МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1) Т.к. числа a, b, c являются ~~числами~~ первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии x, то $x_1 = a$

$x_2 = b = x_1 \cdot q = aq \Rightarrow b = aq$

$x_3 = c = x_1 \cdot q^2 = aq^2 \Rightarrow c = aq^2$. | $a \neq 0,\ q \neq 0$.

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$$

$$a(x + 2q + q^2) = 0$$

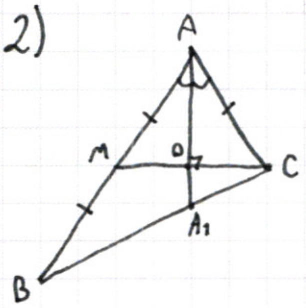
$$a(x + q)^2 = 0$$

$x = -q$, но $x = x_4 = x_1 q^3 = a \cdot q^3 \Rightarrow a \cdot q^3 = -q \Rightarrow a \cdot q^2 = -1$, но $a \cdot q^2 = c \Rightarrow$

$\Rightarrow c = -1$

Ответ: -1

№ 2)



Дано:

$\triangle ABC$

AA_1 – бис $\angle BAC$

CM – медиана

$AA_1 \perp CM$; $AA_1 \cap CM = O$

Найти:

$N_{\triangle ABC}$ – ?

$P_{\triangle ABC} = 1200$

Решение:

1) $\measuredangle$ $\triangle AOM$ и $\triangle AOC$:

1) AO – общая сторона
2) $\angle OAM = \angle CAO$ (AA_1 – бис)
3) $\angle AOM = 90^\circ = \angle AOC$ ($AA_1 \perp CM$)

$\Rightarrow \triangle AOM = \triangle AOC$ по II призн $\Rightarrow AC = AM$, как соответствующие эл.

2) Т.к. CM – медиана $\Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot AC$.

3) Т.к. $P_{\triangle ABC} = AC + AB + BC \Rightarrow BC = P_{\triangle ABC} - 3AC$

4) Пусть $AC = x \Rightarrow AB = 2x$, $BC = P - 3x$.

Запишем неравенство $\triangle$:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

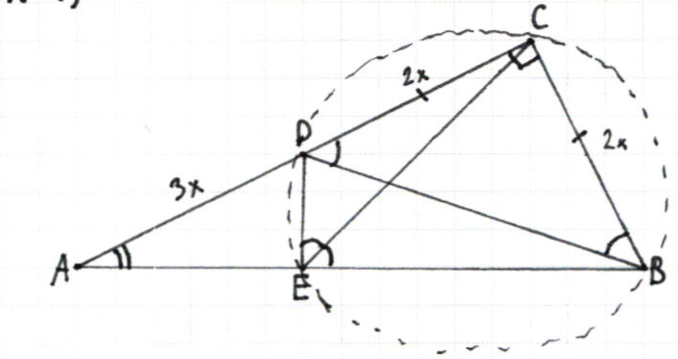
$$\left.\begin{array}{l} AC < AB + BC \\ AB < AC + BC \\ BC < AB + AC \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x < p - x \\ 2x < p - 2x \\ p - 3x < 3x \end{array} \Rightarrow \frac{p}{6} < x < \frac{p}{4} \Rightarrow 200 < x < 300.$$

5) Т.к. все стороны целочисленны, то $x \in \mathbb{Z}$, исходя из неравенства в п. 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow N = 300 - 200 - 1 = 99$

Ответ: 99

№4)



Дано:
ΔABC – прям.
$\angle ACB = 90^\circ$
$D \in AC$; $AD : AC = 3:5$
$DE \perp AB$; $E \in AB$
$\angle CED = 45^\circ$

Найти:
а) $tg\angle BAC$ – ?
б) $S_{\Delta CED}$ – ?
$AC = \sqrt{29}$

Решение:

1) Пусть $AD = 3x$, тогда $AC = \frac{5}{3} \cdot 3x = 5x$, $CD = AC - AD = 2x$.

2) Т.к. $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90^\circ$; $\angle DEB = \angle CED + \angle CEB \Rightarrow \angle CEB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

3) Т.к. $\angle DEB = 90^\circ$ и $\angle DCB = 90^\circ \Rightarrow$ около 4-угольника BCDE можно описать окружность с диаметром DB.

4) Т.к. $\angle DEC$ и $\angle DBC$ – вписанные и опираются на 1 дугу DC $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 45^\circ$

5) Т.к. $\angle BEC$ и $\angle BDC$ – вписанные и опираются на $\smile BC \Rightarrow \angle BDC = \angle BEC = 45^\circ$

6) Т.к. $\angle BDC = \angle DBC \Rightarrow \Delta BCB$ – р/б $\Rightarrow CD = BC = 2x$

7) Т.к. ΔACB – прям. $\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

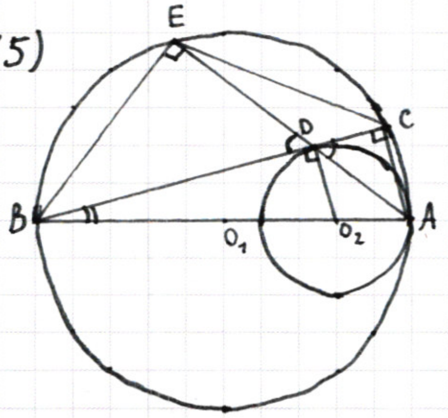
8) Т.к. $\angle BAC = arctg\frac{2}{5} \Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$ и $\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{29}}$

9) $S_{CED} = S_{ACE} - S_{ADE} = \frac{1}{2} AC \cdot AE \sin\angle BAC - \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2} AE \cdot \sin\angle BAC \cdot (AC - AD) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot AC \cdot \cos\angle BAC \cdot \sin\angle BAC \cdot \frac{2}{5} AC = \frac{3 \cdot AC^2 \cdot \sin\angle BAC \cdot \cos\angle BAC}{25} = \frac{3 \cdot 29 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$

б) $S_{\Delta CED} = 1,2$

№5)



Дано:

O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω

Ω касается ω = A

AB - диаметр Ω

BC касается ω = D

BC - хорда Ω

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 1$

$BD = 3$

Найти:

радиусы Ω и ω - ?

S_{BACE} - ?

Решение:

1) Пусть R - радиус Ω, а r - радиус ω.

2) ∡ $\triangle BO_2D$ и $\triangle ABC$:

1) $\angle ABC$ - общий
2) $\angle BDO_2 = 90^\circ = \angle ACB$ ($\angle BDO_2 = 90^\circ$, т.к. BC касается ω; $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. он впис. и опир. на диам.)

$\Rightarrow \triangle BO_2D \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{DO_2}{AC}$

3) Из 2) $\Rightarrow \frac{AC}{DO_2} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{3}$, но DO_2 - радиус $\omega \Rightarrow AC = \frac{4}{3}r$

4) Из 2) $\Rightarrow \frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$, но $BO_2 = AB - AO_2 = 2R - r \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2R - r = \frac{3}{2}R \Rightarrow r = \frac{R}{2} \Rightarrow BO_2 = \frac{3R}{2}$ и $DO_2 = \frac{R}{2}$

5) ∡ $\triangle BDO_2$: $\triangle BDO_2$ - прям. $\Rightarrow BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2 \Rightarrow 9 + \frac{R^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow 2R^2 = 9 \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

6) ∡ $\triangle ACD$: $\triangle ACD$ - прям. $\Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{3}$, $\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

7) ∡ $\triangle BED$ и $\triangle ACD$:

1) $\angle ADC = \angle BDE$ (верт.)
2) $\angle ACD = 90^\circ = \angle BED$
3)

$\Rightarrow \triangle BED \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{BD}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow DE = \sqrt{3} \Rightarrow \cancel{BD}\,AE = 2\sqrt{3}$

8) $S_{BECA} = \frac{1}{2} AE \cdot BC \cdot \sin\angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{2}$

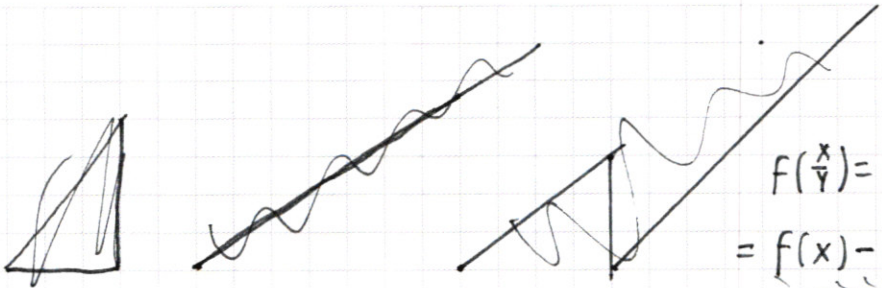
Ответ: $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{BECA} = 4\sqrt{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



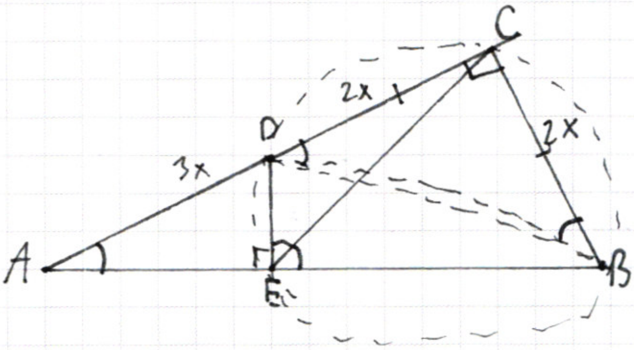
$f(y) > f(x)$

$\left[\frac{p_1}{2}\right]+\left[\frac{p_2}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{p_k}{2}\right]>$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(x)=$

$=f(x)-f(yx)+f(x)=$

$=\boxed{2f(x)-f(yx)}=\boxed{f(x)+f(y)}$



$tg\angle BAC=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}=0{,}4$

$AD=\frac{3}{5}\sqrt{29}$

$\cos\angle BAC=\frac{5}{\sqrt{4+25}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$

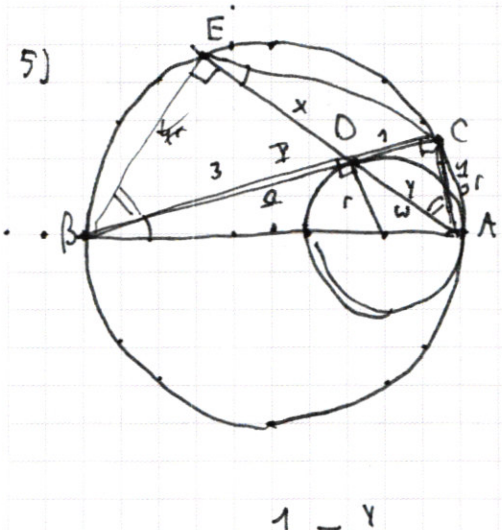
$\sin\angle BAC=\frac{2}{\sqrt{29}}$

$AE=3$

$S_{CED}=S_{ACE}-S_{ADE}=\frac{1}{2}AE\sin\alpha\cdot\frac{2}{5}AC=$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2}{5}\cdot3=\frac{6}{5}=\boxed{1{,}2}$

5)



$2R\cdot2(R-r)=9$

$\begin{cases}R^2-rR-\frac{9}{4}=0\\16+\frac{16}{9}r^2=4R^2\end{cases}$ $\begin{cases}R(R-r)=\frac{9}{4}\\R^2-\frac{4}{9}r^2=4\end{cases}$

$\begin{cases}R^2-rR-\frac{9}{4}=0\\R^2-\frac{4}{9}r^2=4\end{cases}$

$f\left(\frac{2p}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2p)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{3p}{2}\right]-\left[\cancel{\frac{p}{2}}\right]=\left[\frac{p}{2}\right]-p$

$f\left(\frac{yp}{y}\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(yp)$

$\frac{1}{x}=\frac{y}{3}$

$\frac{x}{3}=\frac{1}{y}$

$p-3x=2x$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

$f(p_1p_2)=f(p_1)+f(p_2)=\left[\frac{p_1}{2}\right]+\left[\frac{p_2}{2}\right]$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\left[\frac{p}{2}\right]-\left[\frac{yp}{2}\right]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7) Мы знаем, что $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$, p – простое число.

Пусть $x = p_1 \cdot p_2$, p_1 и p_2 – простые числа.

$$f(x) = f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) + f(p_2) = \left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right]$$

Если $x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, то

$$f(x) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = f(p_3) + f(p_1 p_2) = \left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right] + \left[\frac{p_3}{2}\right]$$

То есть если $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, где простые числа могут быть равны.

$$f(x) = \left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{p_n}{2}\right].$$

Получается мы научились находить значение функции для натуральных чисел.

Мы знаем, что $x = \frac{yx}{y}$; $y \neq 0 \Rightarrow$

$$f(x) = f\left(\frac{yx}{y}\right) = f\left(yx \cdot \frac{1}{y}\right) = f(yx) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(x) - f(y) = -f(y).$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$ при этом условии $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

Рассмотрим значение f для $[1; 22]$.

$f(1) = 0$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = 2$
$f(7) = 3$
$f(8) = 3$
$f(9) = 2$
$f(10) = 3$
$f(11) = 5$
$f(12) = 3$
$f(13) = 4$
$f(15) = 3$
$f(17) = 8$
$f(18) = 3$
$f(16) = 4$
$f(19) = 9$
$f(20) = 4$
$f(21) = 4$
$f(22) = 6$

Если $x = 1$, то мы можем выбрать 20 чисел.

Если $x = 2$ или $x = 3$, то $2 \cdot 18$

Если $x = 4, 5, 6, 9$, то $4 \cdot 14$

Если $x = 7, 8, 10, 12, 15, 18$, то $6 \cdot 8$

Если $x = 14, 16, 20, 21$, то $4 \cdot 4$

Если $x = 11$, то 3

Если $x = 13$, то 2

Если $x = 17$, то 1

Если $x = 19$, то 0

$\Rightarrow$

$N = 20 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 182$

Ответ: 182

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, b, c : $b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$

$a x^2 + 2aq x + a \cdot q^2 = 0$

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$

$x = -q$

$x = a \cdot q^3$

$aq^3 = -q$

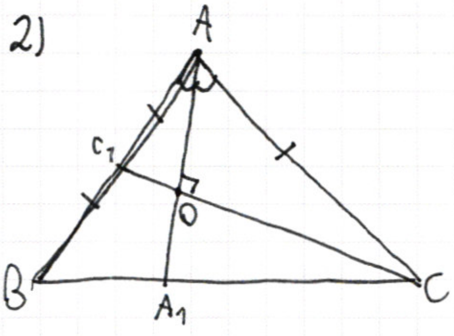
$a = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow c = -\frac{1}{q^2} \cdot q^2 = -1$

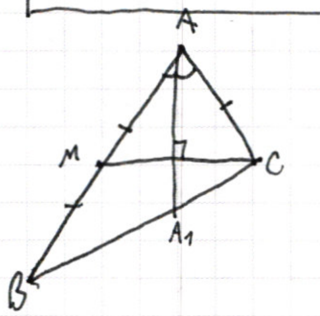
3) $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x + y + 2} \\ 2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 4x + 4 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$

2)





$x \le 2x + p - 3x$

$2x < p$

$x < \frac{p}{2}$

$2x < x + p - 3x$

$4x < p$

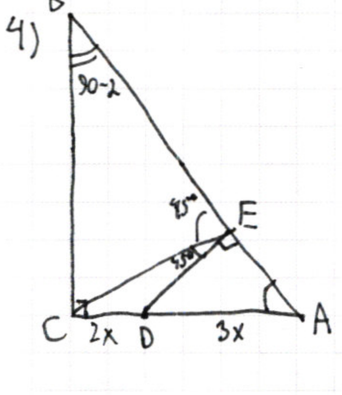
$x < \frac{p}{4} = 300$

$p - 3x < 3x$

$x > \frac{p}{6} = 200$

$300 - 200 - 1 = \boxed{99}$

4)



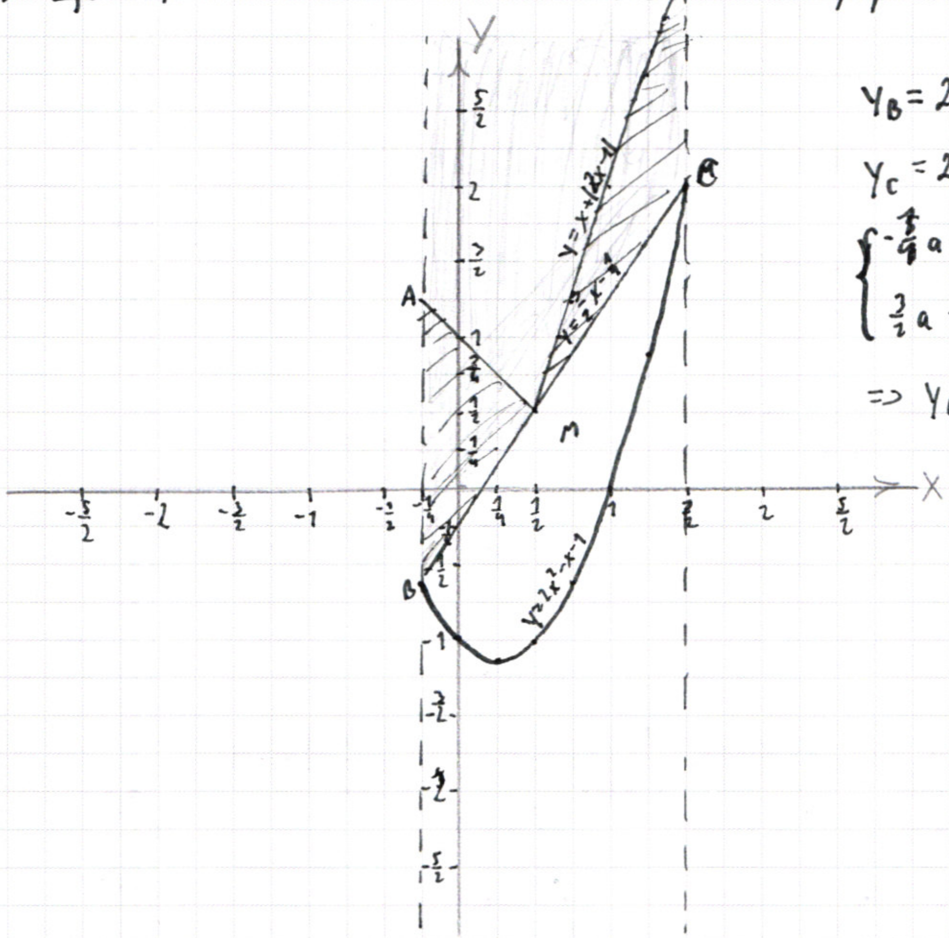
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6) Δ выражение $2x^2 - x - 1 \le ax + b$. Решим его графически.



$y_B = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{5}{8}$

$y_C = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = 2.$

$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{2}a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{BC} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

Прямая $ax+b$ может лежать в заштрихованной области, если она не лежит в ней, то у нас будут места, где $2x^2 - x - 1 \ge ax + b$, что нам не подходит. ~~то есть $ax+b$ лежит в об~~

Δ ещё и выражение $ax + b \le x + |2x-1|$.

Данное выражение оставляет нам 2 треугольника ΔAMB и ΔCMD.

Т.к. если проведём прямую не через BC, то опять будут интервалы, где $x + |2x-1| \le ax + b$, чего быть не должно, значит нам подходит лишь прямая BC, заданная $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$\cancel{D=1+1=3^2}$

$4x-1=0$

$x=\frac{1}{4}$

$(2x+1)(x-1) \le ax+b \le x+|2x-1|$

$\frac{25}{2}-\frac{5}{4}-1=$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1=\boxed{\frac{5}{8}}$

$\cancel{=\frac{50}{16}-\frac{9}{16}=\frac{41}{16}=}$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1=3-1=\boxed{2}$

$x+|2x-1|=(x+\sqrt{(2x-1)^2})'=1+\frac{4x-2}{2\sqrt{(2x-1)^2}}=1+\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2}}=0$

$36+20$

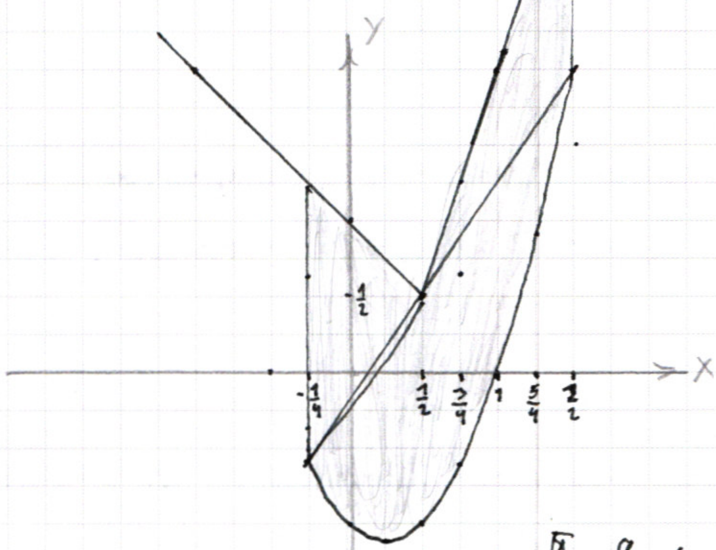
56

48

16

6

182



$2x^2-(a+1)x$

f(1) = 0	f(13) = 6
f(2) = 1	f(14) = 4
f(3) = 1	f(15) = 3
f(4) = 2	f(16) = 4
f(5) = 2	f(17) = 8
f(6) = 2	f(18) = 3
f(7) = 3	f(19) = 9
f(8) = 3	f(20) = 4
f(9) = 2	f(21) = 4
f(10) = 3	
f(11) = 8	
f(12) = 3	

$20+18+(4\cdot 14)+(6\cdot 8)+(4\cdot 4)+3+2+1$

$-\frac{a}{4}+b=-\frac{5}{8}$

$\frac{3a}{2}+b=2$

$\frac{7a}{4}=\frac{21}{8}$

$a=\frac{3}{2}$

$b=-\frac{5}{2}$

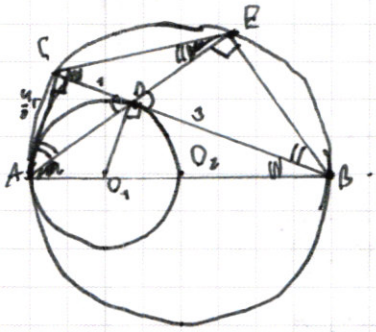
$\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

$-\frac{3}{8}+b=-\frac{5}{8}$

$b=-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}-\frac{5}{2}=$

$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



$\frac{1}{2}(\cancel{AD \cdot DB + AD \cdot CD +}$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ -\ 603 \\ \hline 597 \end{array}$$

$f(\frac{1}{y}) = -f(yx) + f(x) = -f(y) - f(x) + f(x) = -f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

201, 402, 597

$2x = p - 3x$

$x = \frac{p}{5} = \frac{1200}{5} = 240$

240, 480,

241, 482, 477

242, 484, 474

~~238~~,

$$\begin{array}{r} 1200 \\ -\ 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ -\ 241 \\ \hline 959 \\ -\ 482 \\ \hline 477 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ -\ 726 \\ \hline 474 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2=3 \end{cases}$

$y-2=a \Rightarrow y=a+2$

$x-1=b \Rightarrow x=b+1$

$\begin{cases} a+2b+4=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a+2b=\sqrt{ab}-4 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+4ab+4b^2=ab-8\sqrt{ab}+16 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$

$(x+1)^2 \le \frac{3}{2}$

$-\sqrt{\frac{3}{2}} \le x+1 \le \sqrt{\frac{3}{2}}$; $-1-\sqrt{\frac{3}{2}} \le x \le -1+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0$

$D=4-(2x^2-4x+3)=-2x^2+4x+1=-2(x+1)^2+3 \ge 0$

$y=2\pm\sqrt{3-2(x-1)^2}$

$2(x+1)^2+1$

$R^2+2Rr=9$

$R^2-\frac{4}{9}r^2=4$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y- \\ \end{cases}$

$r=\frac{15}{2\sqrt{46}}$

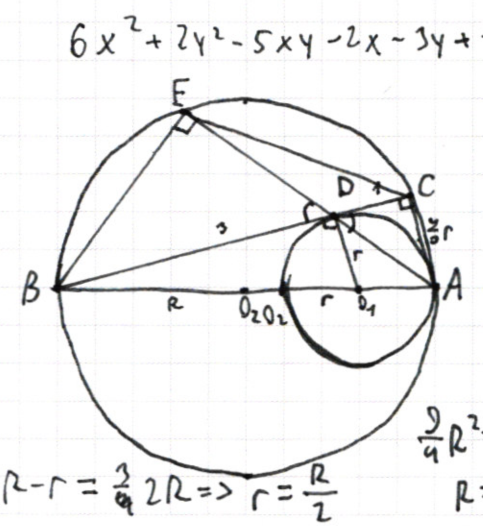
$2Rr+\frac{4}{9}r^2=5$

$6x^2+2y^2-5xy-2x-3y+1=0$

$\frac{4}{3}(R+r)=2R$

$\frac{4}{3}r=\frac{2}{3}R \Rightarrow \boxed{r=\frac{R}{2}}$

$R=$



$\begin{cases} (R+r)^2=9+r^2 \\ 4R^2=16+\frac{16}{9}r^2 \end{cases}$ $\begin{cases} (R+r)^2=9+r^2 \\ R^2=4+\frac{4}{9}r^2 \end{cases}$

$r(2R+r)=5+\frac{5}{9}r^2$

$2R=\frac{5}{r}-\frac{4}{9}r$ $\frac{25}{4r^2}-\frac{10}{9}+\frac{4}{9}r^2=4+\frac{4}{9}r^2$

$\frac{9}{4}R^2=\frac{R^2}{4}+9$

$R=\frac{5}{2r}-\frac{2}{9}r$ $\frac{4r^2}{25}=\frac{9}{46}$

$2R-r=\frac{3}{4}2R \Rightarrow r=\frac{R}{2}$

$R=\frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r=\frac{3}{4\sqrt{2}}$