МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$a=a,\ b=aq,\ c=aq^2$, тогда

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$x=-q$

$aq^3=-q$

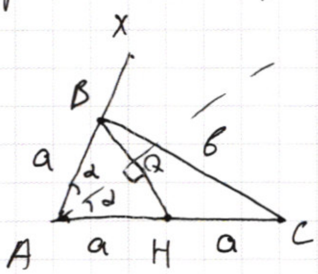
$aq^2=-1$

$c=-1$

Ответ: $c=-1$.

№2.

Р-рим как получить подход. треуг.



1) проводим отрезок a (AH)
2) Строим угол 2α и пров. бис. из т. A.
3) $B = AX \cap HQ$, $HQ \perp$ бис.
4) достраиваем $AC=2a$.

Тогда найдём б: $b = a\sqrt{5-4\cos 2\alpha}$, $0\leq\alpha\leq 90°$

Тогда $P = 3a+b \Rightarrow b = P-3a \Rightarrow$

$\Rightarrow P-3a = a\sqrt{5-4\cos 2\alpha}$

$\frac{P}{a} = \sqrt{5-4\cos 2\alpha}+3$, $0<\alpha<90°$

~~Оценим выражение~~ т.к. $\cos 2\alpha$ принимает все значения от $(-1,1)$

то оценим $\sqrt{5-4\cos 2\alpha}+3$

№2

$-4 \le -4\cos2\alpha \le 4$

$1 \le 5-4\cos2\alpha \le 9$

$1 \le \sqrt{5-4\cos2\alpha} \le 3$

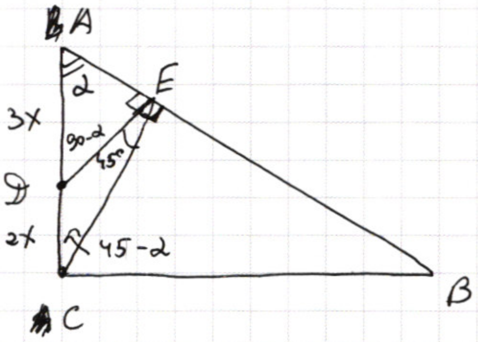
$4 \le 3+\sqrt{5-4\cos2\alpha} \le 6$

$4 \le \frac{p}{a} \le 6 \Rightarrow \boxed{\frac{p}{a} = 5}$ - ед. случай

Тогда $a = \frac{1200}{5} = 240$

Ответ: 1 треугольник.

№4.



1) $\angle BAC = \alpha$, тогда

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{DE}{3x}$

2) т. син. ΔCED:

$\frac{2x}{\sin45} = \frac{DE}{\sin(45-\alpha)}$

3) перемножим п. 1 и п. 2:

$\frac{\cancel{\cos\alpha}\sin\alpha}{\sin(45-\alpha)} = \frac{2}{3\sin45}$

$-\frac{\cancel{\cos\alpha}\sin}{\cos45\sin\alpha - \sin45\cos\alpha} = \frac{2}{3\sin45}$ | $\cos45 = \sin45$

$-\frac{\cancel{\cos\alpha}\sin}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{2}{3}$

$3\sin\alpha = 2\cos\alpha - 2\sin\alpha$

$5\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\boxed{tg\alpha = \frac{2}{5}}$

4) $S_{DEC} = \frac{DE \cdot DC}{2}\sin(45°-\alpha)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$$S_{DEC} = \frac{3x \cdot \sin\alpha \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 \cancel{(\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha)} \sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{3}{2}\sin\alpha = \frac{9\sqrt{2}}{4}x^2\sin^2\alpha$$

Выразим $\sin\alpha$ через $tg\,\alpha$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$$

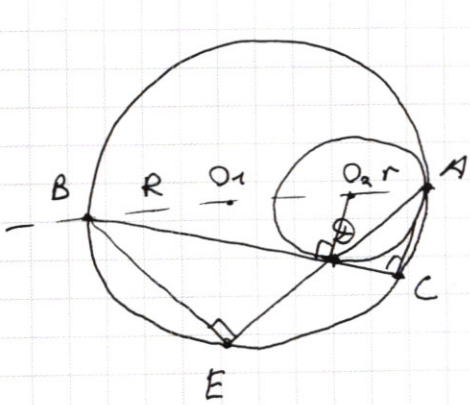
$$\sin^2\alpha = \frac{4}{29}$$

$$S_{DEC} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{29} \cdot x^2 =$$

$$5x = \sqrt{29}, \quad x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{\cancel{29}} \cdot \frac{\cancel{29}}{25} = \boxed{\frac{9\sqrt{2}}{25}}$$

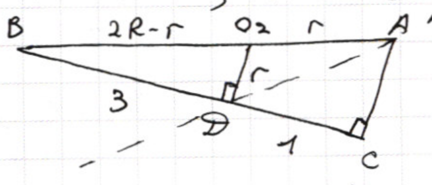
№5



1) $O_1D \perp BC$ т.к. касат.

$AC \perp BC$, т.к. AB-диам.

2)



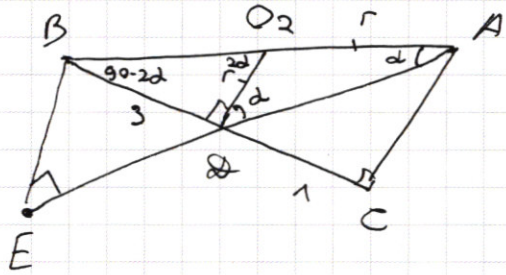
$\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ (по 2 углам)

тогда $\frac{2R-r}{3} = \frac{2R}{4} \Rightarrow R = 2r$ $\{2R-r=3r$

тогда по т. Пиф: $3^2 + r^2 = (3r)^2 \Rightarrow 9 = 8r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$
$$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3) $S_{BACE} = \dfrac{AE \cdot BC}{2} \sin\angle BDA$



1) $AE = AB\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha = \dfrac{r}{3r} = \dfrac{1}{3}$

~~cos~~ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \dfrac{2}{3}$

~~$\sin^2\alpha = \frac{1}{3}$~~

3) $S = \cancel{AE}\ \dfrac{AB^2\cos\alpha}{2} \cdot \sin(90^\circ+\alpha) =$

$= \dfrac{AB^2}{2}\cos^2\alpha = \dfrac{(4r)^2}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{16 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}{2} \cdot \dfrac{2}{3} =$

$= \dfrac{\cancel{8} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{16}_{\cancel{2}}} \cdot \dfrac{2}{\cancel{3}} = 6$

Ответ: $r = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $S = 6$

№ 5.

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$

построим $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x-1|$

1) $y = 2x^2 - x - 1$ – параб

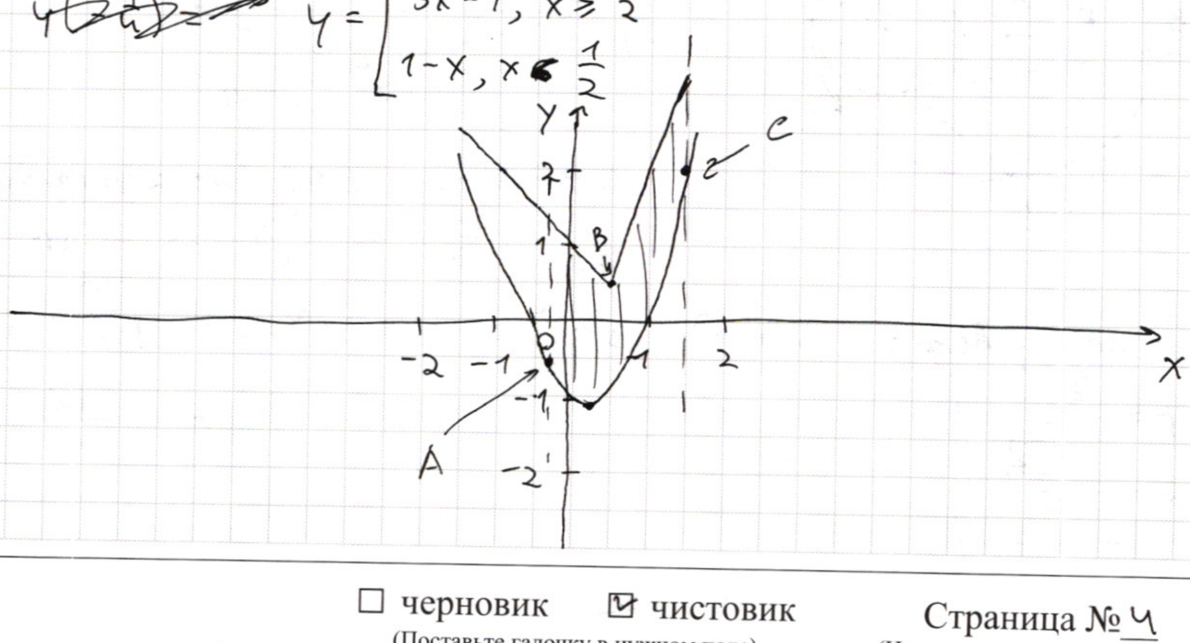
1. $x_0 = \dfrac{1}{4}$, $y_0 = -\dfrac{9}{8}$

2. $y\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{5}{8}$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2$

2) $y = x + |2x-1|$

~~$y(-\frac{1}{4}) = $~~ $y = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

3)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

3) Чтобы неравенство было верным прямая $y = ax+b$ должна лежать в закрашенной области на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

4) Заметим, что граничные точки A, B, C лежат на одной прямой $\left(y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)$, т.к. прямая $y=ax+b$ не может выходить за эти точки, то она должна проходить через них. тогда $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$ – ед. пара.

Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

№7.

1) $f(a) = f\left(b \cdot \frac{a}{b}\right) = f(b) + f\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$, тогда $f\left(\frac{a}{b}\right) < 0$ при $f(a) < f(b)$

2) Посчитаем все значения $f(x)$, при $1 \le x \le 21$ по принципу, если x – простое, то $f(x) = [x/4]$, если x – сост, то $f(x) = f(q_1) + f(q_2) + \dots f(q_n)$, $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ – простые множ.

$f(1) = 0$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = 2$
$f(7) = 3$
$f(8) = 3$
$f(9) = 2$
$f(10) = 3$
$f(11) = 5$
$f(12) = 3$
$f(13) = 6$
$f(14) = 4$
$f(15) = 3$
$f(16) = 4$
$f(17) = 8$
$f(18) = 3$
$f(19) = 9$
$f(20) = 4$
$f(21) = 4$

№7.

~~тогда~~

тогда проходясь по каждому x, найдём все y такие, что $f(x) < f(y)$ и сложим.

~~$x=1$; $n_y = 20$~~

~~$x=2$: $n_y =$~~

$$N = \underbrace{20}_{x=1} + \underbrace{18\cdot 2}_{x=2,3} + \underbrace{14\cdot 5}_{x=4,5,6,9} + 8\cdot 6 + \overset{4\cdot 4}{\cancel{\ }} + \overset{3\cdot 1}{\cancel{\ }} \oplus$$

$- - .$

$$\oplus \overset{2\cdot 1}{\cancel{\ }} + 1\cdot 1 + 0\cdot 1$$

$$N = 20 + 36 + 70 + 48 + 16 + 3 + 2 + 1 =$$

$$= 56 + 118 + 20 + 2 =$$

$$= 56 + 120 + 20 = 56 + 140 = 196$$

Ответ: $N = 196$ пар (x, y)

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y - 2} & (2) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (1) \end{cases}, \quad y - 2x \geq 0$$

~~Н возв. вкв. 2~~

1) возв. в квад. $y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y - 2$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = -2x - y - 2 \quad (2)$$

2) $2x^2 + y^2 = 4x + 4y - 3$

3) решим отн. y: $\frac{D_1}{4} = 4 - (2x^2 - 4x + 3) \geq 0 \quad (1)$

$$D_2 = (1 - 5x)^2 - 4\cdot(4x^2 + 2x + 2) \geq 0 \quad (2)$$

(1): $2x^2 - 4x - 1 \leq 0$

$x \in \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$

(2) $1 - 10x + 25x^2 - 16x^2 - 8x - 8 \geq 0$

$9x^2 - 18x - 7 \geq 0$

$x \in \left(-\infty; \frac{9-12}{9}\right) \cup \left(\frac{9+12}{9}; +\infty\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

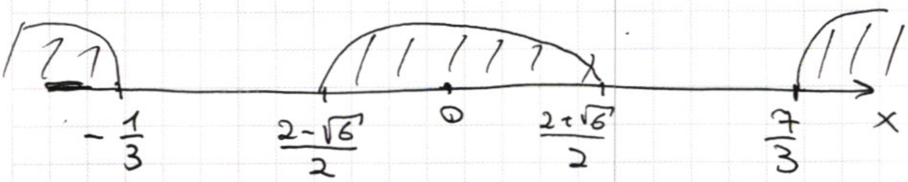
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{решений нет}}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y \geq 2x$,

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(2x^2 - 4x + 3)}}{2} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 - (2x^2 - 4x + 3)} \geq 2x$$

$2x^2 - 4x + 3 \geq 4x^2 - 8x$

$6x^2 - 4x - 3 \leq 0$

$D = \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 6}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

1) $y^2 - 5xy + 4x^2 - 2 + 2x + y = 0$

2) ~~$2x^2 - 5xy - 5 + 6x + 5y = 0$~~

$y - 2x = m$

$y + 2x = n$

$m = \sqrt{\frac{(m+n)^2}{8} - n + 2}$

$2x^2 + 2\sqrt{2}\,xy + y^2 - 2\sqrt{2}\,xy$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

1) $y^2 - 5xy + 4x^2 = 2 - 2x - y$

2)

$y^2 + 4x^2 - 5xy = 2 - 2x - y$

$2x^2 + y^2 = 3 + 4x + 4y$

$5xy - x \leq \frac{4}{27}$

$x + y \leq \frac{4}{3}$

$5xy - 2x - y \geq 2$

$x + y = m$

$2x + y = n$

$x = n - m$

$y = m - (n - m) = 2m - n$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2 - (2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3)}$

$y - 2x = \sqrt{xy + 2x + 3y - 1 - 2x^2 - y^2}$

$81 + 63$

$(2m - n)^2 + 4(n - m)^2 - 5(2m - n)(n - m) = 2 - n$

$4m^2 - 4mn + n^2 + 4n^2 - 4mn + m^2 - 5(2mn - 2m^2 - n^2 + mn) = 2 - n$

$5m^2 - 8mn + 5n^2 - 10mn + 10m^2 + 5n^2 - 5mn = 2 - n$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

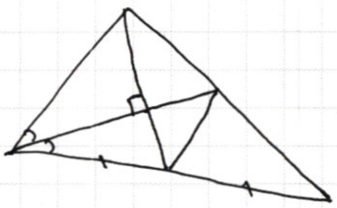
$2,2+\frac{-4,84+5}{2\cdot 2,2}$

$\sqrt{5}\approx 2,236$

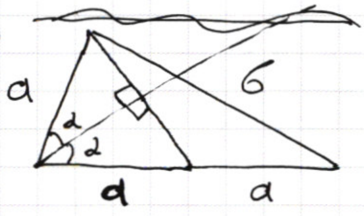
$x_1=x_0-\frac{f(x)}{f'(x)}=$

$=x-\frac{x^2-A}{2x}=$

$=2,2-\frac{2,2^2-5}{2\cdot 2,2}$



0,80 | 22
66 | 0,0363
140
132
80



0,16

0,08 | 2,2

3,000
2,236
0,764

7,6,4
3
229,2

$b=\sqrt{4a^2+a^2-4a^2\cos 2d}$

$b=\sqrt{5a^2-4a^2\cos 2d}=a\sqrt{5-4\cos 2d}$

$3a+b=\cancel{1200}\ P$

$P-3a=d\sqrt{5-4\cos 2d}$

$P=a\left(3+\sqrt{5-4\cos 2d}\right)$

$\sqrt{22^2}\le\sqrt{500}\le\sqrt{23^2}$

22 23
22 23
44 69
44 46
484 529

$4\le\frac{P}{a}\le\sqrt{5}+3$

$\frac{1}{\sqrt{5}+3}\le\frac{a}{1200}\le\frac{1}{4}$

$(3-\sqrt{5})300\le a\le 300$

$229,2\le a\le 300$

$\boxed{230\le a\le 300}$

$0\le\cos 2d\le 1$

$0\le 4\cos 2d\le 4$

$-4\le -4\cos 2d\le 0$

$1\le 5-4\cos 2d\le 5$

$1\le\sqrt{5-4\cos 2d}\le\sqrt{5}$

$2,2\le\sqrt{5}\le 2,3$

$\frac{1200}{5}=240$

$2\le\sqrt{5}\le 3$

$480\le 240\sqrt{5}\le 720$

$1\le\frac{P}{a}\le\sqrt{5}$

$1\le\frac{1200}{a}\le\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{5}}{5}\le\frac{a}{1200}\le 1$

$240\sqrt{5}\le a\le 1200$

$552\le a\le 1200$

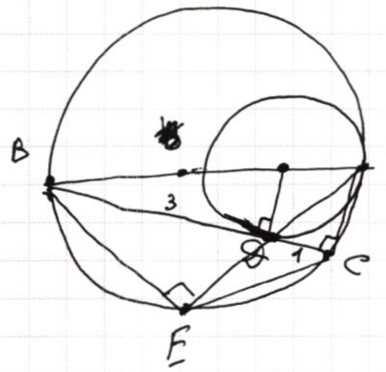
24 24
22 23
48
48
528
24
552

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

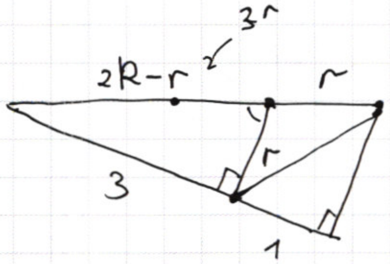
(Нумеровать только чистовики)



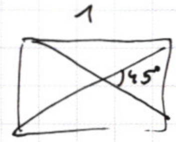
$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=1$$

$$\frac{d_1 d_2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{2R-r}{3}=\frac{2R}{4}$$



$$8R-4r=6R$$

$$2R=4r$$

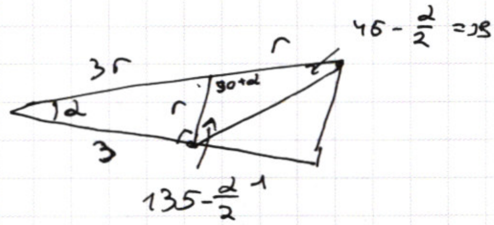
$$R=2r$$

1) $9r^2=r^2+9$

$8r^2=9$

$$r=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$R=2\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$$2x=180-90-\alpha$$

$$\beta=45-\frac{\alpha}{2}$$

2)

$$\cos\alpha=\frac{\cancel{3}\cdot 4}{\cancel{3}\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$AE=AB\cos\beta$$

$$S=\frac{AE\cdot BC\cdot\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(90+45-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$$

OK

$$S=\frac{AE\cdot BC}{2}\cos^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{AE\cdot BC}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{AE\cdot BC}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+3}{6}}+\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}\right)^2$$

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

$$\frac{2\sqrt{2}+3}{6}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$$

OK

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad 1 \le x \le 21$

$f(p) = [p/2]$, p-простое $\qquad 1 \le y \le 21$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) + f(1) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2$

$f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = 4$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = 4$

$f(21) = 4$

$f(a) = f\left(b \cdot \frac{a}{b}\right) = f(b) + f\left(\frac{a}{b}\right)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

$20 + 18 + 18 + 14 +$

$20 + 18 \cdot 2 + 14 \cdot 4 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 5 +$

$1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 +$

ОК

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6. $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$x + |2x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \ge \frac{1}{2} \\ 1-x, & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$

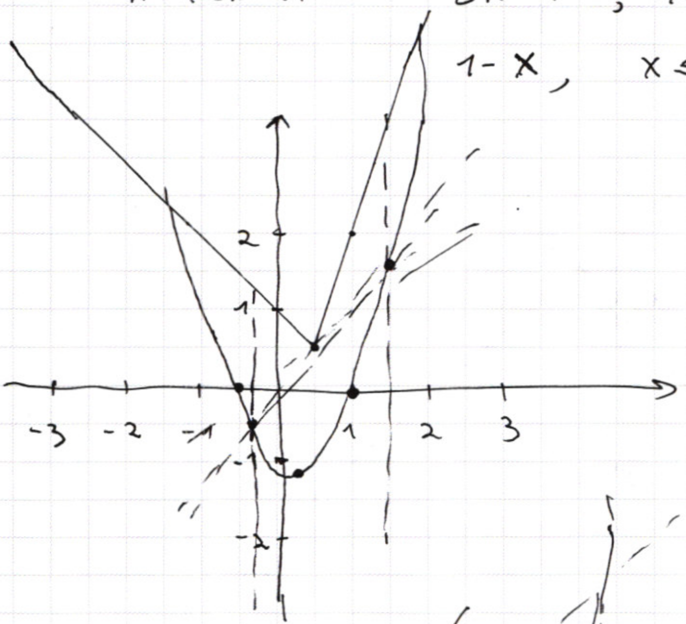
$y = 2x^2 - x - 1$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$y_0 = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$



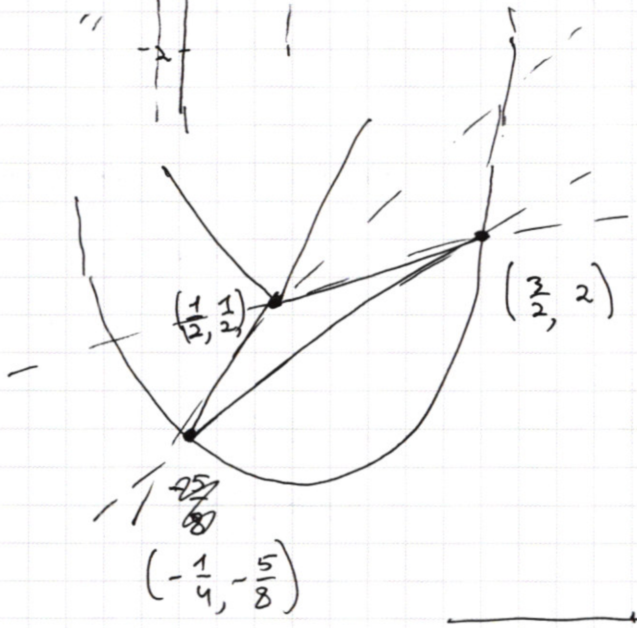
$2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 =$

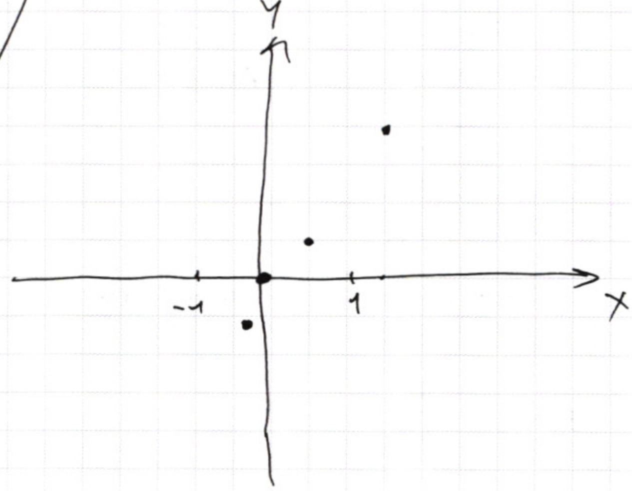
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 =$

$= -\frac{5}{8}$

$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 =$

$= \frac{6}{2} - 1 = 2$





OR

$\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \dfrac{\cancel{\frac{9}{8}}\ \frac{3}{2}}{\cancel{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4} + |-\frac{1}{2} - 1| = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} =$

$\dfrac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\quad}$ $-\frac{1}{4}$

$2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1$

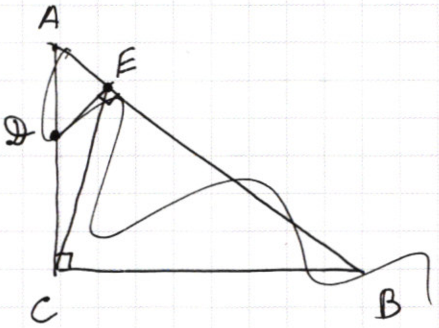
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

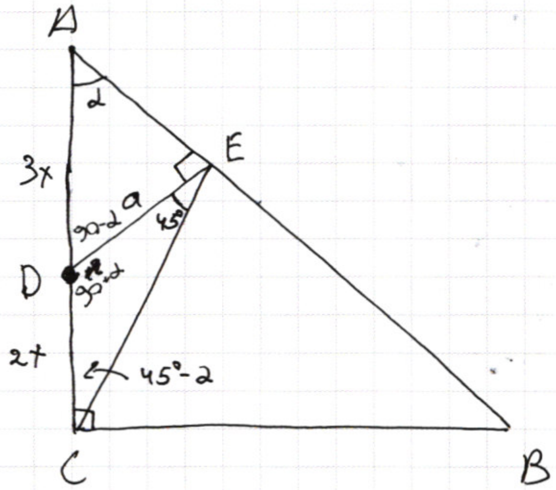
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





1) $tg\,\alpha = \frac{a}{3x}$

2) $\frac{a}{\sin(45°-\alpha)} = \frac{2x}{\sin 45}$

$\frac{tg\,\alpha}{\sin(45°-\alpha)} = \frac{2}{3\sin 45}$

$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{2}{3}$

$3\sin\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha$

$\sin 45\cos\alpha - \cos 45\sin\alpha =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$AC = \sqrt{29} \Rightarrow$

~~$BC = \frac{2}{3}\sqrt{29}$~~

$\sin\alpha = \frac{a}{3x}$

$\frac{a}{\sin(45-\alpha)} = \frac{2x}{\sin 45}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{2}{3}$

~~$\frac{1}{tg\,\alpha}$~~

$2\cos\alpha - 2\sin\alpha = 3\sin\alpha$

$\boxed{tg\,\alpha = \frac{2}{5}}$

$S = 2x \cdot a \cdot \sin(90+\alpha)$

$S = \frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \cos\alpha$

$S = 29 \cdot \frac{12}{125}\cos\alpha$

OK

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$y-2x \geq 0$

$x+y \geq 3$

$3y \geq 3$

$y \geq 1$

~~$xy-2x-y+2 \geq 0$~~

$\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}$

~~$2(x^2+y^2+3=4(x+y))$~~

$\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2x-y+2$

$xy-2x-y+2 \geq 0$

$xy+2 \geq 2x+y$

$xy+2-x \geq x+y \geq 3$

$xy-x \geq 1$

$\underbrace{x(y-1)}_{\geq 0} \geq 1$

$x \geq 0$

$y^2-4y+(2x^2-4x+3)=0$

$2x^2+y^2+3=4(x+y)$

$2x+2y \geq \frac{3}{2}$

$y-2x \geq 0$

$3y \geq \frac{3}{2}$

$y \geq \frac{1}{2}$

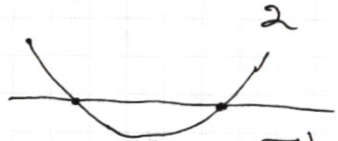
$y:\ D=16-4(2x^2-4x+3) \geq 0$

$4 \geq 2x^2-4x+3$

$2x^2-4x-1 \leq 0$

~~$D: 16+$~~ $x=$ ~~$\frac{4 \pm \sqrt{16+}}{}$~~

$x=\frac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2}=\frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$



$x \in \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2};\ \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик.

№1.

$$x^2 \cdot bq^n + 2bq^{n+1}x + bq^{n+2} = 0$$

ОК

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0$$

$$(x+q)^2 = 0$$

$$x = -q$$

$$ax^2 + 2a\cdot qx + aq^2 = 0$$

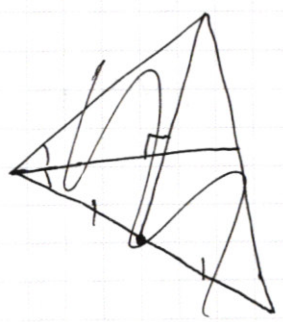
$$x^2 + 2qx + q^2 = 0$$

$$x = -q$$

$$a\cdot q^4 = -q$$

$$\boxed{c = a\cdot q^3 = -1}$$

№2.



?

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)