МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a - первый член прогрессии
q - знаменатель прогрессии

$b = a\cdot q$
$c = a\cdot q^2$ (надо найти)
$d = a\cdot q^3$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

Заменяю b и c на выражения с a и q

$ax^2 - 2(a\cdot q)\cdot x + a\cdot q^2 = 0$

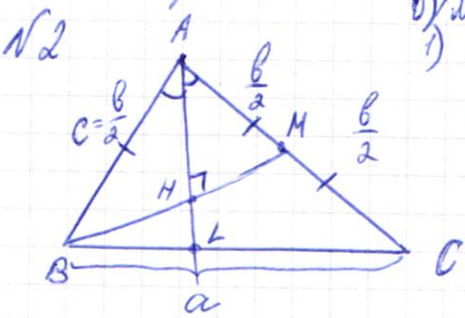
По условию $d = a\cdot q^3$ -корень уравнения выше, поэтому d можно подставить в него

$a\cdot(a\cdot q^3)^2 - 2(a\cdot q)\cdot(a\cdot q^3) + a\cdot q^2 = 0$
$a^3\cdot q^6 - 2a^2q^4 + a\cdot q^2 = 0$
$a q^2 = c$

$c^3 - 2c^2 + c = 0$
$c(c-1)^2 = 0$
$c \in \{0; 1\}$

Ответ: третий член прогрессии 0 или 1

№2



0) медиана и бис-са выходят из разных вершин, т.к. иначе наруш.
1) $\triangle ABM$ - р/б (т.к. AH - бис-са и высота) $\Big\}$ теорема о сумме углов в тр-ке
$\Downarrow$
$\left(AB = AM = \frac{b}{2}\right) \Rightarrow \left(c = \frac{b}{2}\right)$

2) ~~$P = a + b$~~ $P = a + b + c = 900$
$a = 900 - b - c = 900 - \frac{3b}{2}$

3) по неравенству треугольника
$\begin{cases} b + c > a \\ b - c < a \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3b}{2} > 900 - \frac{3b}{2} \\ \frac{b}{2} < 900 - \frac{3b}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 3b > 900 \\ 2b < 900 \end{cases}$

$b \in (300 \cdot 450)$

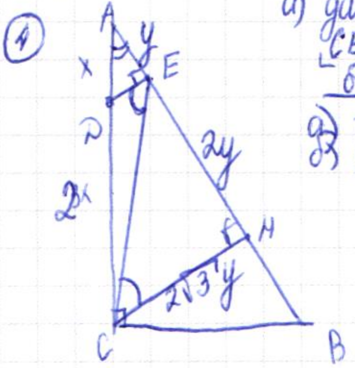
4) одному b соответствует одна пара a и c (a и c не могут быть равны), следовательно треугольников столько же, сколько чётных b $(c = \frac{b}{2} \in \mathbb{Z})$ на интервале $(300 \cdot 450)$ также в одном треугольнике не может быть несколько таких случаев т.к иначе нарушается или неравенство треугольника, или то, что биссектрисы и медианы пересекаются

5) на интервале $(300; 450)$ чётных чисел 124 $\Rightarrow$ столько же и треугольников

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: 124

④



а) дано: $\angle CED = 30°$

б) $AC = \sqrt{7}$

а) $tg\angle BAC$ – ?

б) S_{CED} – ?

а) 1) Дополнительное построение: $CH \perp AB$

2) $CH \parallel DE$ $\left(\begin{matrix} CH \perp AB \\ DE \perp AB \end{matrix}\right) \Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} = \frac{1}{2}$

3) $(CH \parallel DE) \Rightarrow (\angle DEC = \angle ECH = 30°$, как вн. н/л при $CH \parallel DE$ и секущей $EC)$

$CH = EH \cdot tg 30° = 2\sqrt{3}y$

4) $tg\angle BAC = \frac{CH}{HA} = \frac{2\sqrt{3}y}{3y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

б) 1) т. Пифагора в $\triangle ACH$:

$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{9y^2 + 4 \cdot 3y^2} = \sqrt{21}y$

$y = \frac{AC}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{AHC} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(\cancel{3}^{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) \cdot \left(\cancel{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$

2) $S_{CEA} = \frac{1}{3} S_{AHC}$, т.к. у обоих треугольников высота равна CH, а основания относятся как $\frac{AE}{AH} = \frac{1}{3}$

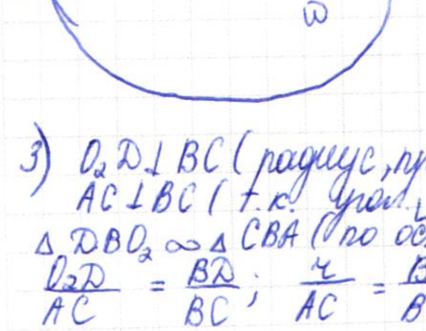
аналогично

~~4)~~ $S_{DEC} = \frac{2}{3} S_{CEA}$

3) $S_{DEC} = \frac{2}{3} S_{CEA} = \frac{2}{9} S_{AHC} = \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

⑤



$CD = 2$

$BD = 3$

R – ?

r – ?

S_{BACE} – ?

1) ~~по св-ву касающих~~ точка касания окружностей лежит на прямой центров, поэтому центр ω лежит на AB

$O_2 \in AB$

2) ~~по теореме~~ степень точки B относительно ω

$BD^2 = BF \cdot BA$

$BA = 2R$

$BF = 2R - 2r = 2(R - r)$

$4R(R - r) = BD^2$; $4R^2 - 4Rr = 9$

3) $O_2D \perp BC$ (радиус, проведённый к точке касания)

$AC \perp BC$ (т.к. угол $\angle BCA$ опирается на диаметр AB)

$\triangle DBO_2 \sim \triangle CBA$ (по острому углу)

$\frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC}$; $\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$; $AC = \frac{5}{3}r$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) т. Пифагора ΔABC

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$4R^2 = 25 + \frac{25}{9}r^2$

5) $\begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 9 \\ 4R^2 = 25 + \frac{25}{9}r^2 \end{cases} \longrightarrow$ находим R и r

6) $S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot BC \cdot \sin\varphi$

7) степень ~~до~~ точки D относительно Ω

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$AD \cdot DE = 6$

8) мы знаем r

по пункту 3 $AC = \frac{5}{3}r$

т. Пифагора в ΔADC: $AD = \sqrt{4 + \frac{25}{9}r^2}$

$\sin\varphi = \frac{AC}{AD}$

$ED = \frac{6}{AD}$

$EA = AD + ED$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} EA \cdot BC \cdot \sin\varphi = \frac{5}{2}(AD + ED) \cdot \sin\varphi = \frac{5}{2}\left(\sqrt{4 + \frac{25}{9}r^2} + \frac{6}{\sqrt{4+\frac{25}{9}r^2}}\right) \cdot \frac{5r}{3 \cdot \sqrt{4+\frac{25}{9}r^2}} =$

$= \frac{5}{2} \cdot \left(\cancel{3} \frac{\sqrt{36+25r^2}}{3} + \frac{18}{\sqrt{36+25r^2}}\right) \cdot \frac{5r}{\sqrt{36+25r^2}}$

N6 $8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$f(x) = 8x - 6|2x-1| = \begin{cases} -4x+6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ — график — 2-звенная ломаная

$g(x) = -8x^2 + 6x + 7$, $x_B = \frac{-6}{2 \cdot (-8)} = \frac{3}{8}$ (гр-к функции — парабола, ветвями вниз, поэтому $g(\frac{3}{8})$ — max ф-ции)

	$f(x)$	$g(x)$
$x = -\frac{1}{2}$:	-16	2
$x = \frac{3}{8}$:	$1\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{8}$
$x = \frac{1}{2}$:	4	8
$x = 1$:	2	5

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$(1)\begin{cases} -16 \le -\frac{a}{2}+b \le 2 \\ 1\frac{1}{2} \le \frac{3a}{8}+b \le 8\frac{1}{8} \\ 4 \le \frac{a}{2}+b \le 8 \\ 2 \le a+b \le 5 \end{cases}$$
(1), (2), (3), (4)

$$\begin{cases} (1)\ -32 \le -a+2b \le 4 \\ (2)\ 12 \le 3a+8b \le 65 \\ (3)\ 8 \le a+2b \le 16 \\ (4)\ 2 \le a+b \le 5 \end{cases}$$

$(1)+(2)$ $\quad -24 \le 4b \le 20$

$(1)+(4)$ $\quad -30 \le 3b \le 9$

$(3)-(4)$ $\quad 3 \le b \le 14$

$$\begin{cases} -6 \le b \le 5 \\ -10 \le b \le 3 \\ 3 \le b \le 14 \end{cases} \Rightarrow 3 \le b \le 3$$

$\Downarrow$

единственный вариант b: $b=3$

$$\begin{cases} -38 \le -a \le -2 \\ -12 \le 3a \le 31 \\ 2 \le a \le 10 \\ -1 \le a \le 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \le a \le 38 \\ -4 \le a \le 10\frac{1}{3} \\ 2 \le a \le 10 \\ -1 \le a \le 2 \end{cases} \quad 2 \le a \le 2$$

в выбранных мною точках ~~не~~, т.е. $x \in \{-\frac{1}{2}; \frac{3}{8}; \frac{1}{2}; 1\}$

неравенству удовлетворяет только пара $(2;3)$

$(1)\ x=-\frac{1}{2}$: $-16 \le 2 \le 2$; точка прямой $y=2x+3$ лежит на параболе и над ~~прямой~~ ломаной

$(2)\ x=\frac{3}{8}$: $1\frac{1}{2} \le 3\frac{3}{4} \le 8\frac{1}{8}$ — " — ниже параб., выше ломаной

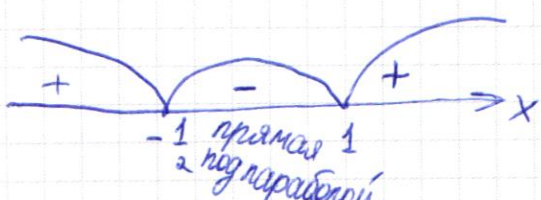
$(3)\ x=\frac{1}{2}$: $4 \le 4 \le 8$ — " — ниже параб., пересекает ломаную

$(4)\ x=1$: $2 \le 5 \le 5$ — " — ~~выше пар~~ на параб., выше ломаной

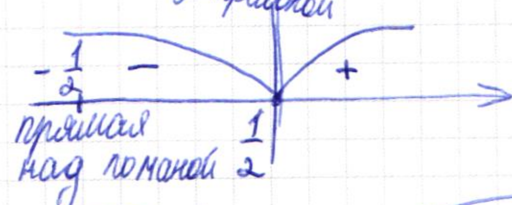
$2x+3 \le -8x^2+6x+7$

$8x^2-4x-4 \le 0$

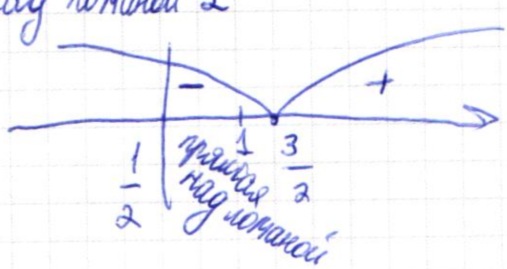
$2x^2-x-1 \le 0$



$$\begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ 20x-6 \le 2x+3 \end{cases} ; \quad x-\frac{1}{2} \le 0, \quad x \le \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ -4x+6 \le 2x+3 \end{cases} ; \quad 6x-3 \ge 0, \quad 2x-3 \ge 0$$



Ответ: $(2;3)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $f(a\cdot 1)=f(a)=f(a)+f(1)$

$f(1)=0$

~~f(x~~ $b=\frac{1}{a}$

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})=0$

$f(a)=-f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{x}{y})=\cancel{f}f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(2)=1$ $f(\frac{1}{2})=-1$
$f(3)=1$ $f(\frac{1}{3})=-1$
$f(4)=2$ $f(\frac{1}{4})=-2$ ✓
$f(5)=2$ $f(\frac{1}{5})=-2$ ✓
$f(6)=2$ $f(\frac{1}{6})=-2$ ✓
$f(7)=3$ $f(\frac{1}{7})=-3$ o
$f(8)=3$ $f(\frac{1}{8})=-3$ o
$f(9)=2$ $f(\frac{1}{9})=-2$ ✓
$f(10)=3$ $f(\frac{1}{10})=-3$ o
$f(11)=5$ $f(\frac{1}{11})=-5$ ◇
$f(12)=3$ $f(\frac{1}{12})=-3$ o
$f(13)=6$ $f(\frac{1}{13})=-6$ Σ
$f(14)=4$ $f(\frac{1}{14})=-4$ x
$f(15)=3$ $f(\frac{1}{15})=-3$ o
$f(16)=4$ $f(\frac{1}{16})=-4$ x
$f(17)=8$ $f(\frac{1}{17})=-8$
$f(18)=3$ $f(\frac{1}{18})=-3$ o
$f(19)=9$ $f(\frac{1}{19})=-9$
$f(20)=4$ $f(\frac{1}{20})=-4$ x
$f(21)=4$ $f(\frac{1}{21})=-4$ x
$f(22)=6$ $f(\frac{1}{22})=-6$ Σ

для простых чисел считала по формуле $f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

для составных по

$f(ab)=f(a)+f(b)$ ($f(a)$; $f(b)$ считались ранее)

$\lvert f(a)\rvert$	кол-во a
1	2
2	4
3	6
4	4
5	1
6	2
8	1
9	1

~~всего пар чисел $21\cdot 21-21=420$ (числа x и y менять местами можно но пары совпадают когда x и y равны (таких 21 пара))~~

~~21 пара не подходит (при равенстве совпадении x и y $f(\frac{x}{y})=0$~~

подходят те пары где $|f(y)|>|f(x)|$, т.к $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0$

$-f(y)=f(\frac{1}{y})<0$ $f(x)>0$

☒ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\lvert f(y)\rvert$	$\lvert f(x)\rvert$	число пар	
2	1	8	
3	2	24	32
3	1	12	44
4	3	24	68
4	2	16	84
4	1	8	92
5	4	4	96
5	3	6	102
5	2	4	106
5	1	2	108
6	5	2	110
6	4	8	118
6	3	12	130
6	2	8	138
6	1	4	142
8	6	2	144
8	5	1	145
8	4	4	149
8	3	6	155
8	2	4	159
8	1	2	161
9	8	1	162
9	6	2	164
9	5	1	165
9	4	4	169
9	3	6	175
9	2	4	179
9	1	2	181

~~8+24+12+~~

Ответ: 181 пара

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 $(a;b)-?$ $\quad 8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$

$y = 8x-6|2x-1| = \begin{cases} -4x+6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

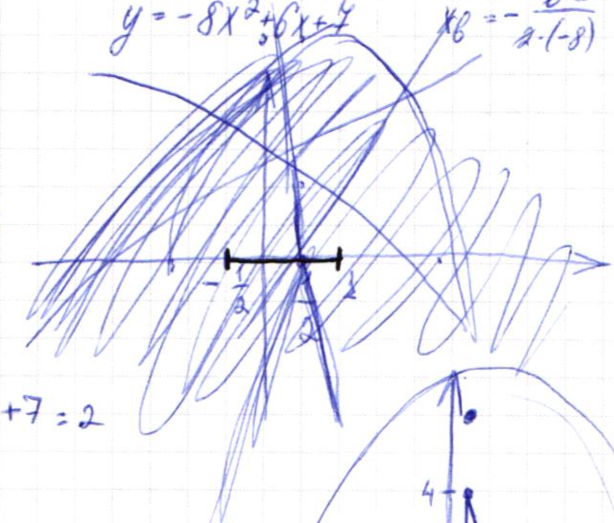
$y=-8x^2+6x+7 \quad x_B = -\frac{6}{2\cdot(-8)} = \frac{3}{8}$

$8x^2-6x-7=0$

$\frac{D}{4} = 9+7\cdot 8 = 65$

$f\left(\frac{3}{8}\right) = -8\cdot\frac{9}{8^2} + \frac{6\cdot 3}{8} + 7 = \frac{9}{8}+7 = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$

$\frac{\cancel{20}\,5\cdot 3}{\cancel{8}\,2} - 6$



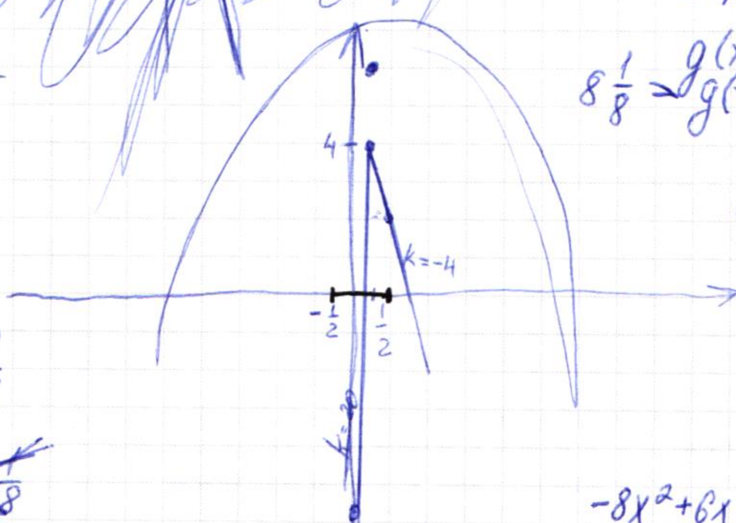
$x = \frac{3\pm\sqrt{65}}{8}$

$-4-6\cdot 2 = -16$

$-\cancel{8}\,2\cdot\frac{1}{\cancel{4}} - 3+7 = 2$

$g(x) = ax+b$

$8\frac{1}{8} > g\left(+\frac{1}{2}\right) > 4$



$-8+6+7$

$ax+b = 20x-6$

$x_1 = \frac{b+6}{20-a} > 1$

$\frac{3a}{8}+b < 8\frac{1}{8}$

$x_2 = \frac{6-b}{a+4} < -\frac{1}{2}$

$4 < +\frac{a}{2}+b$

$a+b < 5$

$-\frac{a}{2}+b$

$-8x^2+6x+7 = ax+b$

$8x^2+(a-6)x+b-7=0$

$\cancel{x=\frac{3}{8}}$

$x=-\frac{1}{2}: \quad -16 < -\frac{a}{2}+b < 2$

$x=\frac{3}{8}: \quad 1\frac{1}{2} < \frac{3a}{8}+b < 8\frac{1}{8}$

$x=\frac{1}{2}: \quad 4 < \frac{a}{2}+b < 8$

$x=1: \quad 2 < a+b < 5$

$\begin{cases} -32 < -a+2b < 4 \\ 12 < 3a+8b < 65 \\ 8 < a+2b < 16 \\ 2 < a+b < 5 \end{cases}$

$-24 < 4b < 20$

$-6 < b < 5$

$-30 < 3b < 9$

$-10 < b < 3$

$b \in \varnothing$

$3 < b < 14$

$-6 < b < 3$

$3 < b < 3$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 5 \\ \hline 7200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 144 \\ 144 \\ \hline 576 \\ 576 \\ 144 \\ \hline 20736 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20736 \\ - 270 \\ \hline 20466 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20736 \\ - 8100 \\ \hline 12636 \end{array}$$

~~$625r^4 + 690r^2 + 20466 = 0$~~

$625r^4 - 6300r^2 + \cancel{166}\ 12636 = 0$

③ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$f(2) = 1$ $\quad f(6) = 1$

$f(3) = 1$ $\quad f(10) = 3$

$f(5) = 2$ $\quad f(14) = 4$

$f(7) = 3$ $\quad f(22) = 6$

$f(11) = 5$ $\quad f(15) = 3$

$f(13) = 6$ $\quad f(21) = 4$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(1) = 0$

⑦ ~~f на поло~~ $D_f = R_+$ $\quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$, p - простое

пары $(x; y)$ $\quad 2 \le x \le 22$, $2 \le y \le 22$ $\quad f\left(\cancel{x}\,\frac{x}{y}\right) < 0$

не подходят пары, что $\frac{x}{y} = c$, c - простое

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$f(x) = 8x - 6|2x-1| = \begin{cases} -4x + 6 & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x - 6 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$g(x) = -8x^2 + 6x + 7$ $\quad x_b = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$g\left(\frac{3}{8}\right) = -8 \cdot \frac{9}{8^2} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)$

$-16 \le 2 \le 2$ лежит на параболе

$1\frac{1}{2} \le \frac{15}{4} \le 8\frac{1}{8}$ посередине

$4 \le 4 \le 8$ лежит на ломаной, ниже параболы

$2 \le 5 \le 5$ лежит на параболе

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $c - ?$ a $ax^2 + \cancel{2}bx + c = 0$

$b = a\cdot q$

$c = a\cdot q^2$ $ax^2 + 2(aq)x + aq^2 = 0$

$d = a\cdot q^3$

$a\cdot(aq^3)^2 + 2(aq)(aq^3) + aq^2 = 0$

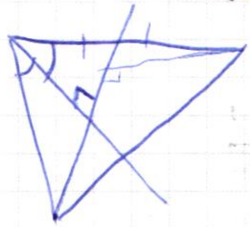
$a^3\cdot q^6 + 2\cdot a^2\cdot q^4 + aq^2 = 0$

$aq^2 = c$

$c^3 + 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 + 2c + 1) = 0$

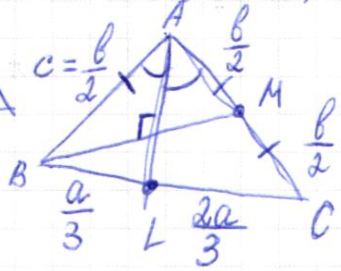
$c \in \{0; -1\}$



② $P = 900$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ число тр-ков

$a + b + c = 900$

выходят из разных вершин



$c = \frac{b}{2}$

$a = 900 - \frac{3b}{2}$

~~$\frac{3b}{2} > 900 - \frac{3b}{2}$~~

~~$6b > 900$~~

$\begin{cases} \frac{6b}{2} > 900 \\ 2b < 900 \end{cases}$; $b > 300$ $b < 450$

b – чётное

$50 + 50 + 24 = 124$

$\begin{cases} b + c > a \\ b - c < a \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}b > 900 - \frac{3b}{2}; \\ \frac{b}{2} < 900 - \frac{3b}{2} \end{cases}$

③ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$ab \geq 0$

~~$x^2 + 36y^2 - 12xy =$~~

$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$

$x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0$

$x - 6 = a$ $x = a + 6$

$y - 1 = b$ $-6y = -6(b-1) = -6b + 6$

$\begin{cases} a - 6b + 12 = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} ab \geq 0 \\ (a - 6(b-2))^2 = ab \end{cases}$

$b^2 - 4b + 4$

$a^2 + 36(b-2)^2 - 12a(b-2) = ab$

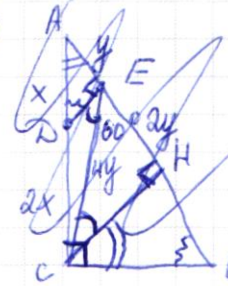
$a^2 + 36b^2 - 144b + 144 - 12ab + 24a = ab$

$(a - 6b)^2$

$(x - 6y)^2 = (x - 6y) - 2x + xy + 6$

$f(1) = 0$ $f(pq) = \left[\frac{p}{5}\right] + \left[\frac{q}{2}\right]$ $f(a^2) = 2f(a)$

④ а)

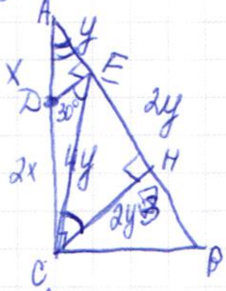


$tg\angle BAC - ?$ $\angle CED = 30°$

$\frac{BC}{AC} - ?$

$\cancel{\frac{BH}{BC}}$ $\frac{CH}{HA}$

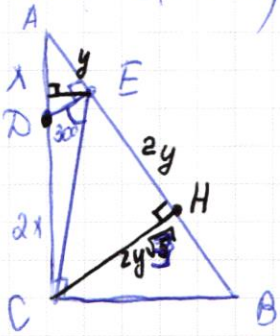
$CH =$



$CH = 2y\sqrt{3}$

$tg\angle BAC = \frac{CH}{HA} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

б) $AC = \sqrt{7}$ $S(CED) - ?$



$AC = \sqrt{9y^2 + 4\cdot 3y^2} = \sqrt{21}\,y$

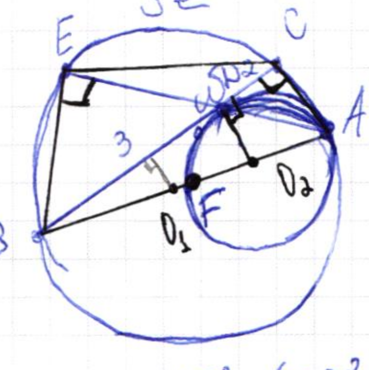
$y = \sqrt{\frac{7}{21}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{AHC} = S = \cancel{3\sqrt{\frac{7}{29}}\cdot 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{7}{29}} = \frac{42\sqrt{5}}{29}}\ 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$

$S_{CEA} = \frac{1}{3}S$

$S_{CED} = \frac{2}{3}\cdot S_{CEA} = \frac{2}{9}S = 6\sqrt{3}$

⑤



AB – д-р Ω

$\left.\begin{matrix} r \\ R \\ S_{BACE}\end{matrix}\right\} - ?$

$CD = 2$ $\quad CD\cdot BD = AD\cdot DE$

$BD = 3$

$BD^2 = BF\cdot BA = 2R\cdot 2(R-r) = 4R(R-r)$

$15^2 + (5r)^2 = (3R)^2$

$(2R-r)^2$

$\frac{r}{AC} = \frac{3}{5}$ $\quad AC = \frac{5}{3}r$

$R = \frac{5}{3}\sqrt{9+r^2}$

$\cancel{4R(R-r) = 9}$

$\cancel{\frac{20}{3}\sqrt{9+r^2}\left(\frac{5}{3}\sqrt{9+r^2} - r\right) = 9}$

$\cancel{\frac{400}{9}(9+r^2)\left(25+\frac{25}{9}r^2\right.}$

$\begin{cases} 25 + \frac{25}{9}r^2 = 4R^2 \\ 4R^2 - 4Rr = 9\end{cases}$

$\cancel{4\left(25+\frac{25}{9}r^2\right) - 4r\sqrt{25+\frac{25}{9}r^2} = 9}$

$\cancel{100 + \frac{100}{9}r^2 - 9 = 4r\sqrt{25+\frac{25}{9}r^2}}$

$25 + \frac{25}{9}r^2 - 2r\sqrt{25+\frac{25}{9}r^2} = 9$

$\cancel{16 + \frac{25}{9}r^2 \quad 2r\sqrt{25+\frac{25}{9}r^2}}\ \Big|\cdot 9$

$16 + \frac{25}{9}r^2 = \frac{10}{3}\sqrt{9+r^2}\ \Big|\cdot 9$

14 14 $30\sqrt{9+r^2} = 144 + 25r^2$ $\quad 8100 + 900r^2$

$625r^4 + 50\cdot 144r^2 + 144^2 = \cancel{270+30r^2}$