МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

По свойству геом. прогрессии $b^2 = ac$.
Найдем четвертый член прогрессии:

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0 \quad (\text{т.к. } b^2 = ac)$$

$$x = \frac{b}{a}.$$

Опять по свойству геом. прогрессии $c^2 = b \cdot \frac{b}{a}$.
Отсюда $c^2 = \frac{b^2}{a} = \frac{ac}{a} = c$; Уравнение $c^2 - c = 0$ имеет корни $c = 0$ и $c = 1$, первый из которых не удовлетворяет условию геом. прогр.

Ответ: $c = 1$.

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

Сделаем замену $a = x - 6$; $b = y - 1$. Заметим, что $x - 6y = a - 6b$. Тогда имеем систему:

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$. Возводя первое ур-ние в квадрат, учитывая, что $a - 6b \geq 0$ имеем:

черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \\ a - 6b \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 & (1) \\ a^2 + 2b^2 = 18 & (2) \\ a - 6b \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Расcмотрим ур-ние (1). Заметим, что если $b=0$, то $a^2=0 \Leftrightarrow a=0$, однако $(a,b)=(0,0)$ решением системы не является. Если $b \neq 0$, то можно поделить (1) на b^2. Имеем:

$$\frac{a^2}{b^2} - 13\frac{a}{b} + 36 = 0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0.$$

Решаем как квадратное отн. $\frac{a}{b}$. По т-ме Виетта находим

$$\left[\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 9 \\ \frac{a}{b} &= 4 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{aligned} a &= 9b \\ a &= 4b \end{aligned}\right.$$

Если $a = 9b$, имеем: $\begin{cases} (9b)^2 + 2b^2 = 18 \\ 9b - 6b \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 83b^2 = 18 \\ 3b \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{18}{83} \\ b \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow b = \cancel{\sqrt{\frac{18}{83}}} = \sqrt{\frac{18}{83}}$$

Если $a = 4b$, имеем:

$$\begin{cases} (4b)^2 + 2b^2 = 18 \\ 4b - 6b \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 18b^2 = 18 \\ b \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow b = -1$$

Итого имеем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$; Делаем обр. замену.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

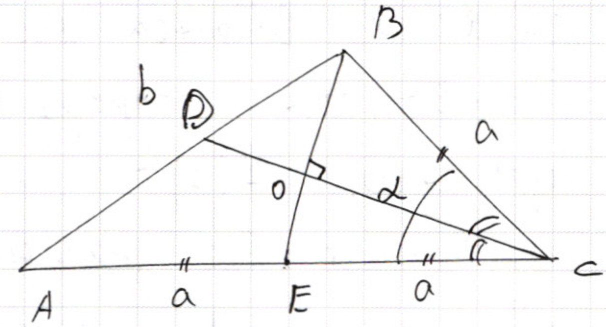
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-6 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1 = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-6 = -4 \\ y-\cancel{6} = -1 \end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 6+9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y = 1+\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(x,y) \in \left\{ \left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}}, 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right), (2, 0) \right\}$

№2.



Заметим, что если одна из биссектрис перп. одной из медиан, то одна из сторон треугольника в два раза больше другой. Действительно, ведь в $\triangle CEB$ CO – биссс. и высота, т.е. он равноб. И обратно: если $CE = CB$, то CO – бисс. в равноб. треугольнике, а значит высота. Значит нам нужно найти кол-во треуг. с периметром 900, с целочисл. сторонами, у которых одна из сторон в два раза больше другой. Из нер-ва треугольника вытекают след. соотношения:

$$b \cancel{<} 3a \quad \text{и} \quad 2a < a+b.$$

Также, т.к. периметр равен 900: $b + 3a = 900$.
Из этих соотнош. следует что

$$900 - 3a < 3a \iff a > 150.$$

$$900 = 3a + b > 4a \iff a < 225.$$

Учитывая, что $a \in \mathbb{N}$, то a может принимать 74 значения (151, 152, ..., 223, 224). Далее, из теоремы косинусов:

$$b^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a\cos\alpha$$
$$= 5a^2 - 4a^2\cos\alpha$$
$$= a^2(5 - 4\cos\alpha).$$

Отсюда видно, что $b \in \mathbb{Z}$, только если $5 - 4\cos\alpha$ является квадратом целого числа. Функция $f(x) = 5 - 4\cos\alpha$ непрерывна на отрезке $[0;\pi]$ и при этом $f(0) = 1$ и $f(\pi) = 9$, а значит она при $x \in [0;\pi]$ принимает все значения из $[1;9]$. Из них квадратами явл. только 1, 4, 9, однако 1 и 9 достигаются при вырожденых треугольниках. Отсюда следует, что для каждого a сущ. ровно один α, такой, что $b \in \mathbb{Z}$. Так как существует 74 значения a, то существует 74 таких треуг. Заметим также, что других треуг. не существует, ведь по признаку равенства треуг. такой треуг. был бы равен уже посчитанному.

Ответ: 74.

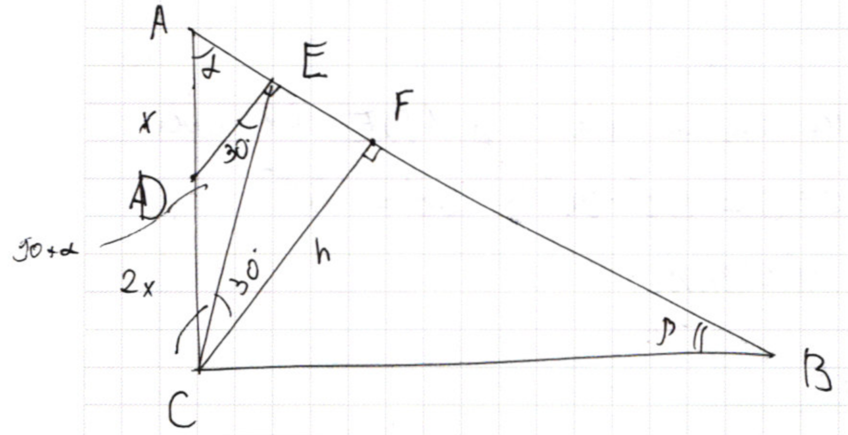
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{h}{AE} = \frac{h}{F}$

$180-90-\alpha-30 = 90-30-\alpha = 60-\alpha$

$\frac{h}{AF} = \frac{FB}{h}$ $h^2 = AF \cdot FB$

$AF = 2x\cos\alpha$

$\cancel{BE} =$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{DE = x\sin\alpha}$ $h = 3x\sin\alpha$

$DC = 2x$

$\angle CDE = 90+\alpha$ $\frac{DC}{\sin 30°} = \frac{DE}{\sin(60-\alpha)}$

$\frac{2\cancel{x}}{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{x}\sin\alpha}{\sin(60°-\alpha)}$; $\sin\alpha = 4\sin(60°-\alpha)$

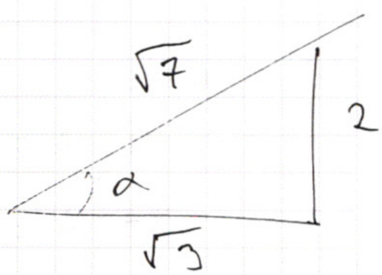
$\sin(60°-\alpha) = \sin 60°\cos\alpha - \cos 60°\sin\alpha$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4 \cdot \frac{\sin 60°\cos\alpha - \cos 60°\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}$ $\tan\alpha$

$\tan\alpha = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\tan\alpha\right)$

$\tan\alpha = 2\sqrt{3} - 2\tan\alpha$; $3\tan\alpha = 2\sqrt{3}$ $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$



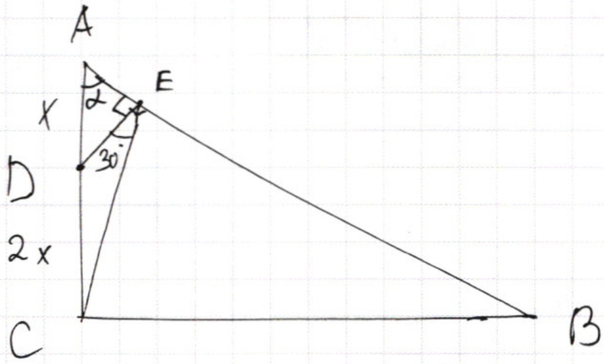
$9+4\cdot 3 = 9+12 = \sqrt{21}$

$\frac{2\sqrt{3}}{21} = \frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{7\cdot\sqrt{3}\cancel{\sqrt{3}}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№4. (а)



а) Пусть $AD = x$, $CD = 2x$,
$\angle BAC = \alpha$.
Тогда $DE = x\sin\alpha$,

$\angle CDE = 90^\circ + \alpha$ как внешний для $\triangle ADE$. Отсюда
$\angle DCE = 180^\circ - \angle CDE - \angle CED = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - 30^\circ = 60^\circ - \alpha$.
По теореме синусов имеем:

$$\frac{DC}{\sin\angle CED} = \frac{DE}{\sin\angle DCE}$$

$$\frac{2\cancel{x}}{\sin 30^\circ} = \frac{\cancel{x}\sin\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

$$\sin\alpha = 4\sin(60^\circ - \alpha)$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4\cdot\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos\alpha}$$

$$= 4\cdot\frac{\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= 4\left(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ \operatorname{tg}\alpha\right)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3} - 2\operatorname{tg}\alpha$$

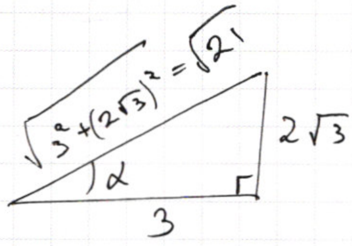
$$3\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ на пункт (а): $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (5).

Зная, что $tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ построим прямоуг. треуг. с катетами $2\sqrt{3}$ и 3 и найдем $\sin\alpha$ по т-ме пифагора:



$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Далее, т.к. $AC = \sqrt{7}$, то $x = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Отсюда

$$DE = x\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3},$$ и

$$CD = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Также найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{7}} =$

$= \cancel{\sqrt{\frac{3}{7}}}\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ($\cos\alpha > 0$ т.к. $\alpha < 90^\circ$).

Теперь площадь треугольника CED можно посчитать через DE, DC и $\sin(90^\circ+\alpha)$:

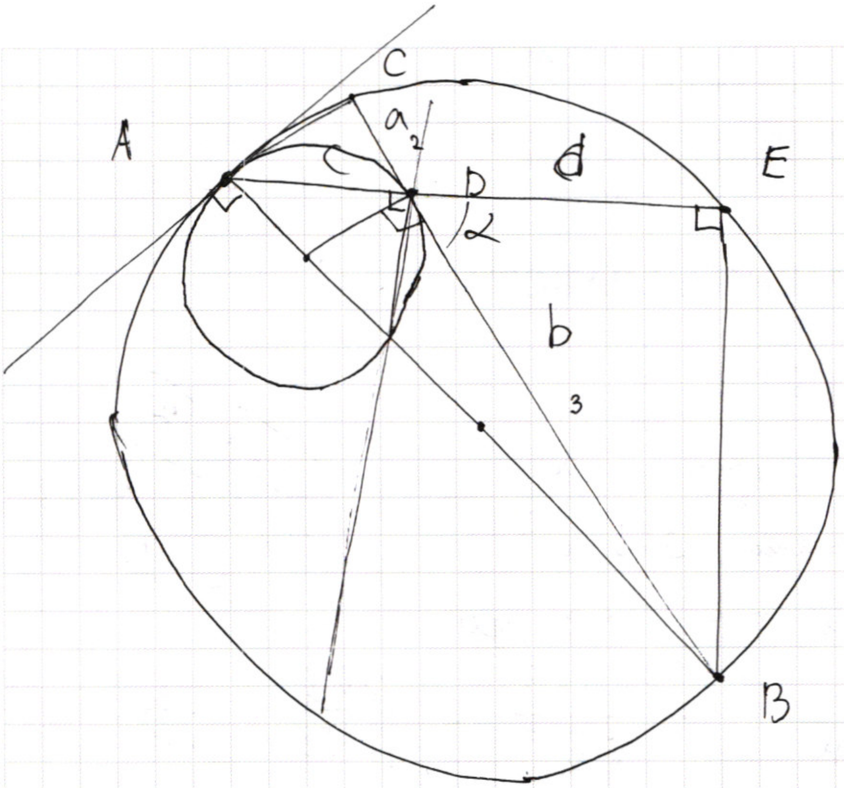
$$S = \frac{1}{2}DE\cdot CD\cdot\sin\angle CDE$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\sin(90^\circ+\alpha)$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{9}\cdot(\sin 90^\circ\cos\alpha + \cos 90^\circ\sin\alpha)$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{9}\cos\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$



$CD = 2$

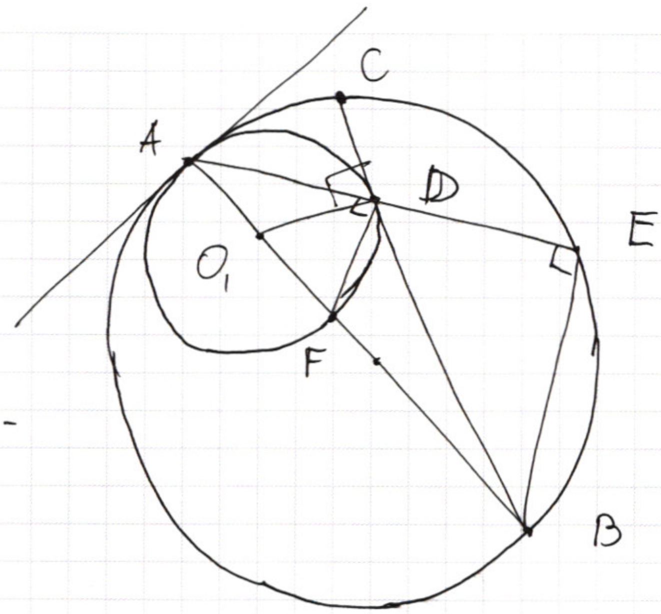
$BD = 3$

$\cancel{\sin\alpha = b}$

$\cos\alpha = \frac{b}{d}$

$\cos\alpha = \frac{c}{a}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5.

Так как линия центров и точка касания лежат на одной прямой, то AB также проходит через центр. окр ω, а значит AF — ее диаметр.

Далее заметим, что $\angle ADF = \angle AEB = 90^\circ$, т.к. они вписанные, опир. на диаметр.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

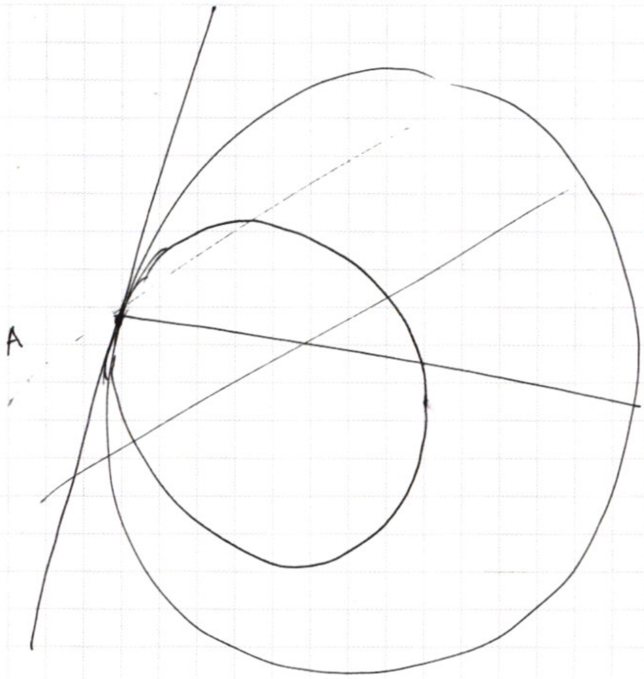
ШИФР

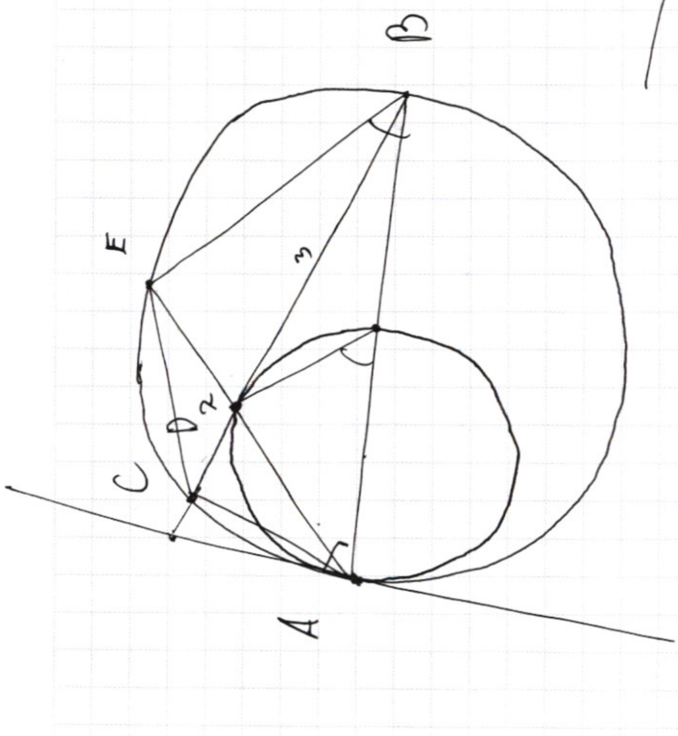
(заполняется секретарём)

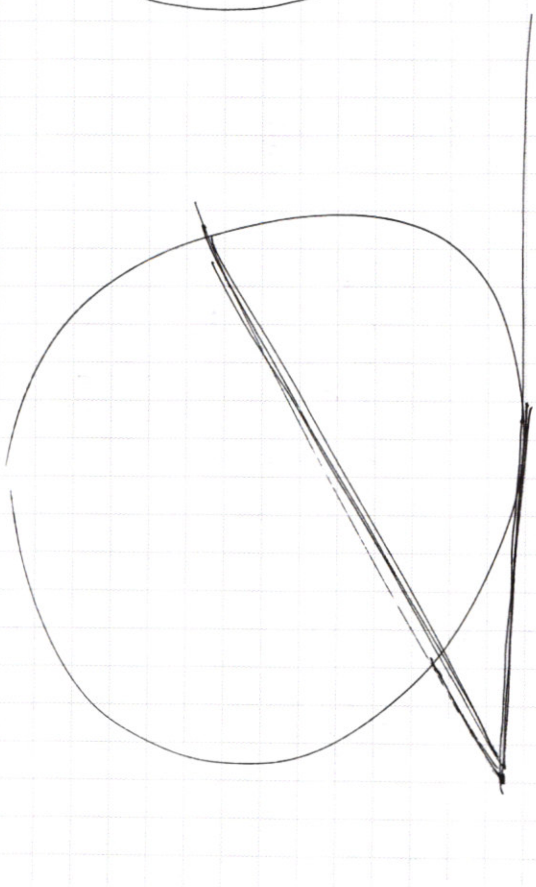
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CD=2$
$BD=3$

AC^2
AD







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Если $x \le \frac{1}{2}$, то $8x - 6|2x-1| = 8x + 12x - 6 = \boxed{20x-6}$

$x = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Если $x \geq \frac{1}{2}$, то $8x - 12x + 6 = \boxed{-4x+6}$

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$y = -8x^2 + 6x + 7; \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-16} = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}} \leftarrow x_0$

$y(x_0) = -8 \cdot \frac{3^2}{8^2} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8}$

$8x^2 - 6x - 7 = 0$

$D_1 = 9 + 8 \cdot 7 = 56 + 9 = 65$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{8}$

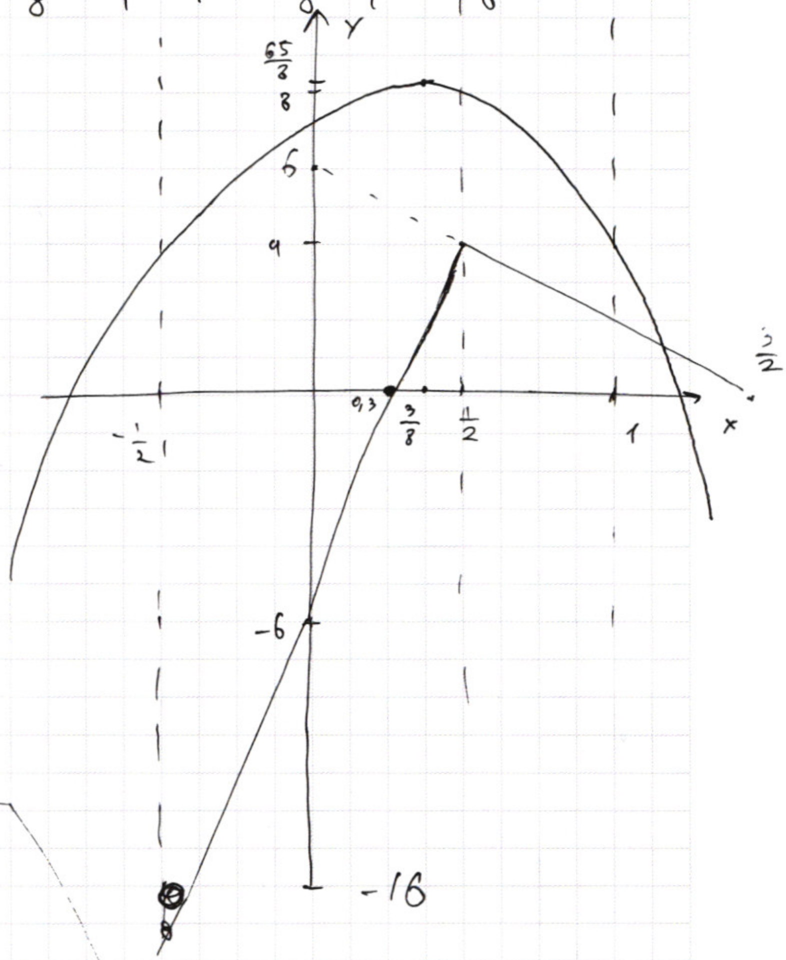
$8 < \sqrt{65} < 9$

$\frac{11}{8} < \frac{3+\sqrt{65}}{8} < \frac{3}{2}$

$-9 < -\sqrt{65} < -8$

$-6 < 3 - \sqrt{65} < -5$

$-\frac{3}{4} < \frac{3-\sqrt{65}}{8} < -\frac{5}{8}$



$3a + b = 900$

$a, b > 0$

$b < 3a$

$\Rightarrow \boxed{a = 300}$

$\boxed{a > 150}$

$2a < a + b$

$\boxed{a < b}$

$\begin{array}{r} 224 \\ -151 \\ \hline 73 \\ +1 \\ \hline 74 \end{array}$

$n(a) = 148$

$\frac{900}{4} = \frac{450}{2} =$

$\frac{45 \cdot 10}{2} = 45 \cdot 5$

$= 200 + 25$

$= 225$

$b^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos\alpha = a^2(5 - 4\cos\alpha)$

$1 \le 5 - 4\cos\alpha \le 9$

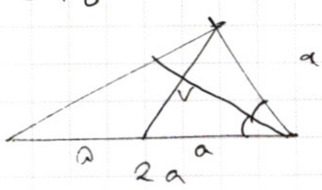
2 3 4 5 6 7 8

$\begin{array}{r} 225 \\ -150 \\ \hline 75 \end{array}$

$148 \cdot 7 =$

$900 = 3a + b > 4a$

$a < \frac{900}{4} = \frac{450}{2} =$

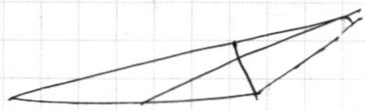


☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1)\\ a^2+2b^2=18 & (2)\end{cases}$$



$\cancel{(2)\quad a^2-9+2b^2-9=0}$

$(a-3)(a+3)+(\sqrt{2}b-3)(\sqrt{2}b+3)=0$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a-6b\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow a^2-13ab+36b^2=0$$

$x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$y-1=\sqrt{\frac{18}{83}}$

$2=\sqrt{-2+6}$ V

$4-12\cdot 2+20$

$=4+20-24=24-24=0$

$$\begin{cases} b<3a \\ 3a+b=900.\end{cases} \quad a,b\in\mathbb{Z}$$

$\Downarrow$

$900-3a<3a$

$6a>900$

$a>\frac{900}{6}=\frac{450}{3}=150$

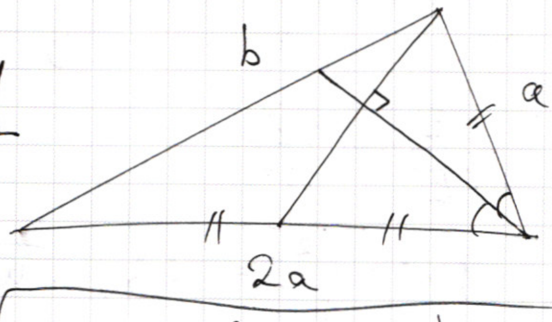
$3a<900 \quad a<300$

$2a<b+a$

$\boxed{b>a}$

$a<b+2a$

$-b+a<a$



$a\in(150;300)$

$-a\in(-300;-150)$

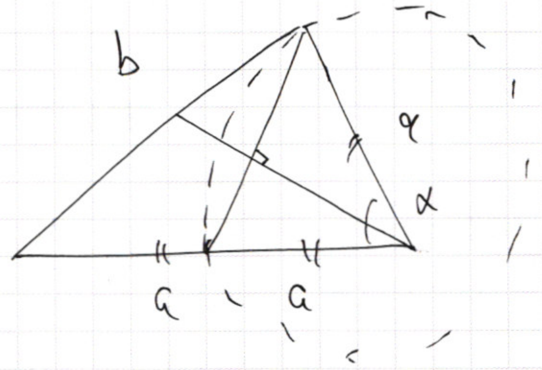
$-3a\in(-900;-450)$

$$\begin{cases} 3a+b=900 \to 900>3a \Leftrightarrow \boxed{a<300} \\ b>0 \\ a>0 \\ b<3a \\ a,b\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$900-3a<3a$; $6a>900$; $\boxed{a>150}$

$b=900-3a\in(0;450)$

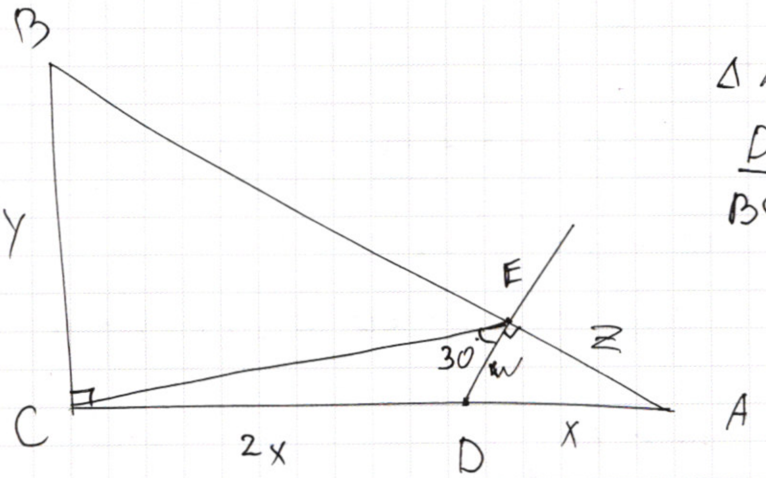
$b^2 = 2a^2$ $\qquad b = a\sqrt{2}$



$$b^2 = (2a)^2 + a^2 - 2\cdot 2a\cdot a\cdot \cos\alpha$$
$$= 4a^2 + a^2 - 4a^2\cos\alpha$$
$$= 5a^2 - 4a^2\cos\alpha$$
$$= a^2(5 - 4\cos\alpha)$$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$ $\qquad -4 \le 4\cos\alpha \le 4$ $\qquad 1 \le 5 - 4\cos\alpha \le 9$

$b \in \mathbb{Z}$ если ~~$\cos\alpha = 1, \dots$~~, 9. $\qquad \in \mathbb{Z}$



$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{3x} = \frac{x}{AB}$$

$$\frac{DE}{y} = \frac{AE}{3x} = \frac{x}{\sqrt{9x^2+y^2}}$$

$$3x^2 = AE\sqrt{9x^2+y^2}$$

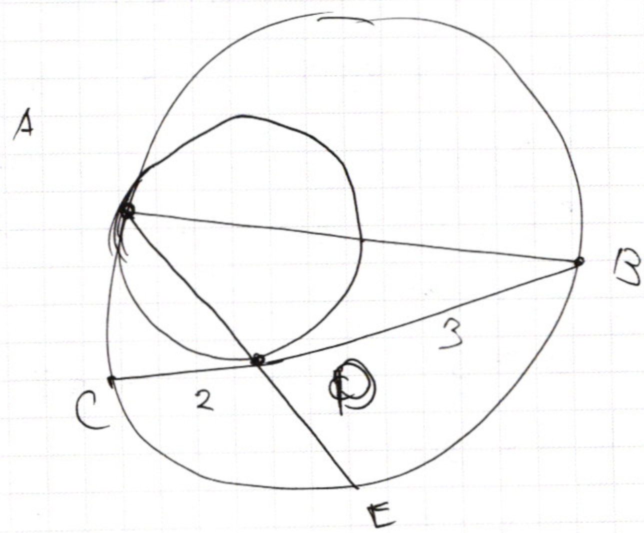
$$\frac{DE}{AE} = \frac{y}{3x}$$

$$\sqrt{9x^2+y^2} = AB; \quad \sqrt{w^2+z^2} = x$$

$$\frac{w}{y} = \frac{z}{3x} = \frac{x}{\sqrt{9x^2+y^2}}$$

$$\begin{cases} b < 3a \\ 2a < a+b \\ a < 2a+b \end{cases} \qquad \begin{matrix} b < 3a \\ a < b \\ \cancel{a < b} \end{matrix}$$

$3a + b = 300$ $\qquad 3a + b = 300$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $ax^2 - 2bx + c = 0$

$b^2 = ac \Rightarrow b^2 = ac$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$

1234567

$x = \frac{b}{a}$

$c^2 = bx = \frac{b^2}{a} = \frac{ac}{a} = c$ $b = qa$ $c = q^2 a$

$c^2 = c \Rightarrow c(c-1) = 0$ $\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

$38 - 20 = 18$

$a, b, c, \frac{b}{a}$

$b^2 = ac$

$c^2 = \frac{b^2}{a} = \frac{ac}{a} = c$

2) $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$= \sqrt{y(x-6) - (x-6)} = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$f\left(\frac{a}{a}\right) = f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) + f(1) - f(b)$

$\cancel{x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y}$

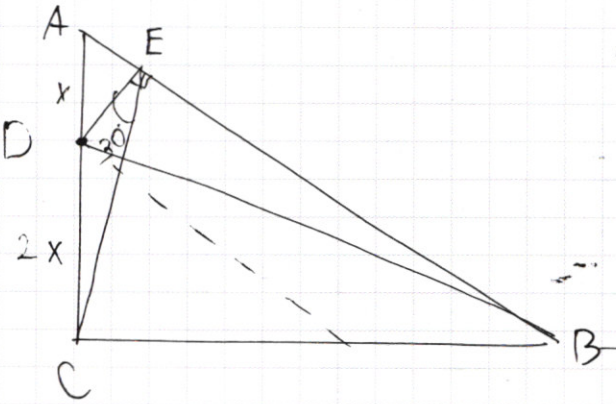
$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) = -20 + 36 + 2$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$1 - f(b) =$

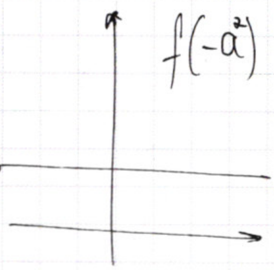
4)



$\triangle DAE \sim \triangle BAC$

$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$f(-a^2)$ $2f(a)$



$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(0b) = f(0) + f(b) = f(a \cdot 0) = f(a) + f(0)$ $f(a) = f(b)$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} & (1)\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2)\end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)=-20+36+2$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(y-1)=x^2-12xy+36y^2 & (3)\\ x-6y\geq 0\end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow xy-\cancel{x}-\cancel{6y}+6=\cancel{x^2}-\cancel{12xy}+\cancel{36y^2}$$

$$x^2+x+36y^2+6y-13xy-6=0$$

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-x-6y+6\\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0\\ x-6y\geq 0\end{cases} \qquad \begin{matrix} a=x-6\\ b=y-1\end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$-12xy+\cancel{36y^2}-\cancel{2y^2}+12x+\cancel{4y}-20=xy-x-\cancel{6y}+6$$

$\cancel{34y^2+10y}$ $\qquad$ $\cancel{ab=xy-x-6y+6}$

$$\alpha a+\beta b=x-6y; \quad \cancel{\alpha x}-6\alpha+\cancel{\beta y}-\beta=\cancel{x-6y}$$

$$\alpha=1 \quad \beta=-6 \qquad -6\alpha-\beta=0\ ?$$

$$-6\cdot 1-(-6)=-6+6=0$$

$$x-6y=a-6b=x-\cancel{6}-6y+\cancel{6}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}\\ a^2+2b^2=18\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab\\ a^2+2b^2=18\\ a-6b\geq 0\end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{18}{83}}=3\sqrt{\frac{2}{83}} \qquad 9b-6b=3b$$