МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

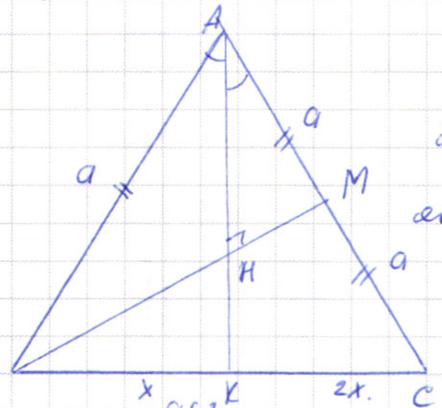
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Дискриминант ур-ия $ax^2+2bx+c=0$ равен $D=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$. По св-ву членов геометрической прогрессии $a\cdot c=b^2$ (т.к. если q - знаменатель прогрессии, то $b=aq$, $c=aq^2 \Rightarrow ac=a^2q^2=b^2$). $\Rightarrow D=4(b^2-b^2)=4\cdot 0=0$. Тогда корни ур-ия $ax^2+2bx+c=0$ совпадают и равняются $\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$. Так как корень ур-ия — четвёртый член прогрессии, то он равен aq^3.

$-b=-aq \Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{aq}{a}=-q=aq^3 \Rightarrow \frac{aq^3}{q}=-1 \Rightarrow aq^2=-1$. Но $aq^2=c$, а c — искомый третий член прогрессии $\Rightarrow c=-1$.

Ответ: -1.

№2.

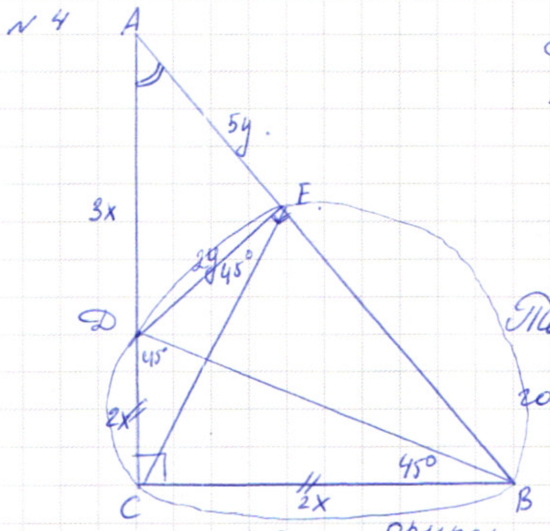


Пусть ABC — один из искомых $\triangle$-ков, его бис-са $AK \perp BM$ (BM - медиана). В $\triangle ABM$ - AK является и бис-сой и высотой $\Rightarrow \triangle ABM$ - р/б, $AB=AM$. $AM=MC$ (BM - медиана) $\Rightarrow AM=MC=AB$. По св-ву бис-сы $\triangle$-ка: $\frac{AB}{\cancel{AK}}=\frac{AC}{CK} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BK}{KC}$. Пусть $AB=a$ ($a>0$, $a\in Z$). Тогда $AC=2a$; $\frac{AB}{CA}=\frac{BK}{CK}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$. Пусть тогда $BK=x$, $x\in Z$ (если $x\notin Z$, то $3x\notin Z \Rightarrow BC\notin Z$), $CK=2x$ ($x>0$). Значит, $P_{ABC}=a+2a+3x=3a+3x=3(a+x)=1200 \Rightarrow a+x=\frac{1200}{3}=400$. По т. о неравенстве $\triangle$-ка: $a+2a>3x$, $2a+3x>a$, $a+3x>2a$. То есть $3a>3x \Rightarrow a>x$; $a+3x>0$ (очевидно, т.к. $a>0$ и $x>0$); $3x>a$. Получаем, что a и x удовлетворяют следующей системе: $\begin{cases} a+x=400 \\ a>x \\ 3x>a \end{cases}$

$a=400-x \Rightarrow$ ① $\begin{matrix} 400-x>x \\ 400>2x \end{matrix} \Rightarrow x<200$; ② $\begin{matrix} 3x>400-x \\ 4x>400 \end{matrix} \Rightarrow x>100$. Итак, $100<x<200 \Rightarrow$ есть всего 99 целых значений x удовлетворяющих условию, к каждому из них $a=400-x$. То есть существует всего 99 $\triangle$-ков периметра 1200 с целочисленными сторонами, удовлетворяющих усл-ю.

Ответ: 99.

№ 4



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг. ($\angle C = 90°$)
$D \in AC$, $AD : AC = 3 : 5$
$E \in AB$, $DE \perp AB$
$\angle CED = 45°$
а) Найти: $tg\angle BAC$.

Решение: $AD : AC = 3 : 5$. Пусть $AD = 3x$ $(x>0)$. Тогда $AC = 5x \Rightarrow DC = 5x - 3x = 2x$. В четырёхугольнике $CBED$: $\angle C + \angle E = 180° \Rightarrow CBED$ – вписанный. Тогда $\angle DEB$ и $\angle DCB$ – вписанные и равны $90° \Rightarrow$ опираются на диаметр DB. По ~~т. синусов~~ св-ву вписанных углов, опирающихся на одну дугу: $\angle DEC = \angle DBC = 45°$. Т.о., в $\triangle CDB$: $\angle C = 90°$, $\angle B = 45° \Rightarrow \angle D = 45°$ (по т.о сумме углов $\triangle$-ка) $\Rightarrow \triangle CDB$ – р/б и $CD = CB = 2x$. Значит, $tg\angle BAC = \frac{CB}{CA} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0,4$.

б) $AC = \sqrt{29}$. Найти: S_{CED}.

$tg\angle BAC = \frac{CB}{CA} = tg\angle DAE = \frac{DE}{AE}$ (т.к. $\angle DEA = 90°$) $\Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{2}{5} = \frac{DE}{AE}$.

Пусть $DE = 2y$ $(y>0)$. Тогда $AE = 5y$. По т. Пифагора из $\triangle ADE$:

$AD^2 = AE^2 + DE^2 \Leftrightarrow (3x)^2 = 4y^2 + 25y^2 = 29y^2 \Rightarrow 3x = \sqrt{29}y \Rightarrow y = \frac{3x}{\sqrt{29}}$

$AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$. То есть $DE = 2y = \frac{2\cdot 3x}{\sqrt{29}} = \frac{6x}{\sqrt{29}} = \frac{6\cdot\cancel{\sqrt{29}}}{5\cdot\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5}$.

$\angle DAE + \angle ADE = 90° \Rightarrow \sin\angle ADE = \cos\angle DAE = \frac{5y}{3x} = \frac{\cancel{15x}\,5}{\sqrt{29}\cdot\cancel{3x}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$. $\sin\angle ADE = \sin(180° - \angle ADE) = \sin\angle CDE = \frac{5}{\sqrt{29}}$ ($\angle ADE + \angle CDE = 180°$ по св-ву смежных углов). По т. синусов из $\triangle DCE$: $\frac{DC}{\sin 45°} = \frac{CE}{\sin\angle CDE} \Rightarrow CE = \frac{2x\cdot 5\cdot 2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{2}} =$

$= \frac{2\cdot\cancel{\sqrt{29}}\cdot\cancel{5}\cdot 2}{\cancel{5}\cdot\cancel{\sqrt{29}}\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Тогда $S_{CED} = \frac{1}{2}DE\cdot CE\sin 45° =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6\cdot\cancel{2\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\cdot 5\cdot\cancel{2}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1,2$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{5} = 0,4$; б) $S_{CED} = \frac{6}{5} = 1,2$.

№3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ (y-2x)^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 = 4x + 4y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ y^2 + 4x^2 = 5xy - 2x - y + 2 \\ y^2 + 2x^2 = 4x + 4y - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 5xy + 5 - 6x - 5y \\ y \geq 2x \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y(x-1) = 2x^2 + 6x - 5 \\ y \geq 2x \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$(y^2 - 4y + 4) + 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 0$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 - 3 = 0.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x^2 + 6x - 5}{5(x-1)} \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 - 3 = 0. \\ y \geq 2x \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставим значение y через x в полученное выражение:

$$\left(\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}-2\right)^2+2(x-1)^2-3=0$$

$$\left(\frac{2x^2+6x-5-10x+10}{5(x-1)}\right)^2+2(x^2+1-2x)-3=0$$

$$\frac{(2x^2-4x+5)^2}{25(x-1)^2}+2x^2+2-4x-3=0 \quad (\times 25)$$

$$\frac{4x^4+16x^2+25-16x^3+20x^2-40x}{(x-1)^2}+50x^2-100x-25=0$$

$$\frac{4x^4-16x^3+36x^2-40x+25+(50x^2-100x-25)(x^2+1-2x)}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{4x^4-16x^3+36x^2-40x+\cancel{25}+50x^4+50x^2-100x^3-100x^3-100x+200x^2-25x^2-\cancel{25}+50x}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{54x^4-216x^3+261x^2-90x}{(x-1)^2}=0$$

$$9x(6x^3-24x^2+29x-10)=0, \quad x\neq 1$$

$$9x(x-2)(6x^2-12x+5)=0, \quad x\neq 1$$

$$6x^2-12x+5=0$$

$$D=144-4\cdot 6\cdot 5=144-120=24=4\cdot 6=2^2\cdot 6$$

Заметим, что

$$\begin{array}{l|l} 6x^3-24x^2+29x-10 & x-2 \\ \underline{6x^3-12x^2} & 6x^2-12x+5 \\ \quad -12x^2+29x-10 & \\ \quad \underline{-12x^2+24x} & \\ \qquad 5x-10 & \\ \qquad \underline{5x-10} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Значит, $(x=2)$ — корень ур-ия.

$$x_1=\frac{12+2\sqrt6}{12}=\frac{6+\sqrt6}{6}$$

$$x_2=\frac{12-2\sqrt6}{12}=\frac{6-\sqrt6}{6}$$

Тогда
$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=\frac{6+\sqrt6}{6} \\ x=\frac{6-\sqrt6}{6} \\ x\neq 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \\ y=\cancel{6+3\sqrt6}\ \frac{2\sqrt6}{3}+2 \\ y=\frac{2}{3}\sqrt6-2 \end{array}\right.$$

$$y=\frac{2\left(\frac{6+\sqrt6}{6}\right)^2+6\left(\frac{6+\sqrt6}{6}\right)-5}{5\left(\frac{6+\sqrt6}{6}\right)-5}=\frac{2\cdot\frac{6+36+12\sqrt6}{36}+6+\sqrt6-5}{\frac56(6+\sqrt6)-5}=$$

$$=\frac{\frac{42+12\sqrt6}{18}+\sqrt6+1}{5+\frac{5\sqrt6}{6}-5}=\frac{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt6+\sqrt6+1}{\frac{5\sqrt6}{6}}=$$

$$=\frac{(10+5\sqrt6)6}{3\cdot5\sqrt6}=\frac{(2+\sqrt6)2}{\sqrt6}=\sqrt6(2+\sqrt6)\cdot\frac{2}{6}=\ldots=\frac{2\sqrt6(2+\sqrt6)}{6}=\frac{2\sqrt6+6}{3}=\frac{2\sqrt6}{3}+2$$

$$y=\frac{2\left(\frac{6-\sqrt6}{6}\right)^2+6\left(\frac{6-\sqrt6}{6}\right)-5}{5\left(\frac{6-\sqrt6}{6}\right)-5}=$$

$$=\frac{\frac{1}{18}(42-12\sqrt6)+6-\sqrt6-5}{\cancel{5}-\frac{5\sqrt6}{6}-\cancel{5}}=\frac{6\left(\frac{14}{6}-\frac{4\sqrt6}{6}+1-\sqrt6\right)}{5\sqrt6}=\frac{20-10\sqrt6}{5\sqrt6}=$$

$$=\frac{4-2\sqrt6}{\sqrt6}=\frac{2(2\sqrt6-6)}{6}=\frac{4\sqrt6-12}{6}=\frac23\sqrt6-2$$

Проверим корни на соответствие нер-ву.

$y\geq 2x$: $1\geq 0$

~~3≥4~~ $\Rightarrow x=2$ не подходит.

$$y-2x=\frac{2\sqrt6+6}{3}-\frac{12+2\sqrt6}{6}=\frac{4\sqrt6+\cancel{12}-\cancel{12}+2\sqrt6}{6}=\ldots \text{ и } \frac{2\sqrt6}{6}\geq 0.$$

$$y-2x=\frac{2\sqrt6-6}{3}-\frac{12-2\sqrt6}{6}=\frac{4\sqrt6-12-12+2\sqrt6}{6}=\frac{6\sqrt6-24}{6}=$$

$=\sqrt6-4=\sqrt6-\sqrt{16}<0 \Rightarrow$ не подх.

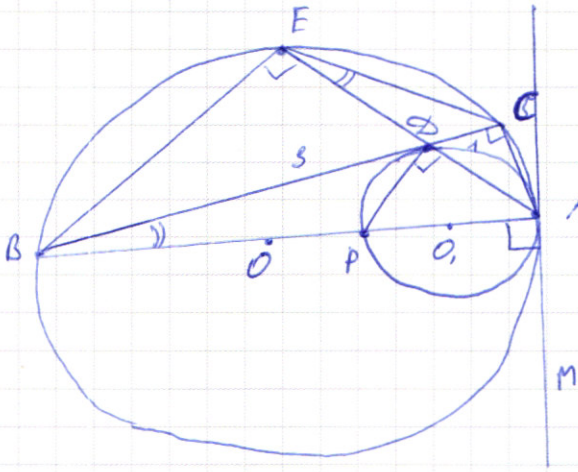
Ответ: $(0;1)$; $\left(\frac{6+\sqrt6}{6};\frac{2\sqrt6}{3}+2\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№5



Проведём через A общую касательную Ω и ω AM.

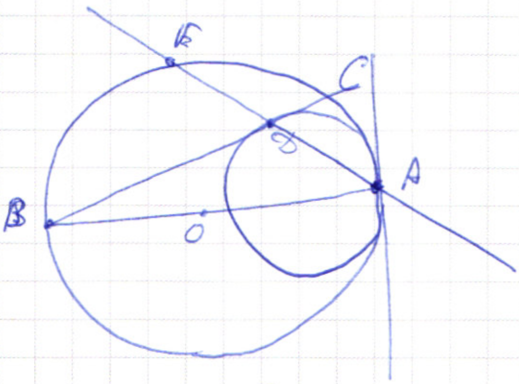
AB – диаметр $\Rightarrow \smile BA = 180^\circ$.

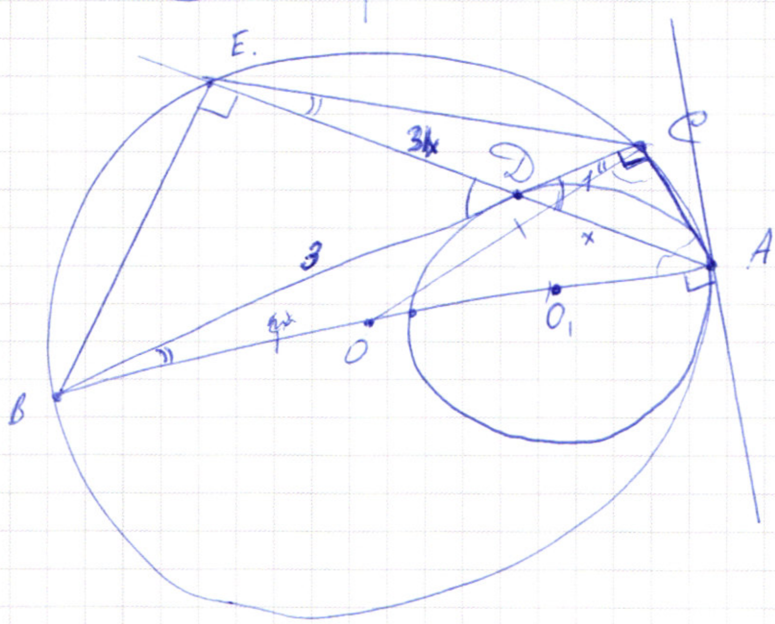
Угол между хордой AB и касательной $AM = 90^\circ$.

Тогда по т. об угле между хордой и касательной в ω: $\smile PA = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow PA$ – диаметр ω.

По св-ву вписанных углов, опирающихся на диаметр $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$. Пусть O – центр Ω, O_1 – центр ω. По св-ву отрезков хорд: $ED \cdot AD = BD \cdot CD = 3 \Rightarrow$ $\cancel{\frac{ED}{AD}} = ED = \frac{3}{AD}$. По св-ву вписанного угла, опирающегося на диаметр $\angle PDA = 90^\circ$. $\angle CEA = \angle CBA$ (вписанные углы, опир. на $\smile CA$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{3}{x} = \frac{?}{1}$

$? = \frac{3}{x}$

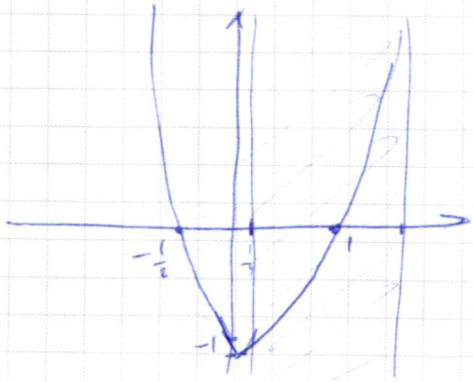
$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$x_B = \frac{1}{4}$ $\quad y_B = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-2-8}{8} = \frac{-9}{8}$

D $\quad$ Cox: $y =$ $\quad$ $D = 1 + 8 = 9$

Coy: $x = 0$ $y \ldots$ $\quad x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$

$x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

0 ; 1

$1 = -1+2 = 1$ ✓ $\quad 1+3-4=0.$

$xy-2x-y+2 \geq 0$

$0-0-1+2 \geq 0.$

3 ; 2

$9+18-24 = 6-4-3+2$

$1 = 3-2\cdot 1 \quad 6-6-2+2=0.$

$1 = 8-7 = 1$ ✓

$1 = 3-2 = 1.$

$\frac{3+\sqrt6}{3}$ и $\frac{13\sqrt6+60}{30} = \frac{13+10\sqrt6}{5\sqrt6}$

$\frac{(3+\sqrt6)(13+10\sqrt6)}{15\sqrt6} - \frac{6+2\sqrt6}{3} - \frac{13+10\sqrt6}{5\sqrt6}+2$

$\left(\frac{13+10\sqrt6-10\sqrt6}{5\sqrt6}\right)^2 = 3-2\left(\frac{3+\sqrt6-3}{3}\right)^2$

$\frac{169}{25\cdot 6} = 3-2\cdot\frac{6}{9}$

$\frac{169}{150} = 3-\frac{12}{9} = \frac{27-12}{9} = \frac{15}{9}$

$\left(\frac{3+\sqrt6}{3}\right)^2 = \frac{9+6+6\sqrt6}{9} = \frac{15+6\sqrt6}{9} = \frac{5+2\sqrt6}{3}$

$\frac{10+4\sqrt6}{3} + \frac{169+600+260\sqrt6}{25\cdot 6} =$

$= \frac{10+4\sqrt6}{3} + \frac{769+260\sqrt6}{150} + 3 - \frac{12+4\sqrt6}{3} - \frac{52+40\sqrt6}{5\sqrt6} =$

$= \frac{10+4\sqrt6-12-4\sqrt6}{3} + 3 + \frac{769+260\sqrt6}{150} - \frac{52}{5\sqrt6} - \frac{40\sqrt6}{5\sqrt6} =$

$= -\frac{2}{3}+3-8-\frac{52}{5\sqrt6}+\frac{769+260\sqrt6}{150} =$

$= -5\frac{2}{3} + \frac{-52\cdot5\sqrt6+763+260\sqrt6}{(5\sqrt6)^2} =$

$= -5\frac{2}{3} + \frac{763}{(5\sqrt6)^2} = -5\frac{2}{3}+\frac{763}{150} = -\frac{17}{3}+\frac{763}{150} =$

$= \frac{-850+763}{150}$

$99+43\sqrt6$

$\frac{39+30\sqrt6+13\sqrt6+60}{15\sqrt6} - \frac{6+2\sqrt6}{3} -$

$- \frac{13+10\sqrt6}{5\sqrt6}+2 = \frac{99+43\sqrt6-5\sqrt6(6+2\sqrt6)-3(13+10\sqrt6)+30\sqrt6}{15\sqrt6}$

$= \frac{99+43\sqrt6-30\sqrt6-60-39-30\sqrt6+30\sqrt6}{15\sqrt6} =$

$= \frac{13\sqrt6}{15\sqrt6}$

$y-2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$\frac{6+2\sqrt6}{3} - \frac{13+10\sqrt6}{5\sqrt6} = \frac{5\sqrt6(6+2\sqrt6)-(13+10\sqrt6)}{15\sqrt6} = \frac{30\sqrt6+60-39-30\sqrt6}{15\sqrt6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2y^2+4x^2=\cancel{8}x+\cancel{8}y-\cancel{6}$

$36+50+200-\cancel{25}=$

$=\cancel{236}+\cancel{25}=261$

$y^2+4x^2=5xy-2x-y+2$

$y^2=10x+9y-8-5xy$

$-40-100+50=-40+50=$

$y^2-9y+8=5x(2-y)$

$\cancel{5}x=\frac{y^2-9y+8}{5(2-y)}$ $y=\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}$

$225 \times 16 \quad 267$

$\cancel{y}$ $D=81-32$

$81-32=49$

$y_1=\frac{9+7}{2}=\frac{16}{2}=8$

$y_2=\frac{9-7}{2}=\frac{2}{2}=1$

$216 \,|\, 9$: -18, 36, -36 (?), 6; 24

$261 \,|\, 9$: $-\cancel{18}$, 81; $\cancel{35}$

$\frac{(y-1)(y-8)}{5(2-y)}$

$y-1=\frac{2x^2+6x-5-5(x-1)}{5(x-1)}=\frac{2x^2+6x\cancel{-5}-5x\cancel{+5}}{5x-5}=\frac{2x^2+x}{5x-5}$

$y-8=\frac{2x^2+6x-5-8(5x-5)}{5x-5}=\frac{2x^2+6x-5-40x+40}{5x-5}=$

$=\frac{2x^2-34x+35}{5x-5}$

$2-y=2-\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}=\frac{10x-10-2x^2-6x+5}{5x-5}=\frac{-2x^2+4x-5}{5x-5}$

$\cancel{x}=\frac{(2x^2+x)(2x^2-34x+35)\cancel{5(x-1)}}{\cancel{5(x-1)}5(x-1)5(-2x^2+4x-5)}=\frac{x(2x+1)(2x^2-34x+35)}{25(x-1)(-2x^2+4x-5)}=$

$=\frac{x(2x+1)(2x^2-34x+35)-\cancel{25}x(x-1)(-2x^2+4x-5)}{}$

$(6x^2-12x+5)(x-2)=$

$6x^2-12x+5=0$

$=6x^3-\cancel{12}x^2-12x^2+24x+5x-10=$

$D=144-120=24$

$=6x^3-24x^2+29x-10$.

$x_1=\frac{12+2\sqrt6}{12}=\frac{6+\sqrt6}{6}$

$x_2=\frac{6-}{}$

$2\sqrt{12}$ $\frac{24}{120}$ $24-20=24$

$\frac{\frac{7}{3}-\frac{2\sqrt6}{3}+1-\sqrt6}{\frac{5\sqrt6}{6}}=$

$=\frac{\frac{10}{3}-\frac{5\sqrt6}{3}}{\frac{5\sqrt6}{6}}=\frac{(10-5\sqrt6)2}{5\sqrt6}=$

$42 \,|\, 3$, -3, 12, 14

$\frac{(2\sqrt6-6)2}{3}=$

$=\frac{(2-\sqrt6)2}{\sqrt6}=\frac{(2-\sqrt6)\sqrt6\, 2}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b и c $\quad ax^2+2bx+c=0$ $\quad \underline{c - ?}$

$1 \; 2 \; 3 \qquad 4$

$ac = \cancel{b}\, a \cdot aq^2 = b^2.$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$

$a_1 = a \quad a_3 = c = aq^2 = bq$

$x_{1,2} = \dfrac{-2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

$a_2 = b = aq \qquad D = b^2 - 4ac$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$a_4 = \dfrac{-2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = cq = aq^3$

$\dfrac{-2aq \pm 2\sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}}{2a} = aq^3$

$y - 2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$\dfrac{-2aq}{2a} = -q = aq^3$

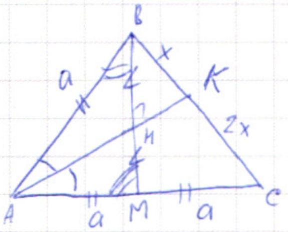
$-1 = aq^2 = c.$

Ответ: -1.

№2. кол-во о-ков $\quad P = 1200.$ с $\underline{Z}$. одна из бис-с $\perp$ ме

$P = 1200 = a + b + c.$ $\quad$ от 101 $\quad$ от 1 до 10

до 199.



$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CK}{BK} = \dfrac{2a}{a} = \dfrac{2}{1}$

$199 - 101 + 1$

$= 199 - 100 =$

$= 99.$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

10.

$10 - 1 + 1 = 10$

$P = 3a + 3x = 3(a+x) = 1200$

$a + x = \dfrac{1200}{3} = \underline{400}$

$3a > 3x \qquad a > x \qquad a > x$, но $3x > a$

$2a + 3x > a$

$a + 3x > 2a \qquad 3x > a \qquad$ x от 1 до 199 но

$3x > a \qquad 3x > 400 - x \qquad$ от 101 до 199

$a + x = 400 \qquad 4x > 400$

$a = 400 - x \qquad x > \underline{100}$ $\qquad$ Ответ: 99

№3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

② $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0.$

$(y^2 - 4y + 4) + 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 0.$

① $y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 - 3 = 0.$

$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

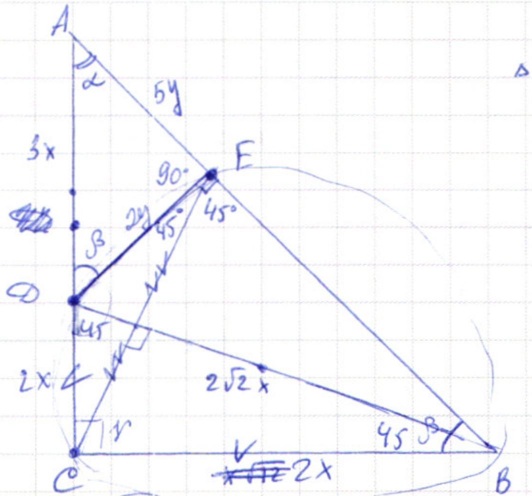
$(y-2)^2 = 3 - 2(x-1)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\triangle AED \sim \triangle ACB$:

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $\quad \frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x} = \frac{DE}{CB}$

$15x^2 = AB \cdot AE$.

$tg\angle\alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{CB}{5x} = \frac{DE}{AE}$

$45 + \cancel{180 - \beta} + 90 - \gamma = \beta + 45 + \gamma = 180$

Около CED ω опис, она же опис CBED.

$45 + 90° - \gamma - \beta = 0$

$\gamma + \beta = 135$

$\frac{2x \cdot x}{\sqrt{2}} = 2R$

$R = \frac{2x}{\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$.

$-2\beta + 2\gamma + 180 + 90 = 0$.

$DB = 2R = 2\sqrt{2}x$

$CB^2 = -4x^2 + 8x^2 = 4x^2$

$\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

a) $tg = \frac{CB}{5x} = \frac{\sqrt{12}}{5x} = \frac{\sqrt{12}}{15}$ Ответ: $\frac{2}{5}$.

б). $AC = \sqrt{29}$. $\quad S_{CED}$.

$\sqrt{29} = 5x$

$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$tg\angle\alpha = \frac{2}{5} = \frac{DE}{AE}$

$4y^2 + 25y^2 = 29y^2 = 9x^2$

$\sqrt{29}y = 3x$

$\sqrt{29}y = \frac{3\sqrt{29}}{5}$

$y = \frac{3}{5}$.

$DE = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$DC = 2x = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

$\cos\angle = \frac{3}{\frac{3\sqrt{29}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$

$\sin\beta = \frac{3}{\frac{3\sqrt{29}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$ctg\beta = tg\alpha = \frac{2}{5}$

$ctg(180° - \beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$1 + ctg^2 = \frac{1}{\sin^2}$

$1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\sin^2\beta}$

$\frac{29}{25} = \frac{1}{\sin^2\beta}$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{6}{5}$

$\frac{\sqrt{29}CE}{5} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}$

$CE = 2\sqrt{2}$.

$S = \frac{2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{29} \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{29}}$ $\quad \sin^2\beta = \frac{25}{29} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$ Ответ: $\frac{6}{5}$.

$= \frac{6}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$ $\qquad y^2+4x^2=2-2x-y+5xy$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0.$ $\qquad y^2+2x^2=4x+4y-3$

$2x^2=2-2x-y+5xy-4x-4y+3$

$2x^2=5+5xy-6x-5y$

$2x^2+6x=5+5y(x-1)$

$y=\dfrac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}$

$2x^2+6x-5=0$

$D=36+40=76$

$2x^2-4x+5=0$

$D=16-40.$

$(y-2)^2=3-2(x-1)^2$

$\left(\dfrac{2x^2+6x-5-10(x-1)}{5(x-1)}\right)^2=3-2(x-1)^2$

$\left(\dfrac{2x^2+6x-5-10x+10}{5(x-1)}\right)^2=\text{—}\cdot\text{—}$

$\left(\dfrac{2x^2-4x+5}{5(x-1)}\right)^2=3-2(x-1)^2$

$\dfrac{(2x^2-4x+5)^2}{25(x-1)^2}-3+2(x-1)^2=0.$

$\dfrac{4x^4+16x^2+25-16x^3+20x^2-40x-75(x-1)^2+50(x-1)^4}{25(x-1)^2}=0.$

$x\neq1$

$\dfrac{4x^4-16x^3+36x^2-40x+25-75(x-1)^2+50(x-1)^4}{25(x-1)^2}=0.$

250 | 4
-24 | 62
10
-8
2

$62\cdot4+2$

$25(2x^2-4x-1)$

$50x^2-100x-25$

$\frac{-4-\sqrt6}{2}=\frac{-4-\sqrt{6}}{...}$ ... $\frac{4\sqrt6-12}{2}$ ... $\frac{12-2\sqrt6}{2}$ ... $y-2x=$

$4(x-1)^2(x^2-2x+4)+9\cancel{\ldots}-75(x-1)^2+50(x-1)^4=$

$=(x-1)^2(4x^2-8x+16-75+50(x-1)^2)+9=$

$=(x-1)^2(4x^2-8x+16-75+50x^2+50-100x)+9$

$(x-1)^2(54x^2-108x+9)+9=0.$

$9(x-1)^2(6x^2-12x+1)+9=0.$

$9((x-1)^2(6x^2-12x-1)+1)=0.$

$4x^4-16x^3+\overset{36x^2}{\cancel{20x^2}}+\cancel{16x^2}-40x+25\ \big|\ x^2-2x+1$

$\cancel{4x^2(x^2-4x+5)+(4x^2-5)^2}$ $\qquad 4x^2-8x+16$

$-\ 4x^4-8x^3+4x^2$

$-8x^3+32x^2-40x+25$

$-\ -8x^3+16x^2-8x$

$16x^2-32x+25$

$-\ 16x^2-32x+16$

9

$-75+50\ -\ -25\cdot16$

$4(x^2-2x+4)$

$4(x-2)^2=$

$=4(x^2$

$(2x-4)^2.$

$=4x^2+16-16x$

$-16-200$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{2}(x-1)^2(6x^2-12x-1)+1=0.$

$(x^2-2x+1)(6x^2-12x-1)+1=0.$

$6x^4-12x^3-x^2-12x^3+24x^2+2x+6x^2-12x-\cancel{1}+\cancel{1}=0.$

$6x^4-24x^3+29x^2-10x=0.$

$x(6x^3-24x^2+29x-10)=0.$

$x(6x^2-12x+2)(x-2)=0.$

$2x(3x^2-6x+1)(x-2)=0$

$\delta=36-12=24.=4\cdot6=(2\sqrt6)^2$

$x_1=\frac{6+2\sqrt6}{6}=\frac{3+\sqrt6}{3}$

$x_2=\frac{6-2\sqrt6}{6}=\frac{3-\sqrt6}{3}$

$\cancel{16-24+29}$

$6-24+29-10=$

$=6+29-24=$

$=35-0$

$x=0$

$$\begin{array}{l|l} 6x^3-24x^2+29x-10 & x-2 \\ \hline -\ 6x^3-12x^2 & 6x^2-12x+2 \\ \quad -12x^2+29x-10 & \\ \quad -\ -12x^2+24x & \\ \qquad 5x-10 & \\ \qquad -\ 5x-10 & \\ \qquad\quad 0. & \end{array}$$

$x\neq1$

$y=\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}=\frac{2x^2+6x-5}{5x-5}$

$y=\frac{8+12-5}{5\cdot1}=$

$=\frac{12+3}{5}=\frac{15}{5}=3.$

1) $y_1=\frac{-5}{5\cdot-1}=\frac{-5}{-5}=1$ $\quad x=0.$

2) $y=\frac{2\cdot4+6\cdot2-5}{10-5}=$ $\quad x=2.$

$=\frac{8+12-5}{10-5}=\frac{20-5}{10-5}=\frac{15}{5}=3$

$15+6\sqrt6$

3) $y=\frac{2\cdot\left(\frac{3+\sqrt6}{3}\right)^2+6\left(\frac{3+\sqrt6}{3}\right)-5}{5\left(\frac{3+\sqrt6}{3}\right)-5}=\frac{\frac{2}{9}(9+6+6\sqrt6)+2(3+\sqrt6)-5}{\frac{5}{3}(3+\sqrt6)-5}=$

$=\frac{\frac{2\cdot15}{9_3}+\frac{2\cdot6\sqrt6}{9\,3}+6+2\sqrt6-5}{5+\frac{5\sqrt6}{3}-5}=\frac{\frac{10}{3}+\frac{4\sqrt6}{3}+1+6\sqrt6/3}{\frac{5\sqrt6}{3}}=\frac{\frac{13}{3}+\frac{10\sqrt6}{3}}{\frac{5\sqrt6}{3}}.$

$=\frac{13+10\sqrt6}{5\sqrt6}=\frac{13\sqrt6+60}{30}$ $\quad x=\frac{3+\sqrt6}{3}$

4) $y=\frac{2\left(\frac{3-\sqrt6}{3}\right)^2+6\left(\frac{3-\sqrt6}{3}\right)-5}{5\left(\frac{3-\sqrt6}{3}\right)-5}=\frac{\frac{2}{9}(15-6\sqrt6)+2(3-\sqrt6)-5}{\frac{5}{3}(3-\sqrt6)-5}=$

$=\frac{\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt6}{3}+6-5-6\sqrt6/3}{\cancel{5-\frac{5\sqrt6}{3}-5}}=\frac{\frac{10}{3}+1-\frac{10\sqrt6}{3}}{-\frac{5\sqrt6}{3}}=\frac{\frac{10\sqrt6}{3}-\frac{13}{3}}{\frac{5\sqrt6}{3}}.$

$=\frac{10\sqrt6-13}{5\sqrt6}=\frac{60-13\sqrt6}{30}=2-\frac{13}{5\sqrt6}=2-\frac{13\sqrt6}{30}.$

$x=\frac{3-\sqrt6}{3}=\frac{3}{3}-\frac{\sqrt6}{3}=1-\frac{\sqrt6}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)