

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть e — 40й член заданной геом. прогрессии.
Числа b, c, e можно выразить через a , т.к. эти 4 числа образуют геом. прогрессию, где a — первый член. $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} b &= aq \\ c &= aq^2 \\ e &= aq^4, \quad q \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= 0; \\ ax^2 + 2aqx + aq^2 &= 0; \\ (x+q)^2 &= 0; \end{aligned}$$

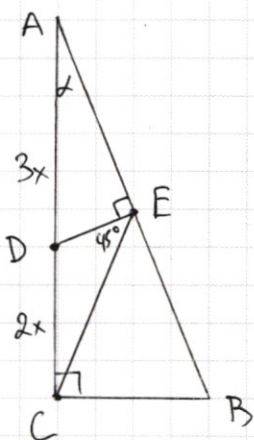
$$x+q = 0.$$

Уравнение линейное, значит имеет один корень, и этот корень — e .

$$\begin{aligned} e+q &= 0; \\ aq^4+q &= 0; \\ aq^2+1 &= 0; \\ aq^2 &= -1; \\ c &= -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

№4.



Дано: $\triangle ABC$ — и/у

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$DE \perp AB$$

$$\angle CED = 45^\circ$$

Найти: а) $\operatorname{tg} \angle BAC$ — ?

б) S_{CED} , если $AC = \sqrt{29}$

Решение:

а) Пусть $AC = 5x$, тогда $AD = 3x$, $DC = 2x$. Пусть $\angle BAC = \alpha$.

$$\angle ABC = 90^\circ - \alpha \quad (\text{по к. бы. н/у мфур.})$$

$$DE \perp AB \Rightarrow \angle AED = \angle DEB = 90^\circ \quad (\text{по опр. перпен.})$$

$$\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 45^\circ$$

$$\angle ADE = 180^\circ - \angle AED - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle EDC = 180^\circ - \angle ADE = 90^\circ + \alpha$$

б) $\triangle CEB$:

$$\frac{CE}{\sin \angle CBE} = \frac{CB}{\sin \angle CEB} \quad (\text{по м. синусов})$$

$$\frac{CE}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{CB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{CE}{\cos \alpha} = \frac{CB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

в) $\triangle DEC$:

$$\frac{DC}{\sin \angle DEC} = \frac{CE}{\sin \angle CDE} \quad (\text{по м. синусов})$$

$$\frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{\cos \alpha}$$

$$\frac{CE}{\cos \alpha} = \frac{CB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow CB = 2x \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2}{5}}}$$

$$д) AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{25x^2 + 4x^2} = x\sqrt{29} \quad (\text{по м. Пифагора})$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle AED = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle CAB - \text{общ.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB \quad (\text{по двум углам.})$$

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB} \quad (\text{по опр. подобия мфур.}) \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot CB}{AB}$$

$$DE = \frac{3x \cdot 2x}{x\sqrt{29}} = \frac{6x}{\sqrt{29}}$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin \angle CDE = \frac{1}{2} 2x \cdot \frac{6x}{\sqrt{29}} \cdot \sin(90^\circ + \alpha) =$$

$$= \frac{6x^2}{\sqrt{29}} \cdot \cos \alpha = \frac{6x^2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{6 \cdot 29}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{25} + 1}} =$$

$$= \frac{6 \cdot 29 \cdot 5}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = 30$$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; д) 30.

№3.

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y-2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

Пусть ~~у нас~~, $a = y-2$, $b = x-1$, тогда система уравнений будет:

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} ab \geq 0 \\ a-2b \geq 0 \\ a^2-4ab+4b^2=ab \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 2b \\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}$$

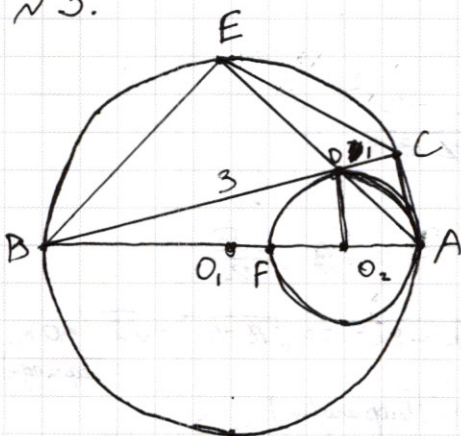
$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 2b \\ (a-4b)(a-b)=0 \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 2b \\ a=4b \\ 2b^2+16b^2=3 \\ a=b \\ 3a^2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 2b \\ a=4b \\ b^2 = \frac{1}{6} \\ a=b \\ a^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a \geq 2b \\ a=4b \\ b = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ a=b \\ a=1 \\ a=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ a = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ b = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Обратная замена: $\begin{cases} y-2 = -1 \\ x-1 = -1 \\ y-2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x-1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1 \\ x=0 \\ y = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2 \\ x = \frac{\sqrt{6}}{6} + 1 \end{cases}$

Ответ: $(0; 1)$, $(\frac{\sqrt{6}}{6} + 1; \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2)$.

№5.



Дано: Ω - окр. $(O_1; R)$
 ω - окр. $(O_2; r)$
 AB - диаметр.
 BC - кас. к ω

$$CD = 1 \\ BD = 3$$

Найти: r , R , $S_{\triangle BCE}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:

AF - diam. ω (по св. бу ~~выпукл.~~ кас. окр.), ~~параллельна BC~~
BC - кас. к $\omega \Rightarrow O_2 D \perp BC$ (по св. бу ~~кас.~~ рад., провед. в м. кас.)
 $\angle BDO_2 = \angle O_2 DC = 90^\circ$ (по окр. перпен.)

AB - diam. $\Omega \Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$ (по св. бу угла, опр. на diam.)

$\left. \begin{array}{l} \angle BCA = \angle BDO_2 = 90^\circ \\ \angle CBA - \text{общ.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CBA \sim \triangle DBO_2$ (по 2м углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{O_2 D}{AC} = \frac{BO_2}{BA} \text{ (по окр. подобн. тр.)} \Rightarrow BD = \frac{BC \cdot BO_2}{AB}$$

$$BD = 3, CD = 1 \Rightarrow BC = 4$$

$$BD^2 = BA \cdot BF \text{ (по св. бу кас. и сек.)};$$

$$BA \cdot BF = \frac{BC^2 \cdot BO_2^2}{AB^2};$$

$$2R \cdot (2R - 2z) = \frac{BC^2 \cdot (2R - z)^2}{4R^2};$$

$$16R(R - z) = \frac{BC^2 \cdot (2R - z)^2}{R^2}$$

$$R(R - z) = \frac{BC^2 \cdot (2R - z)^2}{R^2} \quad (1)$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} \text{ (по гок.)};$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2R - z}{2R};$$

$$R = 2z \cdot (2)$$

$$(2) \text{ в } (1): \quad 2z(2z - z) = \frac{BC^2 \cdot (4z - z)^2}{4z^2};$$

$$2z^2 = \frac{9z^2}{4z^2};$$

$$z = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle ABC - \text{и/у (по окр.)} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - BC^2} = \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2} \text{ (по м. Пифагора)}$$

$$\triangle ACD - \text{и/у (по окр.)} \Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{3} \text{ (по м. Пифагора)}$$

$$BD \cdot DC = ED \cdot DA \text{ (по св. бу перпен. хорд.)};$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 = \sqrt{3} \cdot ED ;$$

$$ED = \sqrt{3} .$$

$$EA = 2\sqrt{3} .$$

$$\sin \angle CDA = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (по опр. синуса)}$$

$$S_{BACE} = \frac{1}{2} AE \cdot BC \cdot \sin \angle CDA = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{2} .$$

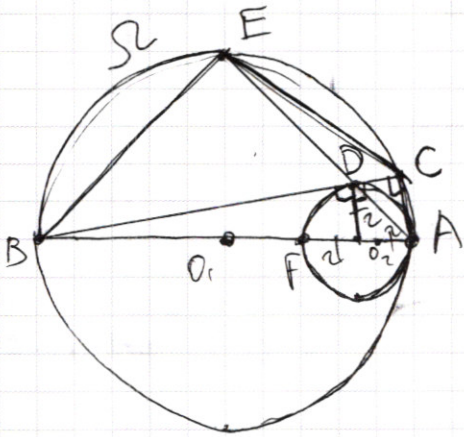
Отвеч: ~~.....~~ $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

25.



$CD=1$
 $BD=3$

$\frac{BD}{BC} = \frac{O_2D}{AC} = \frac{BO_2}{BA}$ $AC = \frac{AB \cdot O_2D}{BO_2}$

$BD^2 = BF \cdot FA$ 2

$BD = \frac{O_2D \cdot BC}{AC}$
 $= \frac{O_2D \cdot BC \cdot BO_2}{AB \cdot \cancel{AC}} = \frac{BC \cdot BO_2}{AB}$

$BD = \frac{4 \cdot (BF+2)}{BF+22}$

$BD^2 = BF \cdot 22$

$\frac{16 \cdot (BF+2)^2}{(BF+22)^2} = BF \cdot 22$

$\frac{16(2R-22+2)^2}{2R+22} = 22(2R-22)$

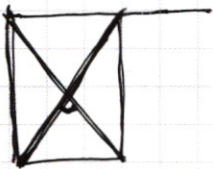
$\frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (2R-2)^2}{R} = 2(2R-2)$



$= \frac{2(42-2)^2}{R} = 2(22-2);$

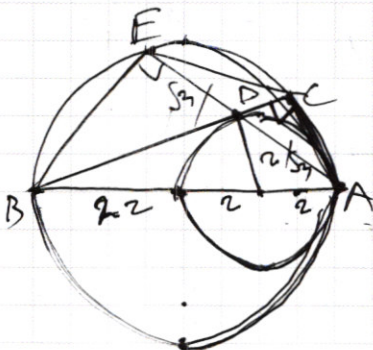
$\frac{92^2}{2} = 22^2$

$2 = 9$
 $R = 18.$



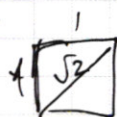
$\begin{array}{r} \times 18 \\ 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \end{array}$

$AB = 3\sqrt{2}$
 $AB^2 = 18$



$AB = 18$
 $BC = 4$

$22^2 = \frac{92^2}{42^2}$



$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{182^2}{2} = 9$
 $22^2 = \frac{9}{8}$

$2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$y - 2x = a - 2b$$

$$(1) \quad y - 2x = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)}$$

$$(y - 2x) = \sqrt{(y-2)(x-1)}$$

$$\begin{cases} y - 2 = a \\ x - 1 = b \end{cases}$$

$$(2) \quad 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

орб:
 $ab \geq 0$
 $a \geq 2b$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ 2b^2 + a^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ 2b^2 + a^2 = 3 \end{cases} \quad \ominus$$

$$a^2 = 3 - 2b^2$$

~~$$2b^2 + 4ab - 4b^2 - 4ab + 4b^2 - ab - 2b^2 + 3 = 0$$~~

~~$$2b^2 - 5ab + 3 = 0$$~~

~~$$D = 25a^2 + 24 = 75 - 50b^2 - 24 = 51 - 50b^2$$~~

~~$$b = \frac{-24 \pm \sqrt{51 - 50b^2}}{24}$$~~

$$\begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ (a - 4b)(a - b) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ 2b^2 + 16b^2 = 3 \\ a = b \\ 3a^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ 18b^2 = 3 \\ a = b \\ a^2 = 1 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} a = 4b \\ b = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$~~

$$\frac{2\sqrt{3}}{6^3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$a \neq 0$

$$b = a + d$$

$$c = a + 2d$$

$$e = a + 3d$$

$$4a(a+2d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + 2bx + c = 0 \\ D = 4a^2 + 8ad + 8d^2 - 4a^2 - 8ad = 4d^2 \\ = 4a^2 - 8a + 8ad + 4d^2 - 8d = 4(a^2 - 2a + 2ad - 2d + d^2) \end{array} \right.$$

$$a(a+3d)^2 + 2(a+d)(a+3d) + a+2d = 0;$$

$$a^3 + 6a^2d + 9da^2 + 2ad + 6ad + 6d^2 + a + 2d = 0;$$

$$\underline{a^3} + \underline{6a^2d} + \underline{9d^2a} + \underline{2a^2} + \underline{8ad} + \underline{6d^2} + \underline{a} + \underline{2d} = 0$$

$$a(a^2 + 2a + 1) + 2d(3a^2 + 3d + 1)$$

$$a+3d = \frac{-2a-2d \pm 2d}{2a} = \begin{bmatrix} \frac{-2a-4}{2a} \\ \frac{-2a}{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 - 2\frac{d}{a} \end{bmatrix}$$

№3.

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{array} \right.$$

$$\underline{y^2} - \underline{4xy} + \underline{4x^2} - \underline{xy} + \underline{2x} + \underline{y} - \underline{2} - \underline{2x^2} + \underline{4x} - \underline{2} - \underline{y^2} + \underline{4y} - \underline{4} + \underline{3} = 0$$

$$-5xy + 2x^2 + 6x + 5y - 5 = 0;$$

$$5y(1-x) + 2x^2 + 6x - 5 = 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y - 2x \geq 0 \\ xy - 2x - y + 2 \geq 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} y \geq 2x \\ y(x-1) \geq 2x - 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} y \geq 2x \\ y \neq 2 \end{array} \right.$$

$$y^2 + y + 4x^2 + 2x - 5xy - 2 = 0; \quad y^2 - 4xy + 4x^2 + 2x + y + xy - 2 = 0;$$

$$e = \begin{cases} a+3d = -1 \\ a+3d = -1 - 2\frac{d}{a} \end{cases}$$

$$f = \frac{b+e}{2} = \frac{a+d-1}{2}$$

$$b_n = b_0 \cdot q^{n-1}$$

$$\begin{aligned} a &= a \\ b &= a \cdot q \\ c &= a \cdot q^2 \\ d &= a \cdot q^3 \end{aligned}$$

$$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0 \quad D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$$

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0$$

$$(x+q)^2 = 0$$

$$aq^3 \neq -q$$

$$aq^3 + q = 0$$

$$q(aq^2 + 1) = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{25} + 1}} = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

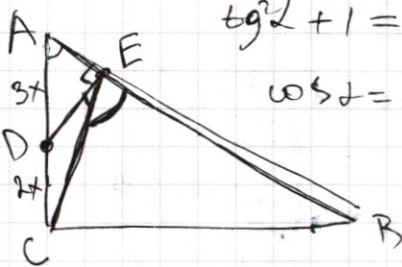
$$\sqrt{2} \sin \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c-a}{b}$$

~ 4.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | : \cos^2 \alpha$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \angle CED = 45^\circ$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} \quad \tan \angle BAC = ?$$



$$\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$$

$$AE = \frac{1}{5} CB = 5 \times \tan \alpha$$

$$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$$

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = AE \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$AE \cdot AB = 15x^2 \quad AE = \frac{15x^2}{AB}$$

$$AD = AE \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \quad AD = AE \frac{1}{\cos \alpha}$$

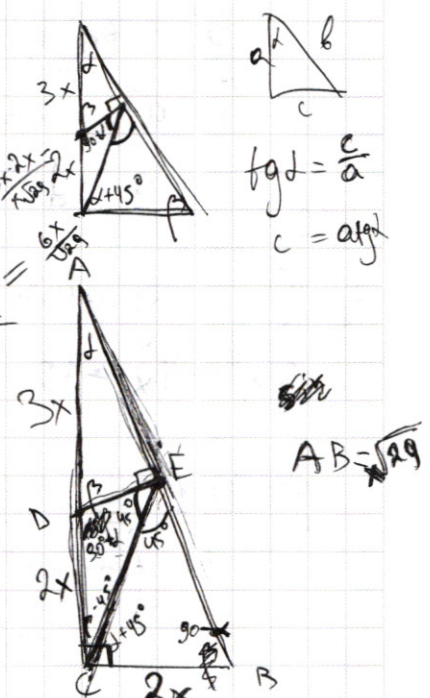
$$EB = AB - \frac{15x^2}{AB}$$

$$= \frac{AB^2 - 15x^2}{AB} = \frac{25x^2 + CB^2 - 15x^2}{AB} = \frac{10x^2 + CB^2}{AB}$$

$$\frac{CB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{2 \sin(90^\circ + \alpha)} \quad \frac{2x}{2 \sin 45^\circ} = \frac{DE}{2 \sin(90^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{2 \sin(90^\circ + \alpha)} \quad \left(\frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{2 \cos \alpha} \right)$$

CE =



$$180^\circ - 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha =$$