МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть $\{d_n\}$ - геометрическая прогрессия у которой $d_1=a$; $d_2=b$; $d_3=c$

Т.к. прогрессия геометрическая, то $b=d_2=d_1\cdot q=a\cdot q$, $c=d_3=d_1\cdot q^2=a\cdot q^2$

Т.к. d_4 является корнем уравнения $ax^2-2bx+c=0$, то справедливо следующее:

$a\cdot d_4^2-2b d_4+c=0$ (1)

$d_4=d_1\cdot q^3=a\cdot q^3$

Подставим в (1) преобразования для b, c, d_4, получим:

$\cancel{a^3\cdot q}\ a\cdot(a\cdot q^3)^2-2\cdot a\cdot q\cdot(a\cdot q^3)+a\cdot q^2=0$

$a\left((a\cdot q^3)^2-2q(a\cdot q^3)+q^2\right)=0$

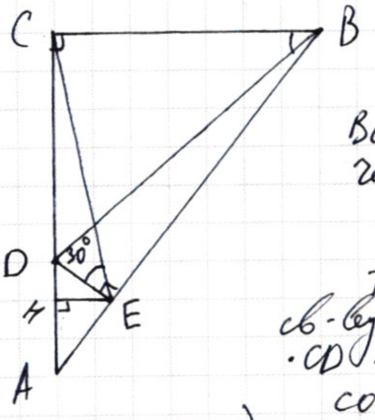
$a\left(a\cdot q^3-q\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a\cdot q^3-q=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ q(aq^2-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ q=0\\ aq^2-1=0\end{array}\right.$

Если $a=0$ или $q=0$, то геометрическая прогрессия будет состоять только из нулей ($a=0$) либо возможно, $d_1\neq0$, $d_i=0$ где $i\in[2;+\infty)$ (при $q=0$, $a\neq0$). Т.е. $a\neq0$ и $q\neq0$. Значит $aq^2-1=0 \Leftrightarrow aq^2=1$

Третий член последовательности равен $d_3=d_1\cdot q^2=aq^2=1$.

Ответ: 1

№4



а) 1) Пусть $AD=x$. Тогда $AC=3x$ (по усл. $AD:AC=1:3$)

$CD=AC-AD=2x$

2) Заметим, что $\angle BCD+\angle BED=90^\circ+90^\circ=180^\circ$. Тогда $BCDE$ - вписанный четырёхугольник (по признаку впис. четырехугольника)

Тогда $\angle CED=\angle CBD=30^\circ$ (опираются на дугу CD)

3) $\triangle BCD$ (прямоуг. $\angle BCD=90^\circ$):

Т.к. $\angle CBD=30^\circ$ и $\triangle BCD$ - прямоуг., то $CD=\frac{1}{2}BD$ (по св-ву прямоуг. треуг. с углом в 30°). Значит $BD=2\cdot CD=2\cdot2x=4x$

$\cos\angle DBC=\frac{BC}{BD} \Rightarrow BC=BD\cdot\cos\angle DBC=4x\cdot\frac{\sqrt3}{2}=2\sqrt3 x$

4) $\triangle ABC$ (прямоуг. $\angle ACB=90^\circ$):

$\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt3 x}{3x}=\frac{2\sqrt3}{3}$

б) 5) Если $AC=\sqrt7$, то $3x=\sqrt7 \Rightarrow x=\frac{\sqrt7}{3}$.

Д.п. $EH\perp AC$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

6) $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$ $\triangle ABC$ - прямоуг.):
$AB^2 = AC^2 + CB^2$ (т. Пифагора)
$AB^2 = 9x^2 + 12x^2 = 21x^2$
$AB = \sqrt{21}x$
Тогда $\sin\angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$; $\cos\angle CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{\sqrt{21}x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$
$\triangle AED$ (прямоуг., $\angle AED = 90^\circ$):
$\cos\angle DAE = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = AD \cdot \cos\angle CAB = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}x$
$\triangle AEH$ (прямоуг., $\angle AHE = 90^\circ$):
$\sin\angle HAE = \frac{EH}{AE} \Rightarrow EH = \sin\angle CAB \cdot AE = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}x = \frac{2\sqrt{3}}{7}x$

7) $\triangle EDC$:
$S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2} CD \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7}x = \frac{2\sqrt{3}}{7}x^2$
$x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№3.

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

Замена $x-6=a$; $y-1=b$. Тогда $a-6b = x-6-6y+6 = x-6y$

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2 = 18 \end{cases}$$

$ab \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \\ a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$

1) Если $a=0$, то $\begin{cases} -6b=0 \\ 2b^2=18 \end{cases}$; $\begin{cases} b=0 \\ 0=18 \end{cases}$ - противоречие
Значит $a \neq 0$
2) Если $b=0$, то $\begin{cases} a = 0 \\ a^2=18 \end{cases}$; $\begin{cases} a=0 \\ 0=18 \end{cases}$ - противоречие
$b \neq 0$

3) Если $a>0$ и $b>0$:
$a-6b = \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} - 6(\sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a}+2\sqrt{b}) - 3\sqrt{b}(\sqrt{a}+2\sqrt{b}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-3\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a}-3\sqrt{b}=0 \\ \sqrt{a}+2\sqrt{b}=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \sqrt{a}=3\sqrt{b} \\ \sqrt{a}=-2\sqrt{b} \end{array}\right. \overset{a>0,\ b>0}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ \varnothing \end{array}\right.$ - т.к. $\sqrt{a}>0$

$\begin{cases} a=9b \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$; $\begin{cases} a=9b \\ 81b^2+2b^2=18 \end{cases}$; $\begin{cases} 83b^2 = \frac{18}{83} \\ a=9b \end{cases}$; $\begin{cases} b=\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} a>0 \\ b>0 \end{array}\right)$

продолжение на следующей странице

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $a<0$ и $b<0$:

$a-6b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow -(\sqrt{-a})^2+6(\sqrt{-b})^2-\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=0 \Leftrightarrow 6(\sqrt{-b})^2-3\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-a}+$
$+2\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}-(\sqrt{-a})^2=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{-b}(2\sqrt{-b}-\sqrt{-a})+\sqrt{a}(2\sqrt{-b}-\sqrt{-a})=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3\sqrt{-b}+\sqrt{-a})(2\sqrt{-b}-\sqrt{-a})=0$

$\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{-b}+\sqrt{-a}=0 \\ 2\sqrt{-b}-\sqrt{-a}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-a}=-3\sqrt{-b} \\ \sqrt{-a}=2\sqrt{-b} \end{array}\right.$ - нет реш., т.к. $\sqrt{-a}>0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{-a}=2\sqrt{-b} \overset{a<0,\ b<0}{\Longleftrightarrow} a=4b$

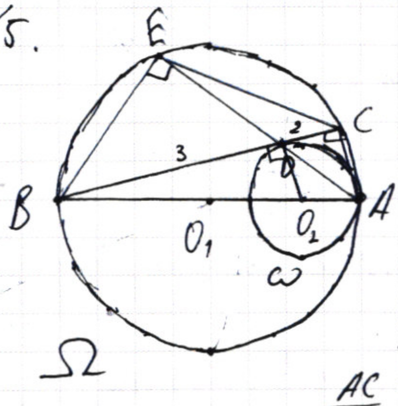
$\begin{cases} a=4b \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}; \begin{cases} a=4b \\ 16b^2+2b^2=18 \end{cases}; \begin{cases} a=4b \\ 18b^2=18 \end{cases}; \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \left(\begin{array}{l} a<0 \\ b<0 \end{array}\right)$

Обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=-4 \\ y-1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6 \\ y=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(2;0)$; $\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

№5.



1. Пусть O_1 - центр Ω; O_2 - центр ω
Д.п. O_2D
2. $\angle BCA=90°$; $\angle BEA=90°$ (AB - диаметр; $E\in\Omega$; $C\in\Omega$)
$\angle BDO_2=90°$ (BC - касательная к ω)
3. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по двум углам):
1) $\angle BDO_2=\angle BCA=90°$ (см. 2)
2) $\angle CBA$ - общий ($O_2\in AB$)
Значит $\frac{AC}{O_2D}=\frac{BC}{BD}=\frac{AB}{BO_2}$; $\frac{BC}{BD}=\frac{5}{3}$

$\frac{AC}{O_2D}=\frac{5}{3}$. Пусть R_1 - радиус Ω, R_2 - радиус ω.
$AC=\frac{5}{3}O_2D=\frac{5}{3}R_2$
$\frac{AB}{BO_2}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow AB=\frac{5}{3}BO_2 \Leftrightarrow 2R_1=\frac{5}{3}(AB-AO_2) \Leftrightarrow 2R_1=\frac{5}{3}(2R_1-R_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6R_1=10R_1-5R_2 \Leftrightarrow 5R_2=4R_1 \Leftrightarrow R_2=\frac{4}{5}R_1$
4. $\triangle ABC$ (прямоуг., $\angle BCA=90°$)
$AB^2=BC^2+AC^2$ (т. Пифагора)
$4R_1^2=25+\left(\frac{5}{3}R_2\right)^2 \Leftrightarrow 4R_1^2=25+\left(\frac{4}{3}R_1\right)^2 \Leftrightarrow \left(4-\frac{16}{9}\right)R_1^2=25 \Leftrightarrow R_1^2=\frac{25\cdot9}{20}=\frac{5\cdot9}{4}$

$R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

Тогда $R_2 = \frac{4}{5}R_1 = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$; $AC = \frac{5}{3}R_2 = \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

5. $\triangle ACD$ (прямоуг., $\angle ACD = 90^\circ$):
$AD^2 = AC^2 + CD^2$ (т. Пифагора)
$AD^2 = 20 + 4 = 24$
$AD = 2\sqrt{6}$
$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

6. $\triangle ABC$:
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot CA = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
Тогда $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACD} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

7. $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ (по двум углам):
1) $\angle ADB = \angle CDE$ (вертик.)
2) $\angle DAB = \angle DCE$ (опираются на дугу EB)
Тогда $\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle CDE}} = \left(\frac{AD}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6 \Rightarrow S_{\triangle CDE} = \frac{S_{\triangle ADB}}{6} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

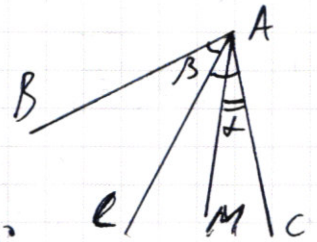
8. $\triangle CDA \sim \triangle EDB$ (по двум углам):
1) $\angle CDA = \angle EDA$ (вертик.)
2) $\angle ACD = \angle DEB = 90^\circ$
Тогда $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BED}} = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{4\cdot 6}{9} = \frac{8}{3} \Rightarrow S_{\triangle BED} = \frac{S_{\triangle ACD}\cdot 3}{8} = \frac{2\sqrt{5}\cdot 3}{8} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$

9. $S_{ACEB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle CED} + S_{\triangle BED} + S_{\triangle ADB} = 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{4} + 3\sqrt{5} =$
$= \sqrt{5}\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 3\right) = \frac{8+2+3+12}{4}\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

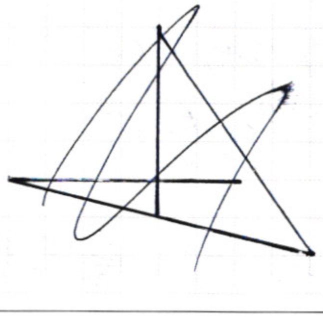
Ответ: $R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $R_2 = \frac{6}{5}\sqrt{5}$; $S_{ACEB} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

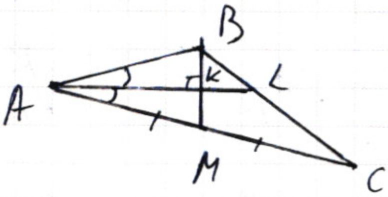
№2.

Заметим, что из одного угла не могут выходить биссектриса и медиана, которые перпендикулярны между собой:
Док-во:
Пусть есть угол $\angle BAC$.
AL-биссектриса; AM-медиана
Пусть $\angle CAL = \angle LAB = \beta$
Тогда $2\beta < 180^\circ \Rightarrow \beta < 90^\circ$
Пусть меньший угол, который образует медиана равен α
Тогда если $AL \perp AM$, то $\angle LAM = 90^\circ$
$\angle LAM = \angle LAC - \angle MAC = \beta - \alpha$
Но $\beta < 90^\circ$, а $\alpha > 0 \Rightarrow \beta - \alpha < 90^\circ$. Значит AL не перпендик. AM



Рассмотрим треугольник одна из биссектрис перпендикулярна медиане (выходят не из одной точки):





$\triangle ABC$; BM-медиана; AL-биссектриса; $BM \perp AL$.

Пусть $BM \perp AL = K$

Заметим, что в $\triangle ABM$ AK является и биссектрисой и высотой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $\triangle ABM$ - равнобедр. и $AB=AM$.
Но $AM=MC$, т.к. BM - медиана $\Rightarrow AB=AM=MC$
Обозначим длину AB за x. Т.е. $AB=AM=MC=x$
По основному св-ву биссектрисы $\frac{BL}{BC}=\frac{AB}{AC}$. Но $\frac{AB}{AC}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.
Значит $LC=2BL$
Обозначим длину BL за y. Т.е. $BL=y$, $LC=2y$

Периметр такого треугольника равен $P_{\triangle ABC}=900$ (по условию)
Но в то же время $P_{\triangle ABC}=AB+BC+AC=3x+3y=3(x+y)$

$3(x+y)=900 \Rightarrow x+y=300$.

Зададим ограничения:
1) $AB+AC>BC \Leftrightarrow x+2x>3y \Leftrightarrow x>y$
2) $AB+BC>AC \Leftrightarrow x+3y>2x \Leftrightarrow y>\frac{x}{3}$
3) $BC+AC>AB \Leftrightarrow 2x+3y>x \Leftrightarrow 3y>-x$ - выполн. всегда т.к. $y\in\mathbb{N}$

Получаем:

$$\begin{cases} x+y=300 \\ x>y \\ y>\frac{x}{3} \end{cases};\ \begin{cases} y=300-x \\ x>300-x \\ 300-x>\frac{x}{3} \end{cases};\ \begin{cases} y=300-x \\ x>150 \\ 300>\frac{4x}{3} \end{cases};\ \begin{cases} y=300-x \\ x>150 \\ x<\frac{900}{4} \end{cases};\ \begin{cases} y=300-x \\ x>150 \\ x<225 \end{cases}$$

Получаем, что $\begin{cases} x\in(150;225) \\ y=300-x \end{cases}$. Всего возможных

значений x $\underset{(x\in\mathbb{N})}{74}$, y ~~получается~~ определяется однозначно, исходя из x.

Всего получается 74 треугольника с различным набором упорядоченных длин сторон. Остальные конфигурации получаются поворотом или отражением этих треугольников

Ответ: 74.

№6.

$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

1) $y=8x-6|2x-1|$ $\quad D(y)\ x\in R$

Если $2x-1 \geq 0$;
$x \geq 0,5$

$y = 8x - \cancel{6}12x + 6 \Leftrightarrow y = -4x + 6$ $D(y)$ $x \in R$

Функция линейная график прямая:

x	0,5	1
$y=-4x+6$	4	2

Если $2x-1 < 0$
$x < 0,5$

$y = 8x + 12x - 6 \Leftrightarrow y = 20x - 6$ $D(y)$ $x \in R$

x	0,5	-0,5
$y=20x-6$	4	-16

2) $y = -8x^2 + 6x + 7$ $D(y)$ $x \in R$

Функция квадратичная, график - парабола, ветви направлены вниз.

$x_в = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$; $y_в = y(x_в) = \frac{-8 \cdot 9}{8 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$
$= 7\frac{9}{8}$ при $x = -\frac{1}{2}$ $y = 2$; при $x = \frac{1}{2}$ $y =$

x	-1	0	1
$y=-8x^2+6x+7$	-7	7	5

График на следующей странице.

$y = ax + b$

Если $a = 0$, то $y = b$ $D(y)$ $x \in R$ - график прямая, паралл. оси OX

Если $a \neq 0$, то $y = ax + b$ $D(y)$ $x \in R$ - функция лин., график - прямая

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

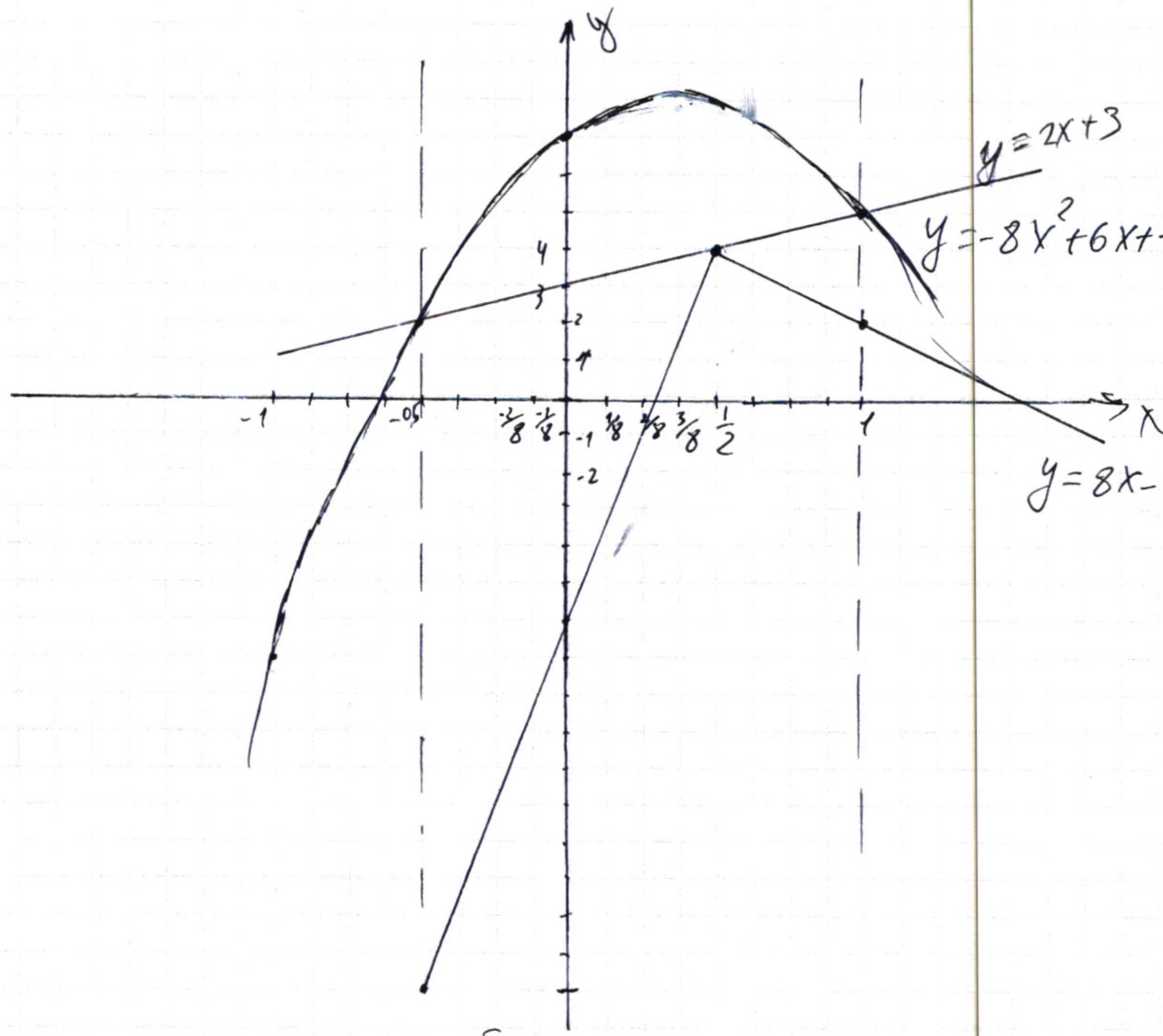
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Единичные отрезки осей Ox и Oy не пропорциональны.

При $a=0$ условию не удовлетворяет ~~все~~ ни одно значение b, т.к. $b \in [-\infty; -2]$, чтобы $ax+b \le -8x^2+6x+7$, но $b \in [-4; +\infty)$, чтобы $ax+b \ge 8x-6|2x-1|$ (всё на участке $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

~~Т.к. на получившемся графике нет прямой, которая проходила~~ На получившемся графике есть только одна прямая, которая лежит ниже параболы и выше графика ф-ции с модулем

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Эта прямая $y = 2x + 3$

Ответ: $(2; 3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

(d_n) - геом. пр. $d_0 = a$, $d_1 = a\cdot q = b$, $d_2 = a\cdot q^2 = c$ $\{d_n\}$

$a = d_1$, $b = d_2$, $c = d_3$ $\quad ax^2 - 2bx + c = 0$

По т. Виета: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = 2b \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36$
$x^2 - 2\cdot 6\cdot x + 6^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$a\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot q\cdot x + a\cdot q^2 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{a}$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$

$\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = 2\sqrt{6}$

$x = q$ и $x = \cancel{a\cdot q}\; d_4 = a\cdot q^3$

$q = a\cdot q^3$

$1 = a\cdot q^2$ $\quad (c = a\cdot q^2 = 1)$

№3 $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 \le 0 \end{cases}$

$\to x(y-1) - 6(y-1) = (x-6)(y-1)$

$x - 6y = \sqrt{(x-6y)(y-1)}$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 \le 0$

~~$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y - 16 \le 0$~~

$2(y^2 - 2y + 1) + 18 + x^2 - 12x \le 0$

$2(y-1)^2 + (x^2 - 12x + 36) - 18 \le 0$

$2(y-1)^2 + (x-6)^2 \le 18$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - 1 \ge 0 \\ x - 6y \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y - 1 \le 0 \\ x - 6y \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - 1 > 0 \\ x - 6y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y - 1 < 0 \\ x - 6y < 0 \end{cases} \\ x - 6y = 0 \\ y - 1 = 0 \end{array}\right.$

$x - 6y = a$
$y - 1 = b$

$\begin{cases} 2b^2 + a^2 \le 18 \\ a = \sqrt{ab} \end{cases}$; $\begin{cases} 2b^2 + ab \le 18 \\ a = \sqrt{ab} \end{cases}$; $\begin{cases} b(2b + a) \le 18 \\ a = \sqrt{ab} \end{cases}$

$\begin{cases} 2b^2 + a^2 = 18 \\ a = \sqrt{ab} \end{cases}$ $\boxed{a \ge 0}$ Пусть $a = 0$ Тогда $b^2 = 9$, $b = \pm 3$

Если $a \ne 0$: $a = \sqrt{ab} \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a \ne 0;\ a \ge 0)$

$\sqrt{a} = \sqrt{b} \to 2b^2 + b^2 = 18 \to b^2 = 6 \to b = \pm\sqrt{6}$

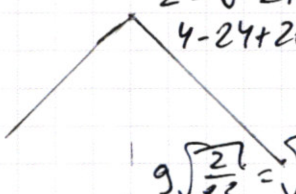
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2

$2=\sqrt{-2+6}$

$4-24+20=0$



$\beta-\alpha<90$

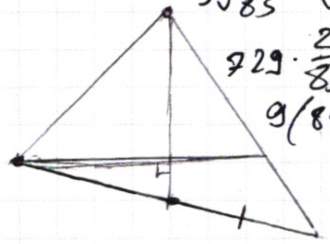
$\begin{cases}\alpha>0^\circ\\2\beta<180^\circ\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>0^\circ\\\beta<90^\circ\end{cases}$

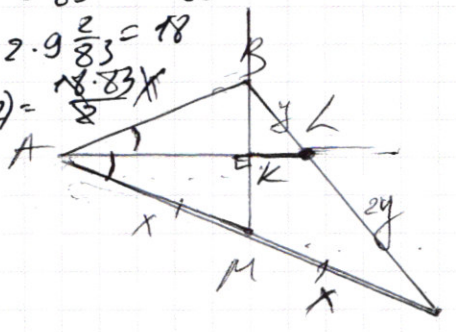
$\beta-\alpha<90^\circ$

$9\sqrt{\frac{2}{83}}=\sqrt{27\sqrt{\frac{2}{83}}+3\sqrt{\frac{2}{83}}}$

$729\cdot\frac{2}{83}+2\cdot9\frac{2}{83}=18$

$9(81+2)=\frac{18\cdot83}{2}$





$\triangle ABM$ – р/б, т.к. AK – бис. и AK – высота ($AK\perp BM$)

$P=3x+3y=3(x+y)=900$

$x+y=300$

$\frac{900}{4}=\frac{450}{2}=225$

$3x>3y$

$x>y$

$600-2y=3y$

$5y=600$

$y=120$

$2x=3y$

$x+y=300$

$x=300-y$

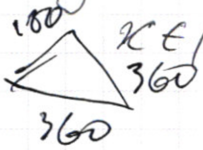
$x+3y>2x$

$3y>x$

$y>\frac{x}{3}$

$\begin{cases}x>y\\y>\frac{x}{3}\\x+y=300\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>300-x\\300-x>\frac{x}{3}\\\cancel{x=300+y}\\y=300-x\end{cases}$;

$\begin{cases}x>150\\300>\frac{4x}{3}\\y=300-x\end{cases}$; $\begin{cases}x>150\\x<\frac{900}{4}\\y=300-x\end{cases}$



$x\in(150;225)$.

$x=3y$ $2x+3y>x$

$4y=300$ $3y>-x$

$y=75$

$x=225$

$y=75$

$(x-6y)(y-1)$

$x(y-1)-6(y-1)$

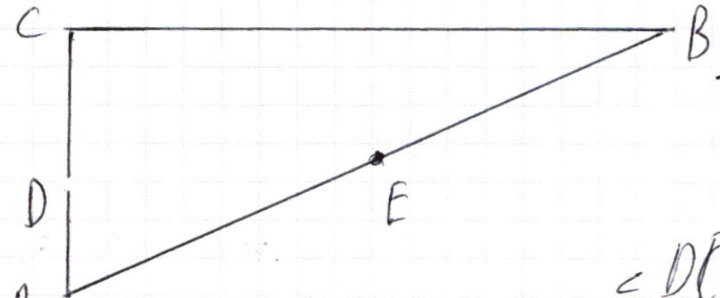
т.к. $y,x\in\mathbb{Z}$, то $x\in[151;224]$

$224-150$

$\begin{array}{r}224\\-150\\\hline\boxed{74}\end{array}$

Если $x\in\mathbb{Z}$, то $\Rightarrow y\in\mathbb{Z}$, т.к. $y=300-x$

№4



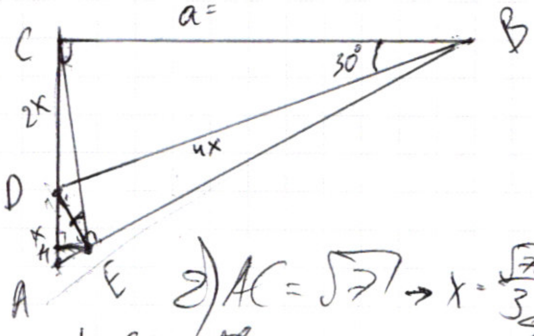
$\begin{array}{r}224\\-150\\\hline74\end{array}$

$tg\angle BAC$ – ?

$\angle CED=30^\circ$

$\angle DCB=90^\circ$, $\angle DEB=90^\circ$

$EDCB$ – вписанный, тогда $\angle CED=\angle CBD=30^\circ$



$BC^2=BD^2-DC^2=16x^2-4x^2=12x^2$

$BC=2\sqrt{3}x$

$tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{3}x}{3x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) $AC=\sqrt{7}\to x=\frac{\sqrt{7}}{3}$

3) $tg\angle BAC=\frac{ED}{AE}$, $tg\angle E$

$S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot EH$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)-18=0 \end{cases}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$a=9b$

$x-6=9y-9$

$x=9y-3$

$(9y-9)^2+2(y-1)^2=18$

$83(y-1)^2=18$

$y-1=\sqrt{\frac{18}{83}}=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1$

$x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6$

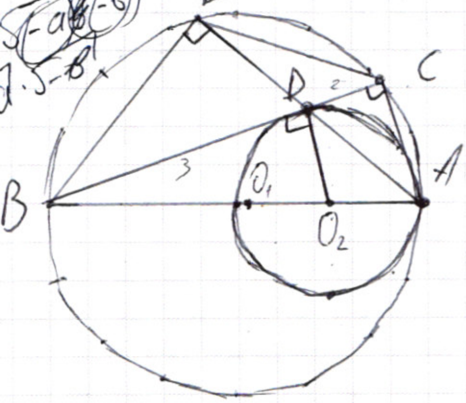
$27 \times 27 = 189, 54, 729$

738

№5

$a-6b=\sqrt{(-a)(-b)}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$



$CD=2$; $BD=3$

R_1, R_2 - ? S_{ABCEC} - ?

$83 \times 9 = 747$

$27\sqrt{\frac{2}{83}}$ ~~$-6y$~~ $-18\sqrt{\frac{2}{83}}$

$9\sqrt{\frac{2}{83}}=\sqrt{27\sqrt{\frac{2}{83}}\cdot 3}$

$27\frac{2}{83}+9\cdot\frac{2}{83}=18a$

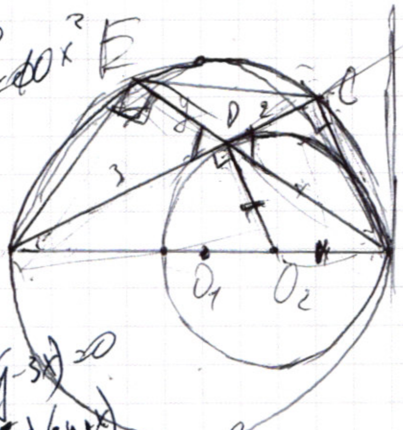
$9(1+ \quad =\frac{18\cdot 83}{2}=9\cdot 83$

$6y^2-xy+x^2=0$

$D=x^2+x^2\cdot 6 \cdot 4 \cdot x^2$

$6y^2-xy-x^2=0$

$6y^2 \quad x^2+4$



$\triangle ACB \sim \triangle O_2DB$

$\frac{AB}{BO_2}=\frac{AC}{O_2D}=\frac{5}{3}$; $AC=\frac{5}{3}O_2D=\frac{5}{3}R_2$

$\frac{AB}{BO_2}=\frac{2R_1}{2R_1-R_2}=\frac{5}{3}$

$AC=\frac{5\cdot 4}{3\cdot 5}R$

$6R_1=10R_1-5R_2$

$5R_2=4R_1 \rightarrow R_2=\frac{4}{5}R_1$

$(y+2x)(y-3x)=0$

$(2y-4x)(3y+x)$

$6y^2-x^2$

$AC^2+BC^2=AB^2$

$\frac{16}{9}R_1^2+25=4R_1^2$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$\frac{x}{3}=\frac{2}{y}=\frac{AC}{BE}$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x-6=a$

$y-1=b$

$x-6-6y+6=a-6b$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$a-\sqrt{ab}-6b=0$

$a+\sqrt{ab}-6b$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-3\sqrt{b})=0$

$t^2-tq-6q^2$

$D=q^2+4\cdot 6q^2=25q^2$

$t=\frac{q-5q}{2}=-2q$

$t=\frac{q+5q}{2}=3q$

$5+0{,}5+0{,}75=6{,}25$

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$6\frac{1}{4}$

$\frac{36-16}{9}R_1^2=25$

$\frac{20}{9}R_1^2=25$; $R_1^2=\frac{25\cdot 9}{20}=\frac{9\cdot 5}{4}$

$R_1=\frac{3}{2}\sqrt{5}$

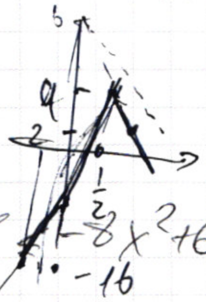
$R_2=\frac{24\cdot 3}{5\cdot 8}\sqrt{5}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$2x-1 \ge 0$;

$x \ge \frac{1}{2}$



$8x-12x+6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$-4x+6 \le ax+b \le$

$x \ge \frac{1}{2}$: $y = 8x-12x+6$

$y = -4x+6$

x	0	1
$y=-4x+6$	6	2

$x \le \frac{1}{2}$ $y = 8x+12x-6$

$y = 20x-6$

$\frac{-6}{-16} = \boxed{\frac{3}{8}}$

x	0	-1
$y=20x-6$	-6	-26

$-8x^2+6x+7$

$D = 36-4\cdot7\cdot(-8)$

$-8x^2+6x+7$

$8x^2-6x-7$

$D = 36-4\cdot8\cdot(-7) =$

$= 36+224 = 260$

$32 \cdot 7 = 224$

$y = -8x^2+6x+7$

$x_в = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$y_в = -\frac{9}{8}$

$y_в = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8}$

$-8\cdot\frac{9}{64} + \frac{6\cdot3}{8} + 7 =$

$= -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= 9$

№7 $f(x)$ $D(y)$ $x>0$; $x \in R$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{5}\right]$, p-простое

$2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$

$x-6y = 5$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$a^2+2b^2 = 18$

$a-6b-6 = \sqrt{ab}$

$ab \ge 0$

$a-6b-6 \ge 0$

$a - \sqrt{ab} + 6b =$

$\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$-4-6\cdot(2) = -4+(-12)$

$f(2) = 1$ $f(7) = 3$ $f(13) = 6$ $f(19) = 9$

$-8\cdot\frac{1}{4} - 3 + 7 = -2-3+7 = 2$

$f(3) = 1$ $f(11) = 5$ $f(17) = 8$

$f(5) = 2$

$x = p$, то $\left[\frac{x}{2}\right] + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(1)(2-1) = 0$

$-8\cdot\frac{1}{4} + 3x7$

$f(x/y) = f(1 + \frac{x-y}{y})$, $x > y$

$x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$a-6-6y = x-6-6(y-1) = x-6-6y+6$

$= x-6y$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$a^2 + 2b^2 = 18$

$a-6b-6 = \sqrt{ab}$

$a-6b-6 \ge 0$

$a \ge 6(b-1)$

$(a-6b-6)(a-6b-6) = ab$

$a^2-6ab-6a-6ab+36b^2-36b-6a+36b+36 = ab$

$a^2-13ab-12a+72b+36b^2+36 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)