt{3} \cdot x = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\Rightarrow CE = \frac{2\sqrt{21} \cdot 2}{3 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{7}}{21}$;

3. $\angle EBD = \angle ECD = \alpha$ – т.к. $CDEB$ – вписанный.

$\Rightarrow \angle ECB = 90^\circ - \alpha$

$\sin\angle ECB = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\angle BAC$ из пункта (а) $= 90^\circ - (30^\circ + \alpha) = 60^\circ - \alpha$

$\cancel{\Rightarrow \cos\angle BAC = \cos(60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cos\alpha + \sin 60^\circ \sin\alpha}$

$\sin\alpha$ найдём из $\triangle DAB$: $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin ADB}$; $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDB =$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 7\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{14}$;

$\cancel{\Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{14} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{1}{7}}$

$\cancel{\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{7} - \frac{3}{28}}$

$\cancel{\frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{28}}$

$\cancel{\cos\alpha = \frac{1}{14}}$

$\cancel{4.\ \text{Из } \triangle CED \text{ знаем: } CE = \frac{4\sqrt{7}}{21};\ CB = \frac{2\sqrt{21}}{3};\ \sin\angle ECB = \frac{1}{14}}$

$\cancel{S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{21}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{3}\cdot\frac{1}{14} = \frac{8\sqrt[3]{147}}{1764}}$

~~Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $S_{\triangle}CED = \frac{8\sqrt{147}}{1764}$.~~

4. В $\triangle CED$ знаем: $CD = 2x = 2\sqrt{7}$; $CE = \frac{4\sqrt{7}}{21}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{14}$

$\Rightarrow S_{CED} = \frac{1}{2} CD \cdot CE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{21}\cdot\frac{\sqrt{3}}{14} = \frac{2\sqrt{3}}{21}$

Ответ: $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{21}$; $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

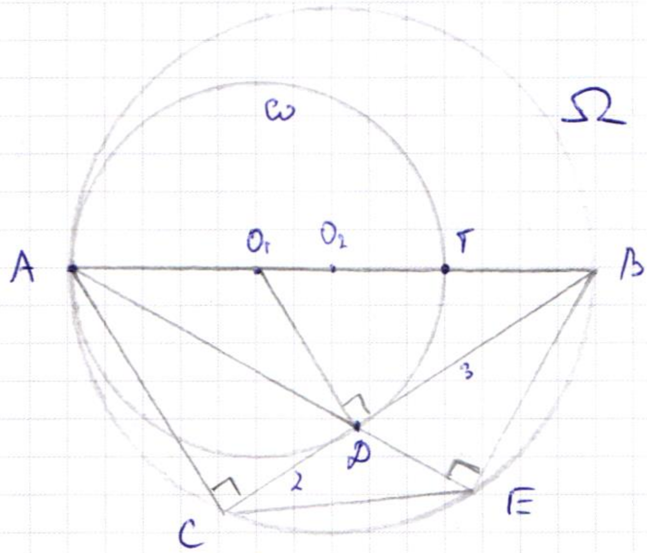
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



1. $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$ (опираются на диаметр).

$\triangle O_1DB \sim \triangle ACB$ ($\angle O_1DB = 90^\circ$ как радиус ω к касательной)
$\angle B$ – общий.

$\Rightarrow \dfrac{O_1D}{AC} = \dfrac{O_1B}{AB} = \dfrac{DB}{CB} \Rightarrow O_1B : \dfrac{\cancel{AB}}{AB} = 3 : 5$

$O_1B = 3x$, тогда $AO_1 = 2x$;

$AT = 2AO_1 = 2O_1T \Rightarrow TB = O_1B - O_1T = 3x - 2x = x$

2. По св-ву касательной и секущей: ~~TA~~ $TB \cdot AB = BD^2$

$x \cdot 5x = 9$

$x^2 = \dfrac{9}{5}$

$x = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$, т.к. $AO_1 = 2x = 2 \cdot \dfrac{3\sqrt{5}}{5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow R_\omega = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$; $AB = O_1B + AO_1 = 5x = 5 \cdot \dfrac{3\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$

~~Ab~~ $R_\Omega = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

S_{BACE} - ?

1. $\triangle ACB$ - прямоуг., $AC = \sqrt{\overset{AB^2}{\cancel{R^2}} - 25} = \sqrt{45 - 25} = 2\sqrt{5}$

$\triangle ACD$ - прямоуг.; $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$

2. По свойству пересекающихся хорд:

$AD \cdot DE = CD \cdot DB$

$2\sqrt{6} \cdot DE = 6$.

$DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

~~3. $\triangle DEB$ - прямоуг., $BE = \sqrt{DB^2 - DE^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$~~

~~4. $\angle ADB = \angle CDE$ - вертикальн.~~

~~по Th cos: $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot DB} = \frac{24 + 9 - 45}{2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 9} = -\frac{\sqrt{6}}{18}$~~

~~В $\triangle CDE$: по Th. косинусов: $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cos\angle CDE} =$~~

~~$= \sqrt{4 + 1\frac{1}{2} - 2 \cdot 2 \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{18}\right)} = \sqrt{\frac{37}{6}}$~~

3. $S_{ABEC} = \frac{1}{2} AE \cdot BC \cdot \sin\angle ADC$

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$AE = AD + DE = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

значит $S_{ABEC} = \frac{1 \cdot 5\sqrt{6} \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $R_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $S_{ABEC} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

$b_2 = \sqrt{b_1 b_3}$

a, b, c — $\because$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

корень - ген. член

Найти - c?

1) $ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac$

$x = \dfrac{2b \pm \sqrt{4(b^2-ac)}}{2a} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

2) $\boxed{b = \sqrt{ac}}$

a, b, c, x — $\because$ $\Rightarrow$ $c = \sqrt{b \cdot x} = \sqrt{b \cdot \dfrac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}}$

$\begin{cases} x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} \\ b = \sqrt{ac} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{ac} \pm \sqrt{ac-ac}}{a} = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ - корень, подставим:

$a \cdot \left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)^2 - 2b\left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right) + c = 0$

$\dfrac{\cancel{a} \cdot c}{\cancel{a}} - 2\underset{\sqrt{ac}}{\underset{\parallel}{b}} \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + c = 0$

$c - \dfrac{2 \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{a}} + c = 0$

$c - 2c + c = 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{c\sqrt{a}}$

получили: $a; \sqrt{ac}; c; \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ — $\because$

$q = \dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{c}}{a} = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ $a; b; c; \sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$a; \sqrt{a}, 1; \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\sqrt{\dfrac{c}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{ac}}$ - приравниваем q.

$c\sqrt{a} = \sqrt{a}$ $(a \neq 0)$

$c = 1$

3) $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$= \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)}$

~~квадрат (1): $x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$~~

~~$x^2 - 13xy + 6y + x - 6 + 36y^2 = 0$~~

Записать Ответ!!!

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)\cdot(x-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$2\cdot(y-1)^2+(x-6)^2$

$2y^2-4y+2+x^2-12x+36$

$\Updownarrow$

$2\cdot(y-1)^2+(x-6)^2-18$

преобразовать $x-6y$

$(x-6)-6(y-1)=x-6-6y+6$

$\Updownarrow$

$\frac{27\sqrt{166}}{83}$?

$x=6y$

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ 2\cdot(y-1)^2+(x-6)^2-18=0 \end{cases}$$

замена $x-6=a$; $y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ 2b^2+a^2-18=0 \end{cases}$$

$a\geq 6b$, ~~возведем в квадрат~~ (1):

~~a^2-12ab~~

~~$a=\sqrt{ab}+6b$, подставим $2b^2+(\sqrt{ab}+6b)^2-16=0$~~

$2b^2+ab+12b\sqrt{ab}+36b^2-16=0$

в квадрат (1): $a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$ – однородное

~~$a^2+2b^2-18=0$~~

$a^2-13ab+36b^2=0 \quad |:b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+36=0$

$+ \mid 13$

$\times \mid 36$

$9;4 \Rightarrow \frac{a}{b}=9$; $a=9b \Rightarrow$ ~~$9b\geq 6b$~~

$\Downarrow$ подставим в 2: $2b^2+81b^2-18=0$

$33b^2=18$

$b^2=\frac{18}{33}$

~~$\begin{cases} b=\pm\frac{4}{\sqrt{83}} \\ a=\pm\frac{9\cdot 4}{\sqrt{83}} \end{cases}$~~

$\Downarrow$

подставить!

$b=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}=\pm\frac{3\sqrt{166}}{83}$

$a=\pm\frac{27\sqrt{166}}{83}$

$\frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$

$a=4b$: $2b^2+16b^2-16=0$

$18b^2=18$

$b^2=\cancel{\frac{4}{\sqrt{13}}}\ 1$

~~$\begin{cases} b=\pm\frac{4}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{4\sqrt{2}}{6}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ a=\pm\frac{8\sqrt{2}}{3} \end{cases}$~~ $\Rightarrow$ подставить!

$\boxed{\text{проверить } a\geq 6b}$

$$\begin{cases} b=\pm 1 \\ a=\pm 4 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

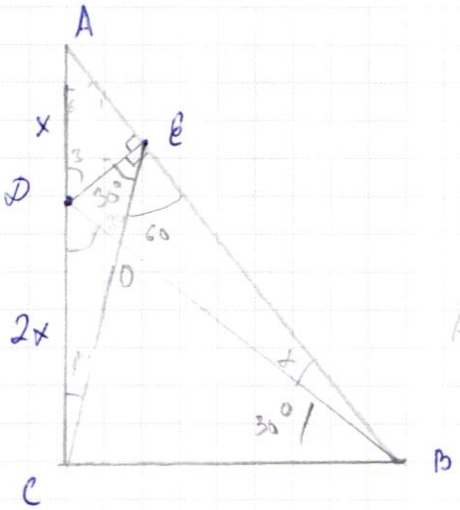
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



Найти: $tg\angle A$ - ?

$CDEB$ - вписан. $(\angle C + \angle DEB = 180^\circ)$

$\Rightarrow \angle ADE = \angle B$

~~$EDB = 90 - \alpha \Rightarrow ADE = 180 - 60 - 90 + \alpha$~~

~~$90 - 30 - \alpha$~~

1) пусть $\angle EBD = \alpha$, тогда $\angle EDB = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle CDB = \angle CEB = 90 - 30^\circ = 60^\circ$ (св-во вписан. четырёх.)

$\Rightarrow \angle ADE = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ - \alpha^\circ) = 30^\circ + \alpha$

по св-ву вписан. $CDEB$: $\angle ADE = \angle EBC$ (т.к. $\angle ADE = 180^\circ - \angle CDE$, а противолож. в сумме 180°)

$\Rightarrow \angle EBC = 30^\circ + \alpha$, а т.к. $\angle EBD$ обознач. $= \alpha$, то

$\angle DBC = 30^\circ + \alpha - \alpha = 30^\circ \Rightarrow$

2) В прямоуг. $\triangle CDB$, $DB = 4x$ (против угла 30°)

$\Rightarrow CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$

3) $AC = 3x$, $CB = 2\sqrt{3}x$, $tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}\cdot 3x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

8) $AC = \sqrt{7}$

тогда $3x = \sqrt{7}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{3}$

$60 + 90 - \alpha + 30 - \ldots$ $180 - \alpha$

~~$ADE \ldots (30^\circ + \alpha - 90^\circ - \alpha) +$~~

~~$+\alpha = 120^\circ$~~

~~180°~~

$\angle EDB = 120 - \alpha$

$180 = 60 + 120 - \ldots$

$\angle ADB = 120^\circ$ (через α)

т.ч. $ADB \sim EDC$

$$\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$$

$$AB = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = 21x = 7\sqrt{7}$$

$$\sin\angle B = \sin(30^\circ + \alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{1}{7} = \sin\angle B$$

Т-ма sin для $\triangle DAB$: $\frac{\sqrt{7}}{\sin\alpha} = \frac{7\sqrt{7}}{\sin(180-60)}$

$$\cancel{\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 7\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

$$\sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{1}{7}\,; \quad \text{в } \triangle CED: \ \frac{EC}{\sin\angle B} = \frac{CB}{\sin 60^\circ}$$

$$EC = \frac{\frac{1}{7}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\,4}{7\cdot 3} = \frac{4\sqrt{7}}{21}.$$

дальше,

$$\sin\angle ECB = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{найти } \cos\alpha$$

$$\angle A = 60^\circ - \alpha. \qquad \cos\angle A = \cos\angle(60^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$$

$$\cos(60-\alpha) = \cos 60\cos\alpha - \sin 60\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{7}$$

$\sin\alpha$ из $\triangle DAB$: $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin 120^\circ}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 7\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{14}$

~~А~~ имеем в $\triangle CED$: $CE = \frac{4\sqrt{7}}{21}$; $CB = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\sin\angle ECB =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

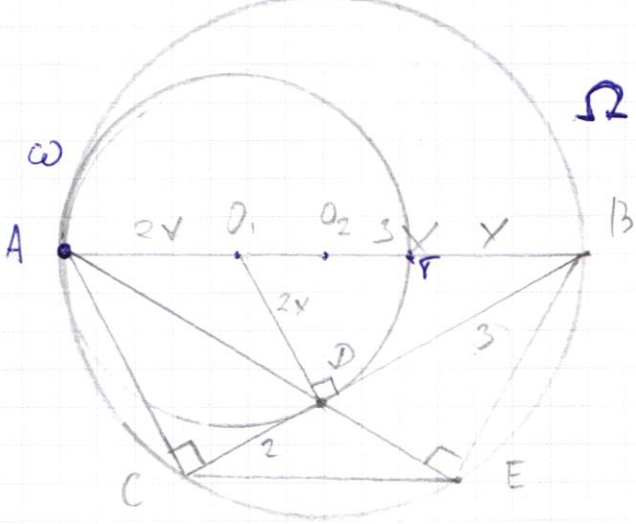
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



$\overset{\omega}{r}, \overset{\Omega}{R}$ - ?

$S\,BACE$

O_1, O_2, A - лежат на 1-ой прямой т.к. оба диаметра перпендик. касательной, и к одной и той же точке общей.

$CD \cdot DB = AD \cdot DE = 6$

$\angle ACB = \angle AEB = 90°$ — AB-диаметр.

$\triangle O_1DB \sim \triangle ACB$ (по 3 углам): $\frac{O_1D}{AC} = \frac{DB}{CB} = \frac{O_1B}{AB}$ – ($\angle O_1DB$ - прям как радиус к касат.

$\frac{r}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{O_1B}{AB} \Rightarrow O_1B : AB = 3:5$

$O_1B = 3x$, $AO_1 = 2x$

$AT = 2r$ - диаметр $\omega \Rightarrow TB = O_1B - O_1T = x$

по свойству касат. и секущей: $BT \cdot BA = BD^2$

~~$x^2 \cdot 5x = 9$~~

$x \cdot 5x = 9$

$x^2 = \frac{9}{5}$

$\boxed{x = \frac{3\sqrt5}{5}}$

$\Rightarrow R_\omega = 2 \cdot \frac{3\sqrt5}{5} = \frac{6\sqrt5}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$AB = 5x = 5 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$

$R_{\Omega} = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

$AC = \sqrt{45 - 25} = 2\sqrt{5}$

$\frac{5}{3\sqrt{5}}$

$\frac{\cancel{4} \cdot \cancel{7} \cdot \sqrt{3}}{21 \cdot \cancel{14}} = \frac{2\sqrt{3}}{21}$

$AD \overset{\triangle ACD}{=} \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$

$AD \cdot DE = CD \cdot DB$

$2\sqrt{6} \cdot DE = 6$ $\quad \frac{6}{2\sqrt{6}}$

$\cancel{DE = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

$\frac{11}{2} + \frac{2}{3} = \frac{33+4}{6} = \frac{37}{6}$

~~в~~ $\triangle$

$\angle ADB = \angle CDE$

$\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2\, AD \cdot DB} = \frac{24 + 9 - 45}{2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 9} = -\frac{12}{36\sqrt{6}} = -\frac{12\sqrt{6}}{36 \cdot 6} = -\frac{\sqrt{6}}{18}$

в $\triangle CDE$: $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2 - 2 \cdot CD \cdot DE \cos \angle CDE} =$

$= \sqrt{4 + \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{18}\right)} = \sqrt{5{,}5 + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{37}{6}}$

~~$P_{ABEC} = AB + BE + EC$~~

$p_{BEC} = \frac{CB + BE + EC}{2} = \frac{5 + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{37}{6}}}{2} = \frac{5\sqrt{6} + \cancel{\sqrt{15}} + \sqrt{37}}{2\sqrt{6}}$ $\quad 3\sqrt{5}$

$\sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$; $S_{ABEC} = \frac{1}{2} AE \cdot CB \sin ADC$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{6} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$