МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $b=aq$ и $c=aq^2$, где q – знаменатель геом. пр.;

$ax^2+2bx+c=0$;

$D=4b^2-4ac$; т.к. $b=aq$ и $c=aq^2$, то $D=4a^2q^2-4a^2q^2=0$; $\Rightarrow$ $x_0=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$ – корень ур-ния;

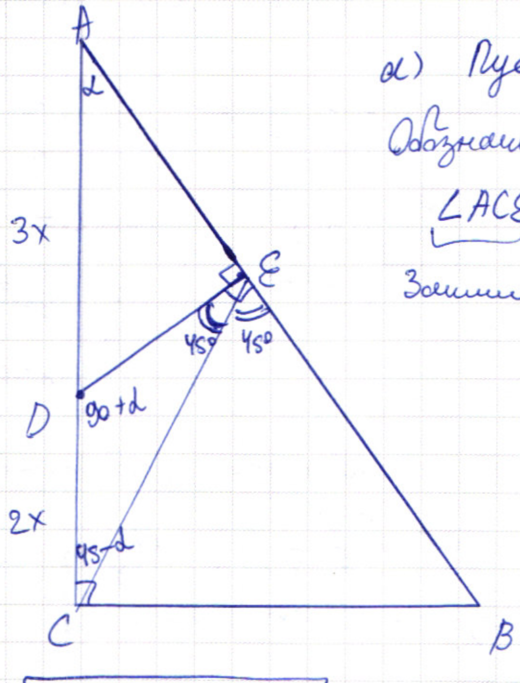
Тогда имеем геом. пр.: $a, b, c, -\frac{b}{a}$; где

$-\frac{b}{a}=aq^3=(aq)q^2=bq^2$; $:b$; $\Rightarrow$ $\underbrace{-\frac{1}{a}=q^2}$; Подставим полученное выражение в $c=aq^2$; $c=a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)=-1$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3-ий член равен -1.

Ответ: -1.

4.



а) Пусть $AD=3x$, а $AC=5x \Rightarrow \underbrace{DC=2x}$;

Обозначим $\angle CAE=\alpha$; $\Rightarrow$ Из $\triangle ACE$:

$\underbrace{\angle ACE}=180^\circ-\alpha-90^\circ-45^\circ=\underbrace{45^\circ-\alpha}$;

Запишем т. синусов для $\triangle DCE$:

$\frac{DE}{\sin(45-\alpha)}=\frac{DC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{DE}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2x$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{DE=2x(\cos\alpha-\sin\alpha)}$;

По т. Пифагора для $\triangle ADE$:

$\underline{AE}=\sqrt{9x^2-4x^2(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=$

$=x\sqrt{9-4(1-2\cos\alpha\sin\alpha)}=\underbrace{x\sqrt{5+4\sin2\alpha}}$; Из $\triangle ADE$: $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}=$

$=\frac{x\sqrt{5+4\sin2\alpha}}{3x}=\frac{\sqrt{5+4\sin2\alpha}}{3}$; После возв. в квадрат: $\cos^2\alpha=\frac{5+4\sin2\alpha}{9}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 9\cos^2\alpha-8\sin\alpha\cos\alpha-5=0$; $/:\cos^2\alpha\neq0 \Rightarrow 9-8\,tg\alpha-\frac{5}{\cos^2\alpha}=0$; $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$9-8\,tg\alpha-5-5tg^2\alpha=0;\ |\cdot(-1);\qquad 5tg^2\alpha+8tg\alpha-4=0;$

$D=64+80=144=12^2>0;$

$(tg\alpha)_{1,2}=\frac{-8\pm12}{10}=-2;\ \frac{2}{5};$

Но $tg\alpha\neq-2$, т.к. тогда α – тупой угол, что невозможно в прямоугол. треугольнике; $\Rightarrow$ $\underbrace{tg\alpha=\frac{2}{5}=tg\angle BAC;}$

б) ~~AC = √29 ⇒ D~~ $AC=5x=\sqrt{29}\Rightarrow \underbrace{x=\frac{\sqrt{29}}{5}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{DC=2x=\frac{2}{5}\sqrt{29}};$ Найдём $\sin\alpha$: $1+tg^2\alpha=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}$, где

$\underbrace{tg\alpha=\frac{2}{5}}$, тогда $1+\frac{4}{25}=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}\Rightarrow 1-\sin^2\alpha=\frac{25}{29};$

$\sin^2\alpha=\frac{4}{29};$

$\underbrace{\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}},\text{ т.к. }\alpha<90°;}$

Теперь из $\triangle AED$: $\frac{DE}{AD}=\sin\alpha;\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{DE=\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{29}}{5}=\frac{6}{5};}$ Найдём площадь $\triangle CED$ через синус угла и две смеж. стороны: $S_{\triangle CED}=\frac{DC\cdot DE\cdot\sin(90+\alpha)}{2}=$

$=\frac{\frac{2}{5}\sqrt{29}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cos\alpha}{2}=\frac{6\sqrt{29}}{25}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{6\sqrt{29}\cdot5}{5\cdot25\cdot\sqrt{29}}=\underbrace{\frac{6}{5}};$ Ответ:

а) $tg\angle BAC=\frac{2}{5};$

б) $S_{\triangle CED}=\frac{6}{5};$

6. $2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|;$

Изобразим на ~~графике~~ координат. плоскости $f(x)=2x^2-x-1$ и $g(x)=x+|2x-1|$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$; Из данного неравенства и чертежа следует, что $h(x)=ax+b$ должна лежать между $f(x)$ и $g(x)$. Очевидно, что самая „нижняя" прямая $h(x)$ будет двумя концами (на $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$) касаться параболы.

(Чертёж на след. листе.)

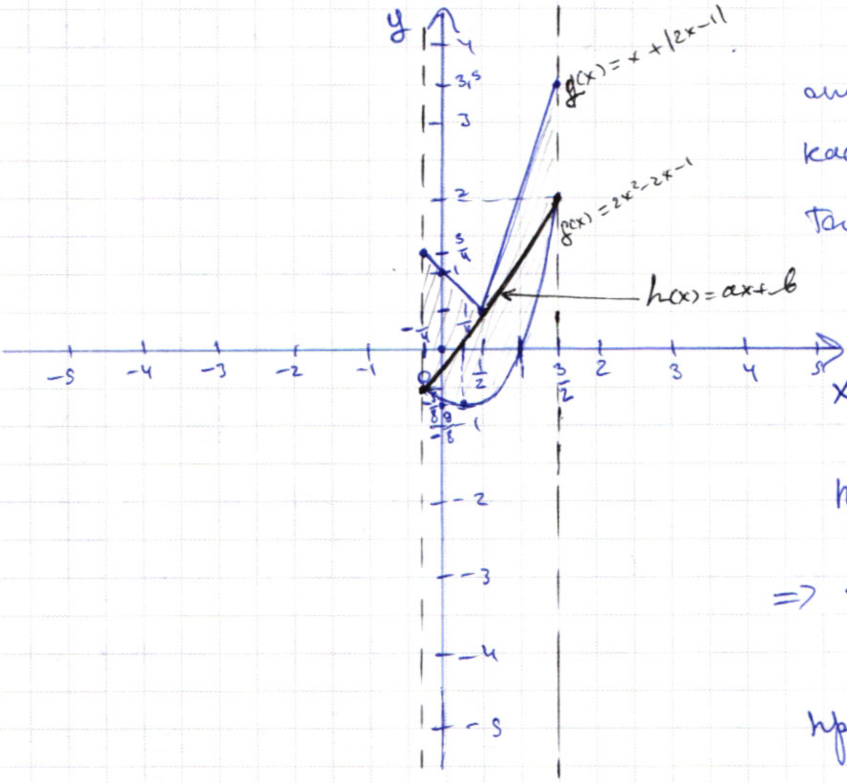
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



На графике чёрный отрезок — h(x), который касается 2-х точек параболы, тогда найдём a и b для этой прямой:

при $x = -\frac{1}{4}$ $y = -\frac{5}{8}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underbrace{-\frac{5}{8} = -\frac{a}{4} + b}$; (1)

при $x = \frac{3}{2}$ $y = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underbrace{2 = \frac{3a}{2} + b}$; (2)

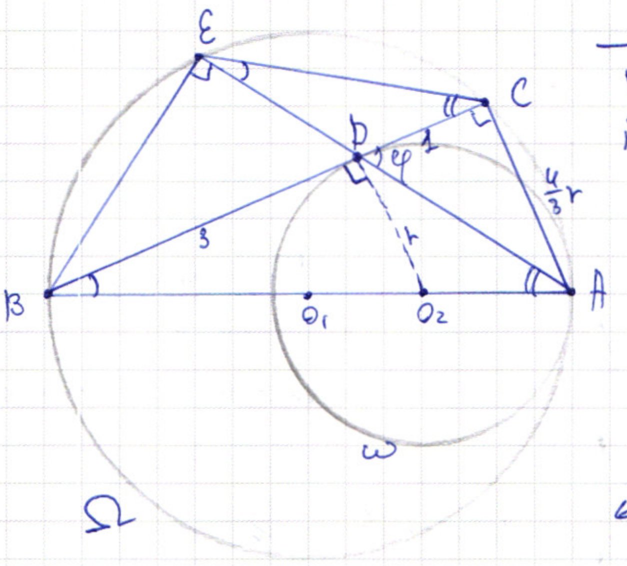
Из (2) вычтем (1):

$\frac{21}{8} = \frac{7a}{4}$; $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{3}{2} = a}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}}$; откуда следует, что $h(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$; Заметим, что точка „перелома" прямой g(x) также лежит на h(x), т.к. $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, а $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; выходит, что при малейшем изменении наклона или подъёма h(x) она либо пересечёт параболу, что нарушит условие $ax + b \geq 2x^2 - x - 1$, либо пересечёт g(x), что также нарушит усл. $ax + b \leq x + |2x - 1|$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ед. пара чисел, при которой верно неравенство — это $\begin{cases} a = \frac{3}{2}; \\ b = -\frac{1}{4}; \end{cases}$

ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

5.



$CD=1$
$BD=3$

$r, R - ?$
$S_{BACE} - ?$ (где R, r — радиусы окр. большей и меньшей соотв.)

Решение: $\triangle CDE \sim \triangle ABD$ (т.к. $\angle ECB$ и $\angle EAB$ опираются на одну дугу и ~~EAB~~ $\angle CEA$ и $\angle CBA$ на другую общую дугу);

Из подобия следует, что $\frac{CD}{DA} = \frac{ED}{BD} \Rightarrow \frac{1}{DA} = \frac{ED}{3} \Rightarrow \underbrace{DA \cdot ED = 3}$;

По усл. сказано, что BC касается окр. $\omega \Rightarrow$ проведём прямую O_2D, где O_2 — центр ω; $O_2D \perp BC$ (как радиус, провед. к касательной); Но тогда $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ (~~по~~ по углам в $90°$ и общему $\angle CBA$) $\Rightarrow \frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{O_2D}{AC} = \frac{3}{4}$;

$\underbrace{\text{Обозначим } O_2D \text{ за } r}$; тогда $3AC = 4r \Rightarrow \underbrace{AC = \frac{4}{3}r}$;

По т. Пифагора для $\triangle BAC$: $\underbrace{AB = \sqrt{16 + \frac{16}{9}r^2}}$;

Но $AO_2 = AB - BO_2$, где BO_2 по т. Пифагора для $\triangle BDO_2$ — это $\sqrt{9+r^2}$; Тогда, $AO_2 = \sqrt{16+\frac{16}{9}r^2} - \sqrt{9+r^2} = \frac{4}{3}\sqrt{9+r^2} - \sqrt{9+r^2} = \frac{\sqrt{9+r^2}}{3}$, но AO_2 также равно $r \Rightarrow 3r = \sqrt{9+r^2}$;

$9r^2 = 9 + r^2$; $8r^2 = 9$; $\underbrace{r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$; откуда $AB = \sqrt{16 + \frac{16}{9}\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; Т.к. $AB = 2R$, то $\underbrace{R = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$;

Поскольку $AC = \frac{4}{3}r$ и $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, то $\underbrace{AC = \sqrt{2}}$;

По т. Пифагора для $\triangle DAC$: $\underbrace{AD = \sqrt{3}}$; $\Rightarrow DA \cdot ED = 3 \Rightarrow \underbrace{ED = \sqrt{3}}$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $\angle CDA = \varphi$, тогда $\sin\varphi = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

Найдём площадь $BACE$ через диагонали и угол между ними: $\boxed{S_{BACE}} = \frac{EA \cdot BC}{2}\sin\varphi = \frac{(ED+DA)BC}{2}\sin\varphi =$
$= \frac{2\sqrt{3}\cdot 4}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{4\sqrt{2}}$;

Ответ: $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$;

3.
$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}; \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

$\boxed{\text{ОДЗ: } y-2x \geq 0; \quad xy-2x-y+2 \geq 0;}$

Сделаем замену:
$$\begin{cases} y-2=a; \\ x-1=b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{(y-2)(x-1)}; \\ 2x^2-4x+y^2-4y+3=0; \end{cases}$$

тогда,
$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab}; \\ a-4+2b-2+3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}; \\ a+2b=3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}; \ (1) \\ a=3-2b; \ (2) \end{cases}$$
После подстановки в (1)-ое (2)-ого, получим: $3-4b = \sqrt{3b-2b^2}; \quad |\ ^2;$
$$9+16b^2-24b = 3b-2b^2;$$
$$18b^2-27b+9=0;$$
$$\left[\begin{array}{l} b=1; \\ b=\frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

При $b=1$ $a=1$, а при $b=\frac{1}{2}$ $a=2$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ возвращаясь к замене, 1) $\begin{cases} y-2=1; \\ x-1=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3; \\ x=2; \end{cases} \longrightarrow$

Однако пара $(2;3)$ не подходит по ОДЗ, ведь $y-2x$ должно быть неотрицательным; Но при $\begin{cases} y=3; \\ x=2; \end{cases}$

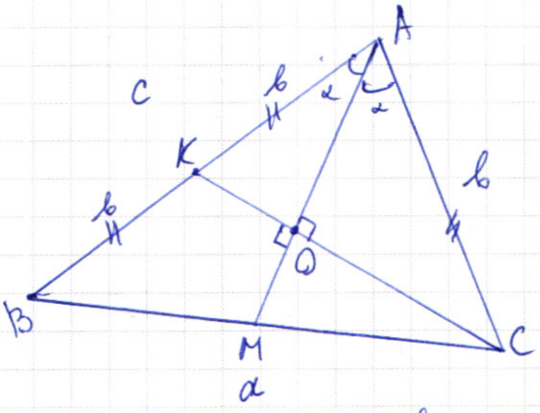
$y-2x=3-4=-1<0$, что неверно.

2) $\begin{cases} y-2=2; \\ x-1=\frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4; \\ x=\frac{3}{2}; \end{cases}$ Осталось сделать проверку:

$\begin{cases} y-2x=4-3=1>0; \\ xy-2x-y+2=6-3-4+2=1>0; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2};4\right)$ — решение системы;

Ответ: $\left(\frac{3}{2};4\right)$.

2



$P=a+b+c=1200;$

Заметим, что AO — и биссектриса, и высота $\Rightarrow \triangle AKC$ — равнобедренный, откуда $AB=c=2b$;

Тогда стороны таковы:

$\begin{cases} a=1200-3b; & (1) \\ b=b; & (2) \\ c=2b; & (3) \\ a+b+c=1200; & (4) \end{cases}$, где $a,b,c \in \mathbb{Z}$;

Из того, что $P=1200$ следует, что $b\in[1;1200]$;

Учитывая (3) имеем, что $b\in[1;600]$, а уже из (1) следует, что $1200-3b>0$ (т.к. $a>0$); $3b<1200$; $b<400$;

По итогу, $b\in[1;400) \Rightarrow$ принимает 399 целочисл. значений;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Однако заметим, что сторона, на которую падает биссектриса, фиксирована, а боковые стороны могут ~~меня~~ и поменять и длины между собой. Т.е., если $AB=2b$, $AC=b$, то в новом треугольнике $AB=b$, а $AC=2b$. Причем это уже отличный от предыдущего треугольник. $\Rightarrow$ Имеем $399\cdot 2 = 798$ различных треугольников, соотв. условию;

Ответ: 798.

7. Заметим, что св-вом $f(ab)=f(a)+f(b)$ обладает ф-ия логарифма по некоторому основанию n. Т.е. $\log_n ab = \log_n a + \log_n b$ для $\forall a, b$ таких, что $a>0$ и $b>0$;

Мы хотим, чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, т.е. $\log_n\left(\frac{x}{y}\right)<0$;

$\log_n\left(\frac{x}{y}\right) < \log_n 1$;

$\cancel{(n-1)}\left(\frac{x}{y}-1\right)<0$; где $\frac{x}{y}>0$;

$\frac{x}{y}-1<0$; $\frac{x-y}{y}<0$; $\Rightarrow$ $\underbrace{x<y}$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходят x и y такие, что $x<y$ и $x, y \notin \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множ. простых чисел, т.к. тогда $\log_n p$, где p – простое число, будет считаться, как $f(p)=[p/2]$, что заведомо при $p>0$ является ~~≥~~ положит $\Rightarrow$ не даёт $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$;

Тогда $N = 1+2+3+\ldots+13 = \frac{(1+13)\,13}{2} = 7\cdot 13 = 91$;

Ответ: 91.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

a

$b = aq$

$c = aq^2$

$-\frac{b}{a} = aq^3;$

$ax^2 + 2bx + c = 0;$

$\cancel{D = 4b^2}$

$\begin{cases} x_1 x_2 = aq^2; \\ x_1 + x_2 = -2aq; \end{cases}$

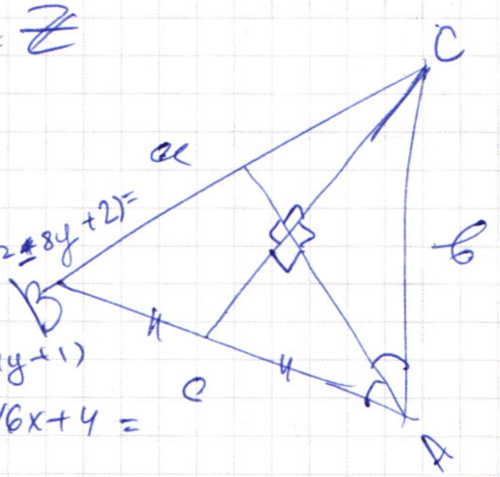
$D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0;$

$x_0 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$

$-\frac{b}{a} = bq^2 \Rightarrow -\frac{1}{a} = q^2;$

$c = -1$

2. $P = 1200$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$



$D = 16 - 8y^2 + 32y - 24 =$

$= -8y^2 + 32y - 8 =$

$= -4(2y^2 - 8y + 2) =$

$= -8(y^2 - 4y + 1)$

$y^2 - 4y + 2x^2 - 4x + 3 = 0;$

$D = 16 - 8x^2 + 16x - 12 = -8x^2 + 16x + 4 =$

$\cancel{= 4(-2x^2 + 4x + 1)}$

$\begin{cases} \cancel{x + y = 4} \\ xy = N \end{cases}$

3. $y^2 + 4x^2 - 4yx = xy - 2x - y + 2;$

$y^2 + y + 4x^2 - 5xy + 2x - 2 = 0;$

$2x^2 + y^2 - 4(x+y) + 3 = 0;$

$(y - 2x) = \sqrt{xy - (y + 2x) + 2}$

$\cancel{(x+y)^2}$ $y^2 + 4x^2 - 2x^2 - 8xy + 8xy - 4x - 4y + 3 = 0;$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

$y(x-1)+2(x-1)=(y-2)(x-1)$

$\underset{a}{\shortparallel}$ $\underset{b}{\shortparallel}$

$a-2b=y-\cancel{2}-2x+\cancel{2}=a-2b;$

$a-2b=\sqrt{ab};$

$y^2-4y+4=a^2;$

$2x^2-4x+2=2b^2;$

$2b^2-\cancel{2}+a^2-\cancel{4}+3=0;$ -3

$\cancel{2b^2+3=a^2+6};$

$2\left(\frac{a^2+6}{5a}\right)^2+3=a^2+6$

$\frac{2a^4+72+24a^2}{25a^2}+3=a^2+6;$

$\frac{2a^4+72+99a^2-25a^4-150a^2}{25a^2}=0;$ $a\neq 0;$

$$\begin{cases} 2b^2+a^2-3=0; \\ a^2+4b^2-4ab=ab; \end{cases}$$

$a^2+4b^2=5ab;$

$-2b^2-3=-5ab;$

$2b^2+3=5ab;$

$a^2-6=-5ab;$

$a^2+6=5ab;$

$\frac{a^2+6}{5a}=b;$

$-23a^4-51a^2+72=0;$

$23a^4+51a^2-72=0;$

$D=2601+6\cdot 624=$

$=9225=1845\cdot 5=$

$=369\cdot 25=$

$=9\cdot 41\cdot 25=(15\sqrt{41})^2>0;$

$(a^2)_{1,2}=\frac{-51\pm 15\sqrt{41}}{46};$

$51\cdot 51$: $51+255=2601$

$23\cdot 72$: $46+161=1656$; $1656\cdot 4=6624$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

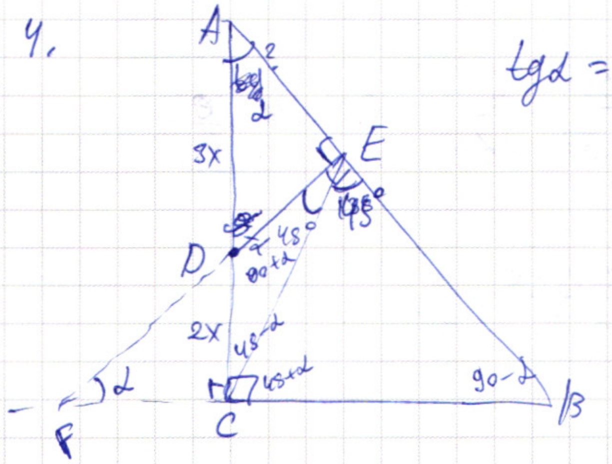
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC}$

$\sin\alpha = \frac{DE}{3x} = \frac{CB}{AB}$

$\cos\alpha = \frac{AE}{3x} = \frac{5x}{AB}$;

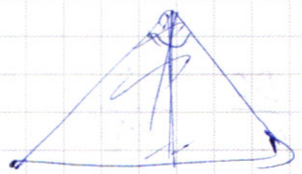
$5tg^2\alpha + 8tg\alpha - 4 = 0$,

$D = 64 + 80 = 144 = 12^2 > 0$;

$tg\alpha = \frac{-8 \pm 12}{10} = -2; \frac{2}{5}$;

$AE \cdot AB = 15x^2$;

$tg\alpha = \frac{2}{5}$,

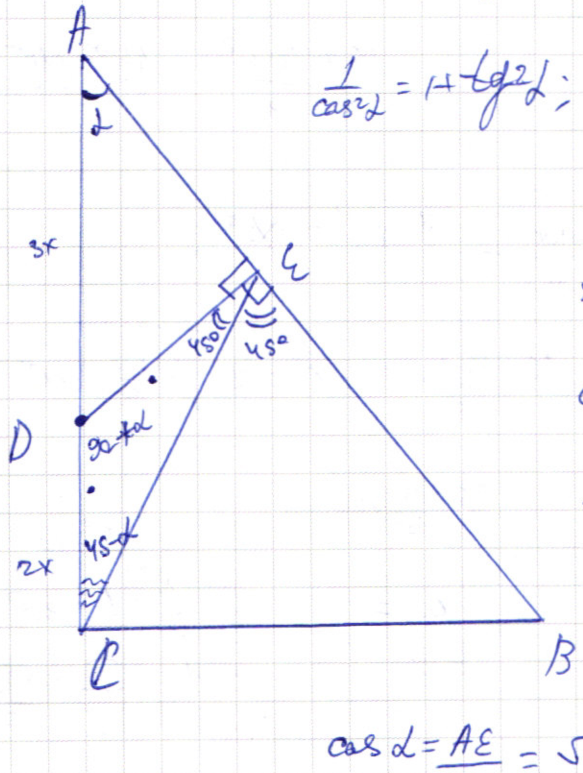


$\frac{BE}{AE} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{FC}{FB} = 1$;

$\frac{BC}{FC} \cdot \frac{FD}{DE} \cdot \frac{AE}{AB} = 1$

$\frac{5xCB}{2} = \frac{5xAB}{2}\sin\alpha$

$CB = AB\sin\alpha$;



$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$; $\frac{FD \cdot AE}{FC \cdot 3x} = 1$;

$\sin(45 - \alpha) = (\cos\alpha - \sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{DE}{\sin(45-\alpha)} = \frac{2x}{\sin 45°}$;

$S_{DEC} = \frac{DE \cdot AC \sin(90+\alpha)}{2}$;

$\frac{DE}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{4x}{\sqrt{2}} \cdot 2x$;

$\boxed{DE = 2x(\cos\alpha - \sin\alpha)}$

$AE = \sqrt{9x^2 - 4x^2(1 - \sin 2\alpha)}$;

$AE = x\sqrt{5 + 4\sin 2\alpha}$;

$\cos\alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{5 + 4\sin 2\alpha}}{3}$;

$9\cos^2\alpha = 5 + 4\sin 2\alpha$;

$9\cos^2\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha - 5 = 0$;

$9 - 8tg\alpha - \frac{5}{\cos^2\alpha} = 0$;

$4 - 8tg\alpha - 5tg^2\alpha = 0$;

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)

$(x-1)(2x+1) \le ax+b \le x+|2x-1|;$

$\cancel{a(x+\frac{b}{a})}$

$DC = \frac{2}{5}\sqrt{28};$

$1+\frac{4}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

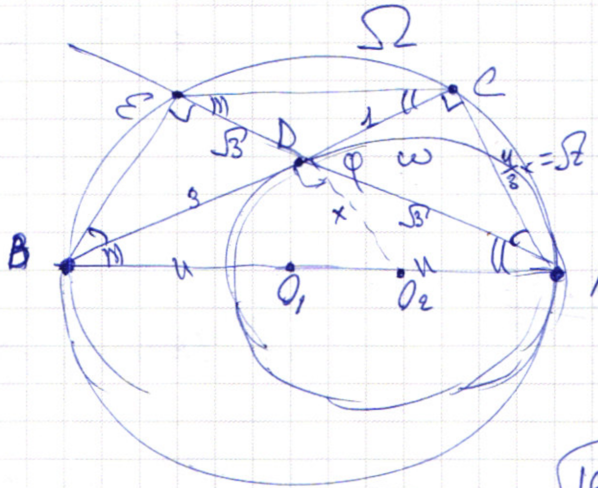
$\frac{29}{28}$

$\cos^2\alpha = \frac{25}{29};$

$\frac{4}{29} = \sin^2\alpha;$

$\frac{DE}{\frac{3}{5}\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}};$ $DE = \cancel{12}\ \frac{6}{5};$

$S_{\triangle CED} = \frac{\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\cos\alpha; = \frac{6\cdot 2\cdot 5}{25\cdot 2} = \frac{6}{5};$



$CD = 1$
$BD = 3$

$\frac{DC}{DA} = \frac{ED}{BD};$

$DA\cdot ED = 3;$

$16+\frac{16x^2}{9} = \cancel{AB^2}\ \cancel{2}\Omega^2;$

$\sqrt{16+\frac{16x^2}{9}} - \sqrt{9+x^2} = \cancel{x}^2;$

$\cancel{16}\ \frac{4}{3}\sqrt{9+x^2} - \sqrt{9+x^2} = x;$

$16+\frac{16x^2}{9}+9+x^2 - 2\sqrt{\left(16+\frac{16x^2}{9}\right)(9+x^2)} = \cancel{x^2};$

$3x = \sqrt{9+x^2};$

$\cancel{25+\frac{16}{9}x^2 = 2}$

$9x^2 = 9+x^2;$

$D^2 = 18;$

$8x^2 = 9;$ $x^2 = \frac{9}{8};$

$\omega = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4};$ $2\Omega = D = 3\sqrt{2};$

$\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2};$

$AC = \sqrt{2};$ $DA = \sqrt{3};$ $ED = \sqrt{3};$

$S_{BACE} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 4}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2};$

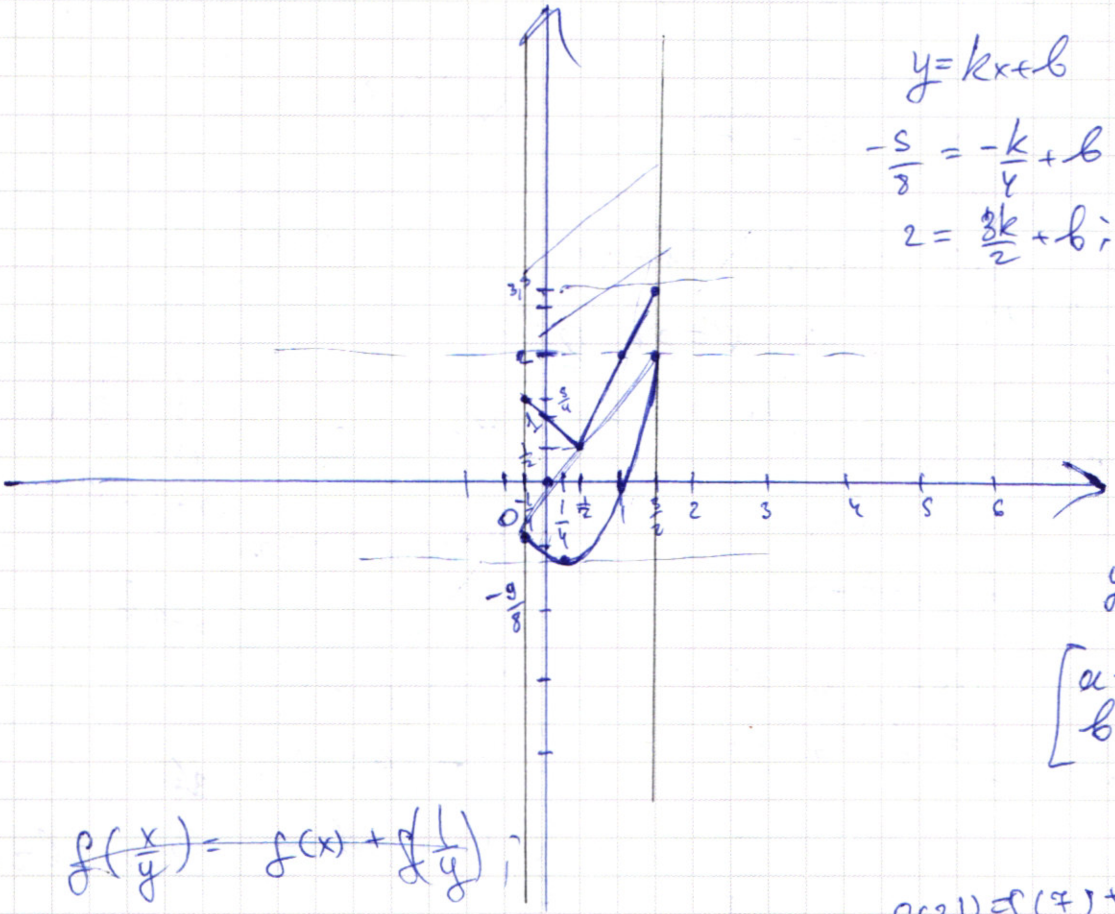
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$y = kx + b$

$-\frac{5}{8} = -\frac{k}{4} + b$

$2 = \frac{3k}{2} + b;$

$\frac{21}{8} = \frac{7k}{4};$

$\frac{3}{2} = k;$

$b = -\frac{1}{4};$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4};$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{3}{2}; \\ b = -\frac{1}{4}; \end{array}\right.$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)};$

$f(21) = f(7) + f(3) =$

$= 3 + 1 = 4;$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$x < y$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{c}{bd};$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №5

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2=a; \\ x-1=b; \end{cases}$$

$\frac{7}{3} = 7 \cdot \frac{1}{3}$

$x=y$

$$\begin{cases} \sqrt{ab} = a-2b; \\ a-4+2b-2+3=0; \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{21}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{cases} a+2b=3; \\ a-2b=\sqrt{ab}; \end{cases}$$

$f(0)=0$; $f(1)=0$;

$\frac{x-y}{y} < 0$; $\frac{x}{y}-1 < 0$;

$\log_n a + \log_n b = \log_n ab$;

$3-4b = \sqrt{3b-2b^2}$;

$\cancel{9+16b^2=3b-2b^2}$;

$\cancel{18b^2-3b+9=0}$;

$\cancel{D=9}$

$9+16b^2-24b = 3b-2b^2$;

$f(2a) \cdot f\left(\frac{b}{2}\right)$

$\log_n \frac{x}{y} < 0$;

$f\left(\frac{b}{2}\right)(1+f(a)) = f(a)+f(b)$;

$18b^2-27b+9=0$;

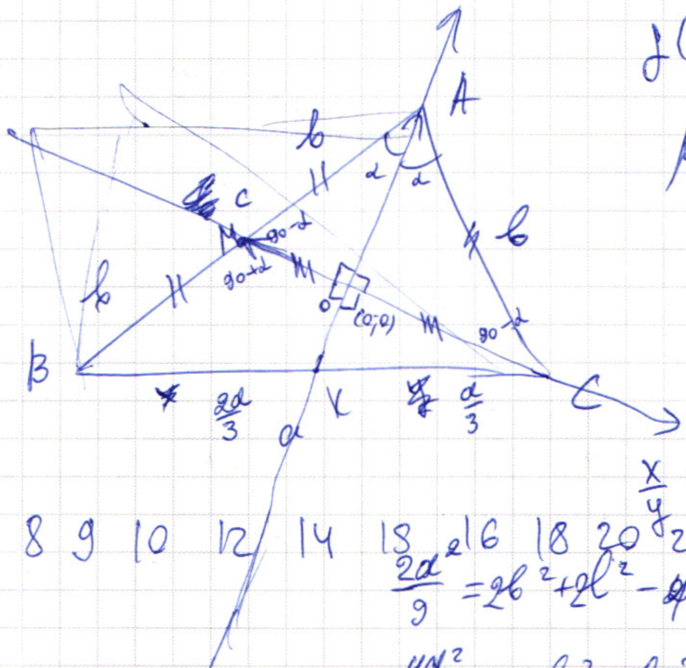
$2b$, b, $1200-3b$

$\frac{\log_n x}{\log_n y} < 0$;

$$\left[\begin{array}{l} b=1;\ a=1; \\ b=\frac{1}{2};\ a=2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{x=2;\ y=3;} \\ x=\frac{3}{2};\ y=4; \end{array}\right.$$

$\cancel{3b}$

2.



$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(b) = 7$

$1200-3b > 0$;

$\boxed{b < 400}$;

$P = a+b+c = 1200$;

$\cancel{\vec{MC}+\vec{KA}=0}$;

$\boxed{c=2b}$

$\frac{x}{y} = 2$;

1 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18 20 21

$x=2y$;

$\frac{2a^2}{9} = 2b^2+2l^2-4bl\cos\alpha$;

$\frac{4a^2}{9} = 4b^2+b^2-4bl\cos\alpha$;

$\frac{2a^2}{9} = 2b^2-l^2$; $l^2 = 2b^2 - \frac{2a^2}{9}$;

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)