МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

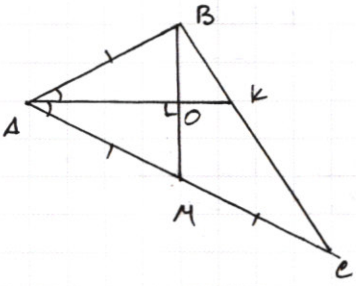
№1.

Т.к. по условию числа a, b, c - 1-ый, 2-ой и 3-ий члены геометрической прогрессии, то запишем $b=aq$, $c=aq^2$, где q - знаменатель этой прогрессии (заметим, что тогда $q \neq 0$). Для ур-ния $ax^2-2bx+c=0$ $\frac{D}{4} = b^2-ac = a^2q^2 - a \cdot aq^2 = a^2q^2 - a^2q^2 = 0$ => уравнение имеет единственный корень, равный $x_0 = \frac{-b}{-a} = \frac{-aq}{-a} = q$. Т.к. этот корень является четвёртым членом этой геометрической прогрессии, то $x_0 = aq^3$. Тогда $q = aq^3 \iff q(aq^2-1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} q=0 \\ aq^2=1 \end{array}\right.$ Т.к. $q \neq 0$, то $aq^2 = c = 1$ - искомый третий член прогрессии.

Ответ: 1.

№2.

В $\triangle ABC$ биссектриса AK перпендикулярна медиане BM.



Заметим, что тогда в $\triangle ABM$ AO ($O = BM \cap AK$) - бис-са и высота => => $AB = AM$, $AC = 2AM = 2AB$.

Пусть $AB = a$, тогда $AC = 2a$; пусть $BC = b$.

Из нер-ва треугольника $b < a+2a = 3a$ и $AC < AB+BC$, $2a < a+b$, $b > a$ ($AB \not< AC+BC$ выполняется всегда, т.к. $AB < AC$), $a < b < 3a$

Периметр треугольника ABC - $P = AB+BC+AC = 3a+b$,

$4a < P < 6a$

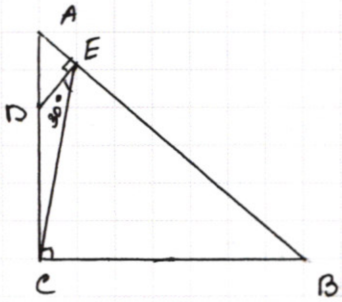
По условию a и b должны быть целыми (если $a \in \mathbb{Z}$, то $2a \in \mathbb{Z}$) и $P = 900$. Тогда $4a < 900 < 6a$, $2a < 450 < 3a$, откуда $a > 150$ и $a < 225$. Значит, a - целое число из промежутка ~~[…]~~ $[151; 224]$ (таких чисел $224-151+1 = 74$). Кроме того, значение a однозначно задаёт треугольник по трём сторонам: если одна сторона равна a, то другая - $2a$, третья - $900-3a$. Таким образом, кол-во треугольников совпадает с кол-вом возможных значений a и равно 74.

Ответ: 74.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



Дано:
ΔABC, $\angle ACB = 90^\circ$
$D \in AC$, $AD : AC = 1:3$
$E \in AB$, $DE \perp AB$
$\angle CED = 30^\circ$
$AC = \sqrt{7}$

Найти: а) $tg\,BAC$
б) S_{CED}.

Решение

1) Пусть $\angle BAC = \alpha$, $CE = x$. В ΔABC $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, в ΔADE $\angle ADE = 90^\circ - \alpha$, $\angle EDC = 180^\circ - \angle ADE = 90^\circ + \alpha$.

2) Пусть $AD = a$, тогда $AC = 3a$, $CD = 2a$.

3) Рассмотрим ΔCED. По теореме синусов $\frac{CE}{\sin EDC} = \frac{CD}{\sin 30^\circ}$,
$\frac{x}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{2a}{\frac{1}{2}}$ или $\frac{x}{\cos\alpha} = 4a$, откуда $x = 4a\cos\alpha$.

4) В ΔABC $tg\alpha = \frac{BC}{AC}$, откуда $BC = AC\,tg\alpha = 3a\,tg\alpha$.

5) В ΔBEC $\angle BEC = \angle BED - \angle CED = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{CE}{\sin(90^\circ - \alpha)}$ или $\frac{3a\,tg\alpha}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{x}{\cos\alpha}$, откуда
$x = \frac{6a\,tg\alpha\cos\alpha}{\sqrt3} = 2\sqrt3\,a\,tg\alpha\cos\alpha$.

6) $x = 2\sqrt3 a\,tg\alpha\cos\alpha = 4a\cos\alpha$. Т.к. ΔABC – прямоугольный, то $\cos\alpha \neq 0$, $a \neq 0$, тогда $2\sqrt3\,tg\alpha = 4$, $tg\alpha = \frac{2}{\sqrt3} = \frac{2\sqrt3}{3}$

~~7) Если AC=√7, то CE = x = 4a~~

7) Если $AC = \sqrt7$, то в ΔABC $= BC\,tg\alpha = \sqrt7 \cdot \frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt7}{\sqrt3}$

8) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt3}$ (по т. Пифагора)

9) ~~sin~~ $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt7}{\frac{7}{\sqrt3}} = \frac{\sqrt3}{\sqrt7}$

10) $CE = 4a\cos\alpha = 4 \cdot \frac{\sqrt7}{3} \cdot \frac{\sqrt3}{\sqrt7} = \frac{4}{\sqrt3}$

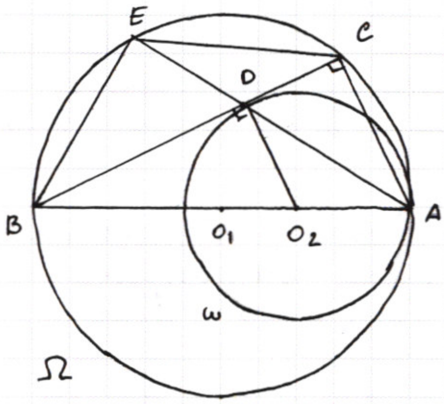
11) Из ΔADE ~~AE/AD~~ $\cos\alpha = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = AD \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt7}{3} \cdot \frac{\sqrt3}{\sqrt7} = \frac{1}{\sqrt3}$;
$\frac{DE}{AE} = tg\alpha$, $DE = AE \cdot tg\alpha = \frac{1}{\sqrt3} \cdot \frac{2}{\sqrt3} = \frac{2}{3}$

12) $S_{CED} = \frac12 CE \cdot DE \cdot \sin CED = \frac12 \cdot \frac{4}{\sqrt3} \cdot \frac23 \cdot \frac12 = \frac{2}{3\sqrt3} = \frac{2\sqrt3}{9}$.

Ответ: а) $tg\,BAC = \frac{2\sqrt3}{3}$; б) $S_{CED} = \frac{2\sqrt3}{9}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



Дано:
Ω, ω - касаются в т. A
AB - диаметр Ω
BC - хорда Ω
$BC \cap \omega = D$
$AD \cap \Omega = A; E$
$CD = 2$, $BD = 3$

Найти: R, r, S_{ACE}
(R - радиус Ω, r - радиус ω)

Решение

1) Пусть O_1 - центр Ω, O_2 - центр ω. AB - диаметр Ω $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1 \in AB$. Кроме того, у двух касающихся окр-тей точка касания лежит на линии центров $\Rightarrow O_2 \in AB$.

2) $O_2D \perp BC$ как радиус O_2D, проведённый в точку касания D с прямой BC $\Rightarrow \angle O_2DB = 90°$. $\angle ACB = 90°$ (как вписанный, опирающийся на диаметр. ~~Значит, $\triangle ABC \sim \triangle O_2BD$ по двум углам ($\angle B$ - общий, $\angle O_2DB = \angle ACB = 90°$). Тогда~~ Тогда т.к. $O_2D \perp BC$ и $AC \perp BC$, то $O_2D \parallel AC$, по теореме Фалеса $AO_2 : O_2B = CD : BD = 2 : 3$.

3) $AB = 2R$, $O_2A = r$, тогда $O_2B = 2R - r$. Таким образом, $\frac{r}{2R-r} = \frac{2}{3}$, $3r = 4R - 2r$, $5r = 4R$, $\frac{r}{R} = \frac{4}{5}$ $(R = \frac{5}{4}r)$.

4) $\triangle O_2DB \sim \triangle ACB$ по двум углам ($\angle B$ - общий, $\angle ACB = \angle O_2DB = 90°$), коэффициент подобия - $k = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$. Тогда $AC = \frac{5}{3} O_2D = \frac{5}{3}r$.

5) Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACB$. В нём $BC = 5$, $AB = 2R = \frac{10}{4}r$, $AC = \frac{5}{3}r$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, ~~$\frac{25}{9}r^2$~~ $\frac{100}{16}r^2 = 25 + \frac{25}{9}r^2$, $\frac{4}{16}r^2 = 1 + \frac{1}{9}r^2$, $\frac{1}{4}r^2 = 1 + \frac{1}{9}r^2$, $9r^2 = 36 + 4r^2$, $5r^2 = 36$, $r = \frac{6}{\sqrt5} = \frac{6\sqrt5}{5}$.

Тогда $R = \frac{5}{4}r = \frac{5}{4} \cdot \frac{6\sqrt5}{5} = \frac{6\sqrt5}{4} = \frac{3\sqrt5}{2}$.

(продолжение на стр. 4)

№5 (продолжение).

6) $AC = \frac{5}{3} r = \frac{5}{3} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

7) $S_{BAC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$

8) $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ имеют общую вершину A, основания BD и CD лежат на одной прямой $\Rightarrow S_{ABD} : S_{ACD} = BD : CD = 3:2 \Rightarrow S_{ABD} = 3\sqrt{5}$, $S_{ACD} = 2\sqrt{5}$.

9) $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ по двум углам ($\angle ADB = \angle EDC$ как вертикальные, $\angle BAD = \angle BAE = \angle ECD = \angle ECB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу), коэфф. подобия — $\frac{BD}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{ECD} = \frac{4}{9} S_{ABD} = \frac{4}{9} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$

10) Аналогично $\triangle ACD \sim \triangle BED$ ($\angle ADC = \angle BDE$ — вертикальные, $\angle CAD = \angle CAE = \angle EBD = \angle EBC$ — как вписанные, опирающиеся на одну дугу) $\frac{CD}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{BED}} = \frac{4}{9}$, $S_{BED} = \frac{9}{4} S_{ACD} = \frac{9}{4} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{9}{2}\sqrt{5}$

11) $S_{BACE} = S_{BAC} + S_{ECD} + S_{BED} = 5\sqrt{5} + \frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{9}{2}\sqrt{5} = \frac{30\sqrt{5}}{6} + \frac{8\sqrt{5}}{6} + \frac{27\sqrt{5}}{6} = \frac{65\sqrt{5}}{6}$

Ответ: a. $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $S_{BACE} = \frac{65\sqrt{5}}{6}$.

№7.

Заметим, что для любого целого положительного числа c $f(c) > 0$: $f(2) = [\frac{2}{2}] = [1] = 1$, любое другое простое число можно представить в виде $2k+1$, где $k \geq 1$ и $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $f(2k+1) = [\frac{2k+1}{2}] = [k + \frac{1}{2}] = k$. Составное число, если его можно записать в виде $p_1 p_2$, где p_1 и p_2 — простые — $f(p_1 p_2) = f(p_1) + f(p_2) > 0$, т.к. $f(p_1) > 0$ и $f(p_2) > 0$. Если число нельзя представить в виде пр-ия двух простых мн-лей, запишем $A = p_1 p_2 ... p_n$ ($p_1, p_2, ..., p_n$ — простые делители), тогда $f(A) = f(p_1 \cdot p_2 ... p_n) = f(p_1) + f(p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n) = f(p_1) + f(p_2 \cdot (p_3 \cdot ... \cdot p_n)) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3 \cdot p_4 \cdot ... \cdot p_n) = f(p_1) + f(p_2) + ... + f(p_n) > 0$. Значит, т.к. $2 \leq x \leq 22$ и $2 \leq y \leq 22$, то отношение $\frac{x}{y}$ не должно быть целым.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Возведём 1-ое ур-ие в квадрат: $x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$ (тогда $x-6y\geq 0$, $x\geq 6y$); запишем в виде

$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$.

Решим квадратное ур-ие отн. x:

$D=(1-13y)^2-4(36y^2+6y-6)=1+169y^2-26y-144y^2-$

$-24y+24=$ ~~25~~ $25y^2-50y+25=25(y-1)^2$

Тогда $x=\frac{13y-1\pm(5(y-1))}{2}$

$x_1=\frac{13y-1+5y-5}{2}=\frac{18y-6}{2}=9y-3$

$x_2=\frac{13y-1-5y+5}{2}=\frac{8y+4}{2}=4y+2$.

$9y+3\geq 6y \Leftrightarrow 3y\geq -3 \Leftrightarrow y\geq -1$

$4y+2\geq 6y \Leftrightarrow 2y\leq 2 \Leftrightarrow y\leq 1$.

Для 2-ого ур-ия, квадратного отн. x,

$\frac{D}{4}=36-2y^2+4y-20=-2y^2+4y+16=-2(y-4)(y+2)$.

Ур-ие имеет решения, если $\frac{D}{4}\geq 0$,

$-2(y-4)(y+2)\geq 0$, $(y-4)(y+2)\leq 0 \Rightarrow y\in[-2;4]$

Тогда $x=\frac{6\pm\sqrt{-2(y-4)(y+2)}}{2}$

Т.к. $y\in[-2;4]$ и $y\in[-1;1]$, то при $y\in[-1;1]$ ~~решение системы~~ $x=9y-3$ или $4y+2$.

Ответ: $-1\leq y\leq 1$; $x=9y-3$ и $x=4y+2$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$ $\quad x^2+36y^2-12xy=xy-6y-x+6$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$ $\quad x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0$

$2x^2+38y^2-13xy+2y-11x+14=0$

$x^2+x(1-13y)+36y^2-6+6y$

$34y^2-13xy-10y+13x-26=0$

$\times\frac{36}{4}$ 144

$(x\quad)^2+(y\quad)^2+(x\quad y)^2=0$

$D=1+169y^2-26y-24y+24-144y^2=25y^2-50y+25=$

$=25(y-1)^2$

$x=\frac{13y-1\pm 5y-5}{2}=$

$144-4(2y^2-4y+20)=$

$=144-8y^2-16y-$

$\frac{D}{4}$ $\quad 16-$

$-2(y^2-6y-8)$

$(y-4)(y+2)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

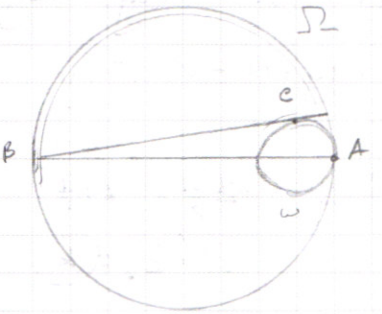
ШИФР

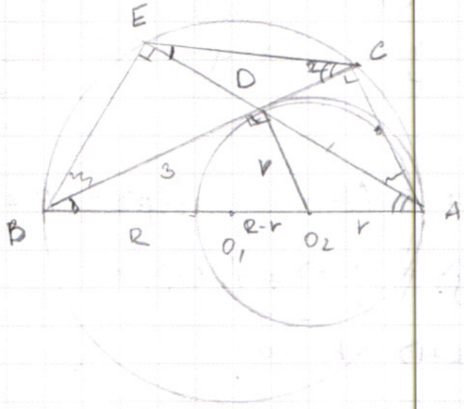
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x+a>2x \qquad a>x \qquad x\in[151;\,224]$

$a<3x \qquad x<a<3x$





$\dfrac{r}{2R-r}=\dfrac{2}{3} \qquad 4R-2r=3r \qquad \dfrac{2R-r}{r}=\dfrac{3}{2}$

$5r=4R \qquad \dfrac{R}{r}=\dfrac{5}{4} \qquad R=\dfrac{5}{4}r$

$\dfrac{AC}{O_2D}=\dfrac{5}{3} \qquad \cancel{O_2D=} \; AC=\dfrac{5O_2D}{3}=\dfrac{5}{3}r \qquad 2R=\dfrac{10}{4}r$

$BC^2+AC^2=AB^2 \qquad 25+\dfrac{25}{9}r^2=\dfrac{100}{16}r^2 \qquad 2R-r=\dfrac{3}{2}r=$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{6\sqrt5}{5}=$

$1+\dfrac{1}{9}r^2=\dfrac{4}{16}r^2 \qquad =\dfrac{9\sqrt5}{5}$

$2R=\dfrac{9\sqrt5}{5}+\dfrac{6\sqrt5}{5}=3\sqrt5$

$\dfrac{1}{9}r^2+1=\dfrac{1}{4}r^2 \quad |\,36$

$4r^2+36=9r^2$

$5r^2=36$

$r=\dfrac{36}{5}=\dfrac{6\sqrt5}{5} \qquad R=\dfrac{5}{4}r=\dfrac{6\sqrt5}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{3\sqrt5}{2}$

$S_{BAC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AC=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{6\sqrt5}{5}=5\sqrt5$

$S_{DEC}=\dfrac{4}{9}S_{ABD} \qquad \cancel{S_{BED}=} \qquad S_{ACD}=\dfrac{4}{9}S_{BED}$

$S_{ACD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot DC=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{6\sqrt5}{5}=2\sqrt5 \qquad S_{BAD}=5\sqrt5-2\sqrt5=3\sqrt5$

$S_{BED}=\dfrac{9}{4}\cdot2\sqrt5=\dfrac{9\sqrt5}{2} \qquad S_{DEC}=3\sqrt5\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{4\sqrt5}{3}$

$S=5\sqrt5+\dfrac{4\sqrt5}{3}+\dfrac{9\sqrt5}{2}=\cancel{25\sqrt5+}\dfrac{(30+8+27)\sqrt5}{6}=\dfrac{65\sqrt5}{6}$

$57\times8=65$

$30+\cancel{14}\,2+27=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{(y-1)(x+6)} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

$D = 4+48 = 52$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$(x-6)^2 + 4(y-1)^2 = -y^2+2y+12$

$-y^2+2y+12=$

$y^2, xy, \frac{y}{y^2}, \frac{x^2}{y}$

$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6)$ $\quad (y-1)(x-6) \geq 0$

$(x-6)^2 + (y-1)^2 - 2(y-1)(x-6) = -y^2+2y+12-(x-6y)^2$

$(x-6-y-1)^2 = (x-y-7)^2 = -y^2+2y+12-x^2-12xy-36y^2$

$-37y^2+2y+12-x^2-12xy$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/2]$

$\underline{2k+1}$ $\quad \frac{2k+1}{2} = k+\frac{1}{2}$

$f(x/y) = f(x) + f(1/y) < 0$

$[k+\frac{1}{2}] = k$

$f(2k+1) = k > 0$

$8x - 6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+16x+7$

$-\frac{6}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

На пром. $[-\frac{1}{2}; 1]$ $\quad 8x-6|2x-1| =$

$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$: $\quad 8x-6(1-2x) = 8x+12x-6 = \underline{20x-6}$

$\frac{1}{2} \leq x < 1$; $\quad 8x-6(2x-1) = \underline{6-4x}$

$x=0$ $\quad -6 \leq b \leq 7$ $\quad -7 \leq -b \leq 6$

$-10 -6 \quad -16$

$x = -\frac{1}{2}$: $\quad 4 \leq b + \frac{a}{2} \leq 8$

$-12 \leq 2b \leq 10$

$-6 \leq b \leq 5$

$2 \leq a \leq 24$

$x=1$ $\quad 2 \leq a+b \leq 5$

$-5 \leq a \leq 11$

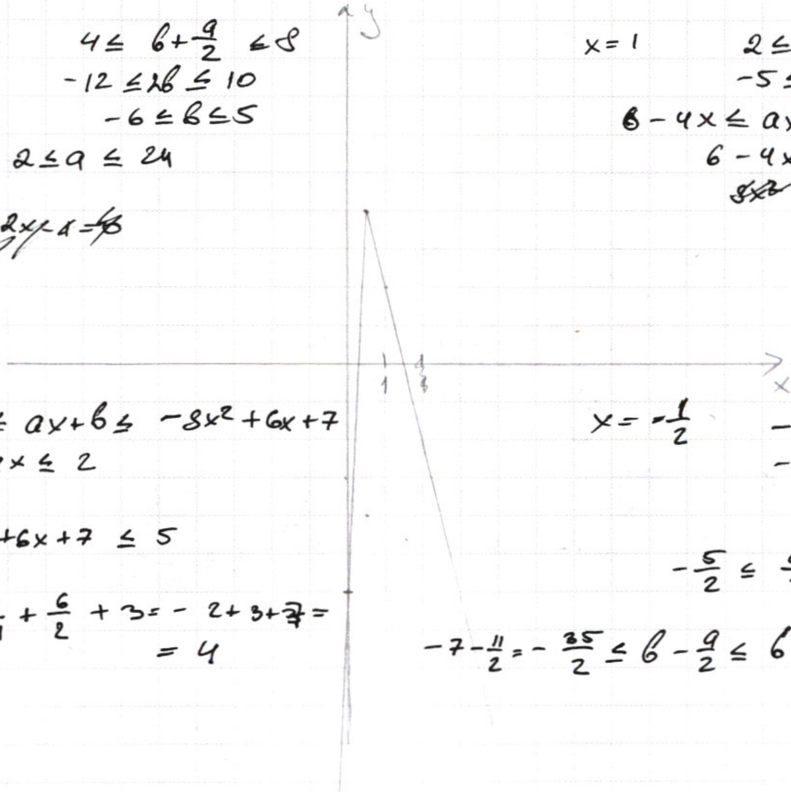
$6-4x \leq ax+b \leq -8x^2+16x+7$

$6-4x = -8x^2+6x+7$

$\cancel{8x^2-10x-1=0}$

$100 + 32$

$-2 \leq \frac{a}{2} - 6 \leq 16$



$6-4x \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$

$4 \leq 6-4x \leq 2$

$8 \leq -8x^2+6x+7 \leq 5$

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad -16 \leq b - \frac{a}{2} \leq -2 \quad -3+7=2$

$-16 \leq b - \frac{a}{2} \leq 2$

$-\frac{5}{2} \leq \frac{a}{2} \leq \frac{11}{2}$ $\quad -\frac{11}{2} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{5}{2}$

$-\frac{8}{4} + \frac{6}{2} + 3 = -2+3+7 =$

$= 4$

$-7-\frac{11}{2} = -\frac{25}{2} \leq b - \frac{a}{2} \leq 6 + \frac{5}{2} = \frac{17}{2}$

$\boxtimes$ черновик $\quad \square$ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = aq, \quad c = aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0 \qquad \frac{D}{4} = b^2 - ac = aq^2 - a \cdot q^2 \cdot a = 0$

$x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = q = aq^3 \qquad q(aq^2 - 1) = 0$

$q = 0$ ⊖ ? $\qquad aq^2 = c = 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$\frac{2}{2} = 1$

$P = 900$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 = x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 38 = 18$

$x^2 + 2y^2 -$

$8x - 6|2x - 1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$x = 0: \quad 0 - 6 \cdot 1 \le b \le 7 \qquad -6 \le b \le 7 \qquad -7 \le -b \le 6$

$x = 1: \quad 8 - 6 = 2 \le a + b \le 6 + 7 - 8 = 5$

$-5 \le a \le 11 \longrightarrow -11 \le -a \le 5 \qquad -\frac{11}{2} \le -\frac{a}{2} \le \frac{5}{2}$

$-5 \le \frac{a}{2} \le \frac{11}{2}$

$x = -\frac{1}{2}: \quad -4 - 12 \le b - \frac{a}{2} \le -2 - 3 + 7 = 2$

$-16 \le b - \frac{a}{2} \le 2$

$-23 \le -\frac{a}{2} \le 8$

$-46 \le -a \le 16$

$-16 \le a \le 46$

$-21 \le b \le \frac{15}{2}$

$-\frac{3}{2} \le b \le 8 + \frac{5}{2}$

$x = \frac{1}{2}: \quad 4 \le b + \frac{a}{2} \le -2 + 3 + 7 = 8$

$-3 \le \frac{a}{2} \le 14$

$-6 \le a \le 28$

$AC = 7 \qquad a = \frac{2}{3}$

$AC = \sqrt{7} \qquad BC = AC\,tg\alpha = \frac{7}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{9}$

$\frac{DE}{AD} = \sin\alpha \qquad DE = AD\sin\alpha$

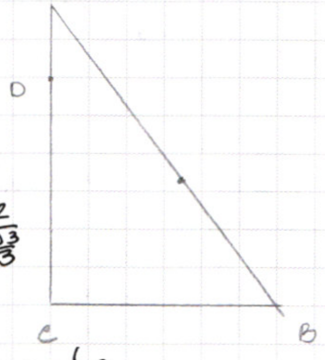
$AB = \sqrt{49 + \frac{196 \cdot 3}{81}} = \sqrt{49 + \frac{196}{27}} =$

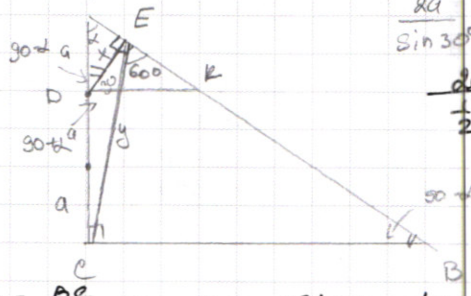
$=$

$y =$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow a = 180° / 0°$





$180 - 90 + \alpha -$

$\frac{2a}{\sin 30°} = \frac{y}{\sin(90° + \alpha)}$

$\frac{2a}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\cos\alpha}$

$2\sqrt{3}\,tg\alpha = 4$

$\sqrt{3}\,tg\alpha = 2$

$tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$4a = \frac{y}{\cos\alpha}$

$4a\cos\alpha = y$

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$

$S_{ADK} = \frac{1}{9}S$

$tg\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC\,tg\alpha = 3a\,tg\alpha$

$y = 2\sqrt{3}a\,tg\alpha \cdot \cos\alpha = 4a\cos\alpha$

$2\sqrt{3}a\,tg\alpha = 4a$

$\sqrt{3}a\,tg\alpha = 2a$

$tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{y}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{3a\,tg\alpha}{\sin 60°} \qquad \frac{y}{\cos\alpha} = \frac{3a\,tg\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6a\,tg\alpha}{\sqrt{3}} =$

$= 2\sqrt{3}\,a\,tg\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{49+\frac{196}{27}} = \sqrt{\frac{1519}{27}} = \frac{\sqrt{1519}}{3\sqrt3}$

$\times\frac{49}{27}$, 343, 98, 1323, $+196$, 1519; $\times\frac{21}{4}$, 84

$AC=\sqrt7$ $\quad BC = AC\,tg\alpha = \sqrt7\cdot\frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$AB=\sqrt{7+\frac{84}{9}} = \sqrt{\frac{105}{3}} = \sqrt{35}$ $\quad \frac{\sqrt{147}}{3} = \frac{7\sqrt3}{3}$ $\quad 105 = 21\cdot5 = 3\cdot7\cdot5$ $\quad 1323 =$ $\quad \times\frac{15}{15}$, 75, 15, 225

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt7}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$ $\quad \times\frac{84}{9}$, 756

$\cos\alpha = \frac{AE}{AD}$

$y = 4a\cos\alpha = 4\cdot\sqrt7\cdot\frac{\sqrt5}{5} = \frac{4\sqrt{35}}{5}$

$AE = AD\cos\alpha = \frac{\sqrt7}{3}\cdot\frac{\sqrt5}{5} = \frac{\sqrt{35}}{15}$

$y = 2\sqrt3\,a\,tg\alpha\cos\alpha = \cancel{2\sqrt3}\cdot\frac{2\sqrt3}{\cancel{3}}\cdot\sqrt7\cdot\frac{\sqrt5}{5}$ $\quad \frac{4\sqrt{35}}{5}$

$\frac{DE}{AE} = tg\alpha$ $\quad DE = AE\cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{35}}{15}\cdot\frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt{3\cdot35}}{15\cdot3}$

$DE = \sqrt{\frac{7}{9}-\frac{35}{225}} = \frac{4\sqrt{7\cdot5}}{8\cdot15}$ $\quad \times\frac{225}{7}$, 875, 315, 560 $\quad \times\frac{35}{9}$, 315

$560 = 56\cdot10 = 7\cdot\underbrace{8\cdot5\cdot2}_{4}$

$7\cdot9 = 63$

$63+84 = 147 = 7\cdot21 = 7\cdot7\cdot3$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt7}{\frac{7\sqrt3}{3}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$ $\quad 151,\quad 302$

$-\frac{900}{302}$, 598, -151, 447 $\quad \times\frac{224}{2}$, 448, $-\frac{900}{448}$, 452, -224, 228

$AE = \frac{\sqrt7}{3}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt7} = \sqrt3$

$DE = \sqrt3\cdot\frac{2\sqrt3}{3} = 2$ $\quad DE = \sqrt{\frac{7}{9}-3} = \sqrt{}$

$BC = \sqrt7\cdot\frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt7}{\sqrt3}$

$AB = \sqrt{7+\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \cancel{\sqrt7}\ \frac{7}{\sqrt3}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt7}{\frac{7}{\sqrt3}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt3}{\sqrt7}$ $\quad AE = \frac{\sqrt7}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt7} = \frac{1}{\sqrt3}$

$DE = \frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad DE = \sqrt{\frac{7}{9}-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7-3}{9}} = \frac{2}{3}$ $\quad -\frac{224}{150}$, 74

$y = 4a\cos\alpha = 4\cdot\frac{\cancel{\sqrt7}}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{\cancel{\sqrt7}} = \frac{4\sqrt3}{3} = \frac{4}{\sqrt3}$

$S_{CED} = \frac{1}{2}xy\sin30^\circ = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt3}$ $\quad -\frac{224}{151}$, 73

~~$P = \frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{\sqrt3}+\frac{2\sqrt7}{3}}{2} = \frac{1}{3}+\frac{2\sqrt3}{3}+\frac{\sqrt7}{3} = \frac{1+2\sqrt3+\sqrt7}{3}$~~ $\quad 450/2$, 225

x – от 151 до 224 – $\quad x,\ 2x,\ a \quad a>x$

$224-151+1 =$
$= 74$ варианта $\quad a<3x \quad x<a<3x$

$x,\ 2x,\ a\in\mathbb{Z}$

$P = 3x+a$

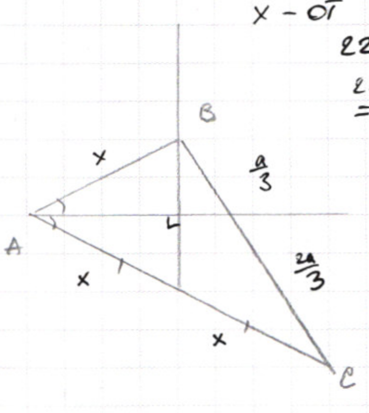
$4x<P<6x$

$4x<900<6x$

$2x<450<3x$

$x>150 \quad x=151$

$x<225 \quad a = 900-3x$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-7 \le b \le 6$ $\boxed{-6 \le b \le 7}$ $4 \le 6 + \frac{a}{2} \le 8$ $-6 \le b \le 7$ $-2 \le \frac{a}{2} - b \le 16$

$-5 \le a \le 11$ $-16 \le b - \frac{a}{2} \le 2$ $-11 \le -a \le 5$

$-2 \le \frac{a}{2} \le 15$ $-4 \le a \le 30$

$-9 \le \frac{a}{2} \le 22$

$x, 2x$ $x < a < 3x$ $4x < x + 2x + a < 6x$

$4x < 900 < 6x$

$2x < 450 < 3x$

$x > 150, \quad x < 225$

$\cancel{225}$

$224 - 151 =$ $151 \cdot 3 = 453$ $224 \cdot 3 = 672$

$x = 151$ $3x = 453$

$671 - 225 = 446$

$a: 152, \dots, 452$ — 301 6. 2 12

746.

224 672

225 ... 671

$447 + 301 = 748$, $748 : 2 = 374$

$3x \to 3x + 3$ $3x + 6$

$x + 1 \ \dots$ $3x + 1$ $2x + 1$ б.

$x + 2 \ \dots$ $3x + 4$ $2x + 3$ б.

$x + 3 \ \dots$ $3x + 7$ $2x + 5$ б.

$374 \cdot 74$: 1496, 2618, 27676

$a_1 = 301$, a

$$S = \frac{2 \cdot 301 + 2 \cdot 73}{2} \cdot 74 =$$

$(301 + 73) \cdot 74 = 374 \cdot 74 = 27676$

$\frac{301 + 447}{2} \cdot 74 = 374 \cdot 74$

$a = b$ $f(a^2) = 2f(a)$ $a = b = 1:$ $f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$a = 1:$ $f(b) = 0 + f(b)$ $f(2) = 1$ $f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(4) = 2f(2)$ $f(9) = 2f(3)$ 16

?

$\cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ \cancel{7}\ \cancel{8}\ \cancel{9}\ 10\ \cancel{11}\ 12\ 13\ \cancel{14}\ 15$

$f(x/y) = f(x) + f(y)$ $\cancel{16}\ \cancel{17}\ \cancel{18}\ \cancel{19}\ 20\ 21$

$f(2x) = f(2) + f(x)$ $\cancel{22}$

$f(12) = f(2) + f(6)$ $f(20) = f(2) + f(10)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(x) > 0 \quad |f(\cancel{x}y)| < |f(x)|$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)^2:$ $x^2 - 12xy + 36y^2 = (x-6)(y-1) = xy - 6y - x + 6$

$x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0$

$2x^2 + 36y^2 + 2y^2 - 13x - 10y - 13xy + 26 = 0$

$\frac{\times 26 \; 4}{104}$ 8

$x^2 + 36y^2 - 13xy - 6y - x + 6 = 0 \qquad \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$

$34y^2 - 13xy + 11x - 2y - 14 = 0$

25 1

$2x^2 + 38y^2 - 13xy - 13x - 10y + 26 = 0$

$2x^2 + 38y^2 - 13xy - 11x + 2y + 14 = 0$

$(y+1)^2 + \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \qquad x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$1 \qquad \frac{121}{4} \qquad x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$

$\cancel{36y^2}$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0 & 1 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & 2 \end{array}\right.$$

$1 - 2:$ $34y^2 - 13xy + 10y + 13x - 26 = 0$

$25y^2 + 10y + 1 \qquad 9y^2 - 13xy + 13x - 27$

$\cancel{9(9y - 13x)}$

$\cancel{34y}$

$\frac{169}{4}$ 13

$2x^2 + 38y^2 - 13xy - 11x + 2y + 14 = 0$

$(\ldots x + \ldots y)^2 + (\ldots x + \ldots)^2 + (\ldots y + \ldots)^2 = 0$

$34 = 17 \cdot 2$

13 $= \frac{1}{2} \cdot \ldots \ldots$

$+24y$

$\cancel{34y^2 - 17xy + 9xy - 8xy + 8x^2}$

$-34y$

$\cancel{(2y - x)(17y + 2x)}$

$(y - x)(y + 1) \qquad (y \quad x \quad 1)(y \quad 1)$

$(y + x - 12)(13y + 13)$

$(y + \quad)^2 + (x \quad)^2$

$+ (x \quad y)^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)