



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

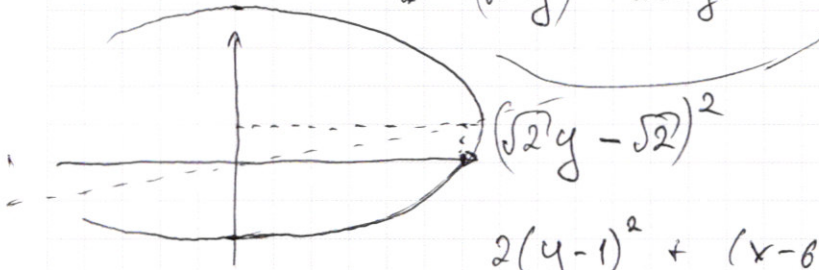
7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(\sqrt{2}y)^2 - 2\sqrt{2}y\sqrt{2} + 2 + x^2 - 12x + 18$$



$$2(y-1)^2 + (x-6)^2 = 18$$

$$x^2 - 2 \cdot 6x + 36$$

$$(x-6)^2 - 18$$

$$2 + (x-6)^2 = 18$$

$$x-6 = \pm 4 \quad x = 2$$

$$x = 10$$

$$y > 6y$$

$$y \leq 6$$

$$x=6$$

$$y-1 = \pm 3$$

$$y = 4$$

$$y = -2$$

$$y=1 \quad x = (3\sqrt{2}+6)$$

$$x=0 \Rightarrow 2(y-1)^2 + 36 = 18$$

$$x^2 - 13xy + 6y + x - 6 + 36y^2 = 0$$

$$x^2 - 12xy + (6y)^2 + 6y + x - 6 - xy = 0$$

$$(x-6y)^2 - 6(-y+1) + x(1-y) = 0$$

$$(x-6y)^2 + (1-y)(x-6) = 0$$

$$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6)$$

$$(y-1)(x-6) \neq 0$$

$$2\sqrt{2}(y-1)(x-6)$$

$$(\sqrt{2}(y-1))^2 + (x-6)^2 = 18$$

$$2\sqrt{2}(y-1)(x-6) = 2\sqrt{2}(x-6y)^2 \quad 6y^2 = -4y+1$$

$$(\sqrt{2}(y-1) + (x-6))^2 = 18 + 2\sqrt{2}(x-6y)$$

$$(\sqrt{2}(y-1) - (x-6))^2 = 18 - 2\sqrt{2}(x-6y)^2 \quad y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x-6y = \sqrt{xy}$$

$$x=6 \quad y-1=3 \quad y-1=-3$$

$$1 + \text{ctg}^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\sin = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{\text{tg}^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{tg}^2}{\text{tg}^2 + 1}} \quad \text{tg} = \frac{\text{tg}}{\sqrt{\text{tg}^2 + 1}}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



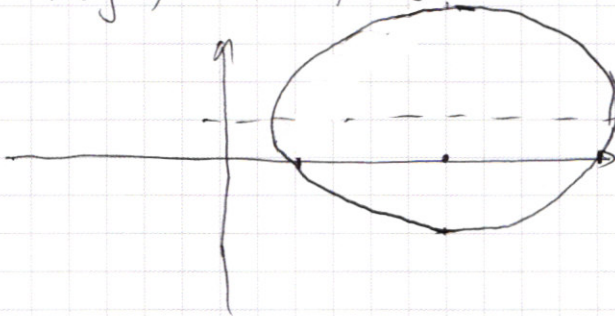
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ 2x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x \geq 6y \implies (x - 6y)^2 = (y - 1)(x - 6)$$

$$2(y - 1)^2 + (x - 6)^2 = 18$$



Ответ:  $\&$  (2; 0)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{BECA} = S_{BED} + S_{ECD} + S_{CDA} + S_{BDA}$$

$\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ , как впис. углы, опир. на диаметр.

$$S_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$S_{CBA} = \frac{1}{2} CB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 5\sqrt{5}$$

$$S_{ADB} = S_{CBA} - S_{CDA} = 3\sqrt{5}$$

$$\angle EBC = \angle CAE = \alpha$$

как впис., опир. на одну хорду.

$$\text{Из } \triangle ADC: \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 6\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

т.к.  $\alpha < 90^\circ$  (т.к.  $\angle BCA = 90^\circ$ ),

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{5} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\text{Из } \triangle BED: ED = 3 \cdot \sin \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$BE = 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$S_{BECA} = S_{ABC} + S_{BEC} = 5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{3\sqrt{5}}{2}; r = \frac{6\sqrt{5}}{5}; S_{BECA} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$



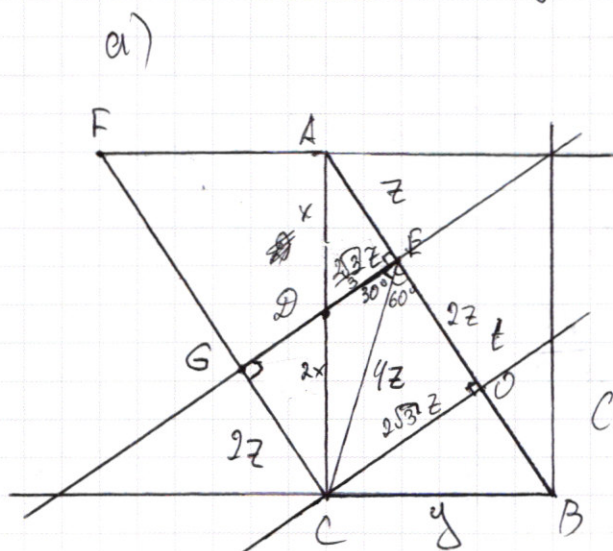


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 4.



$$\begin{aligned} AD &= x \\ AC &= 3AD = 3x \\ DC &= 2x \end{aligned}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\frac{z+t}{x} = \frac{3x}{z}$$

$$CG = EO, \text{ т.к. } EOCG - \text{прямоугольник (все углы равны } 90^\circ)$$

$$EO = \sin 60^\circ \cdot 4z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4z = 2\sqrt{3}z$$

$$\text{Ответ: } \boxed{\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}z}{3z} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Обознач. сторон  
отметим на рис.

$$CF \parallel AB$$

$$AF \parallel CB$$

$$CO \parallel DE$$

$$\angle EGC = \angle GEO = 90^\circ$$

как выпук.

$$\angle GCO = \angle CEO = 90^\circ$$

б)

$$AC = \sqrt{27} = 3x$$

$$x = \frac{\sqrt{27}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9} + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2\sqrt{3}z}{3x} = \frac{\sqrt{3}z}{3\sqrt{27}}$$

$$z = \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

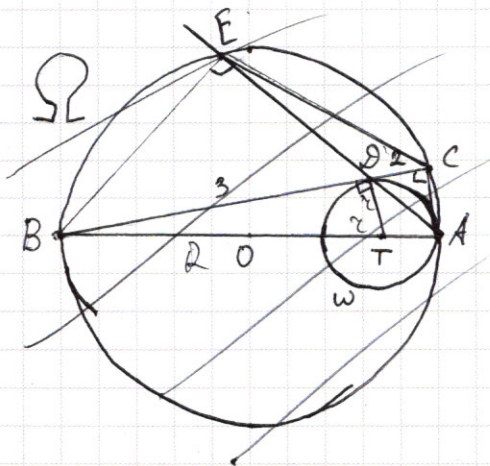
$$S_{CED} = S_{CEG} - S_{COG} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \boxed{S_{CED} = 2\sqrt{3}}$$



# Задача №5



R-радиус  $\Omega$

r-радиус  $\omega$

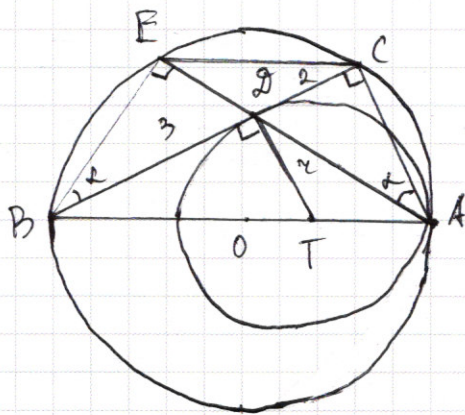
O-центр  $\Omega$

T-центр  $\omega$ .

$\angle BCA = 90^\circ$ , как вис. опущ. на диаметр

$\angle BCT = 90^\circ$ , т.к. BC-кас.-ая.

$\triangle BCT \sim \triangle BCA$



$$\frac{5}{3} = \frac{2R}{2R-r}$$

$$\frac{3}{5} = 1 - \frac{r}{2R}$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{4}{5}, \quad r = \frac{4}{5}R$$

Из подобия:

$$\frac{CA}{r} = \frac{5}{3}$$

$$CA = \frac{5}{3}r$$

Из прямоуг.  $\triangle BCA$ :  $4R^2 = 25 + \frac{25r^2}{9}$

$$4R^2 = 25 + \frac{25 \cdot 16R^2}{25 \cdot 9}$$

$$36R^2 = 25 \cdot 9 + 16R^2$$

$$420R^2 = 25 \cdot 9$$

$$R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{24}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\cancel{R = \frac{3\sqrt{5}}{2}}; \quad R = \frac{3\sqrt{5}}{2}; \quad r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

см. чертеж



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1.

$a, b, c$

$$b = a \cdot n$$

$$c = a \cdot n^2$$

$$d = a \cdot n^3$$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{an \pm \sqrt{a^2 n^2 - a^2 n^2}}{a} =$$

$$= n = d = a \cdot n^3$$

$$n = a \cdot n^3$$

$$an^2 = 1$$

Ответ: 1.

Задание №2.

Пусть

$AT$  - биссектр,  $BM$  - медиана.

$$\frac{BT}{AB} = \frac{TC}{AC}$$

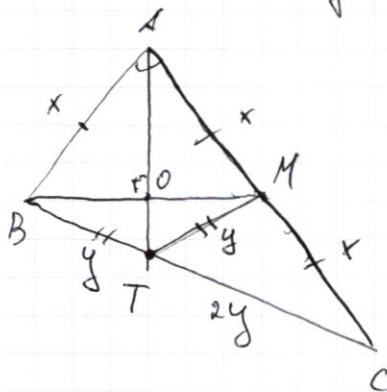
$$AB = x \quad BT = y$$

$$TC = \frac{BT \cdot AC}{AB}$$

$AO$  - высота и биссектр. в  $\triangle ABM \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = AM = MC = x; BO = OM$$

$TO$  - высота и медиана



$$\text{в } \triangle BMT \Rightarrow BT = TM = y$$

$$TC = \frac{y \cdot 2x}{x} = 2y$$

$$P_{ABC} = 3(x+y) = 900$$

$$x+y = 300$$

$$\begin{aligned}
 3x > 3y &\Rightarrow x > y \\
 3y + x > 2x &\Rightarrow y > \frac{x}{3} \\
 3y + 2x > x &\Rightarrow \begin{cases} 3y + x > 0 \\ x + y = 300 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 300 \overline{) 4} \\
 \underline{28} \phantom{0} \\
 20 \phantom{0} \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}$$

$$x + y = 300 \Rightarrow x = 300 - y$$

$$x > y \Rightarrow 300 > 2y \Rightarrow y < 150$$

$$y > \frac{x}{3} \Rightarrow y > 100 - \frac{y}{3} \Rightarrow y > \frac{300}{4} = 75$$

$$76 \leq y < 150$$

Кол-во чисел  $y$ , удовл. условию

$$150 - 76 = 74$$

При выборе каждого  $y$  однозначно

фиксируется  $x$ , чтобы удовл. условию  $x + y = 300$   
 $\Rightarrow$  Треугольников со сторонами  $x, 2x, 3y$ ,  
 удовлетворяющих условию задачи ~~точно~~  
~~ровно~~ ровно 74. ~~штук~~.

Ответ: 74.

Задача ~ 3.

$$\begin{cases}
 x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\
 x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0
 \end{cases}$$

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6y \\ x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6y \\ x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0 \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 6

$$8x - 6(2x - 1) \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right):$$

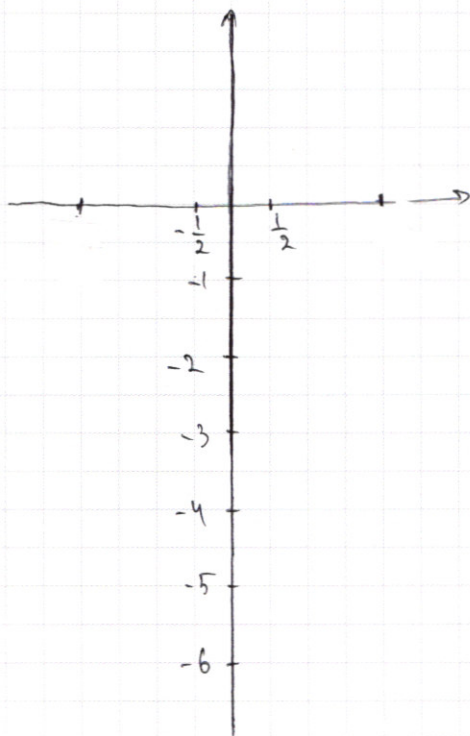
$$D = 36 - 32 \cdot 7 = 36 - 224 = -288$$

$$8x + 6(2x - 1) \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$20x - 6 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$$

$$y_0 = \frac{-8 \cdot 9}{8 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$$







черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

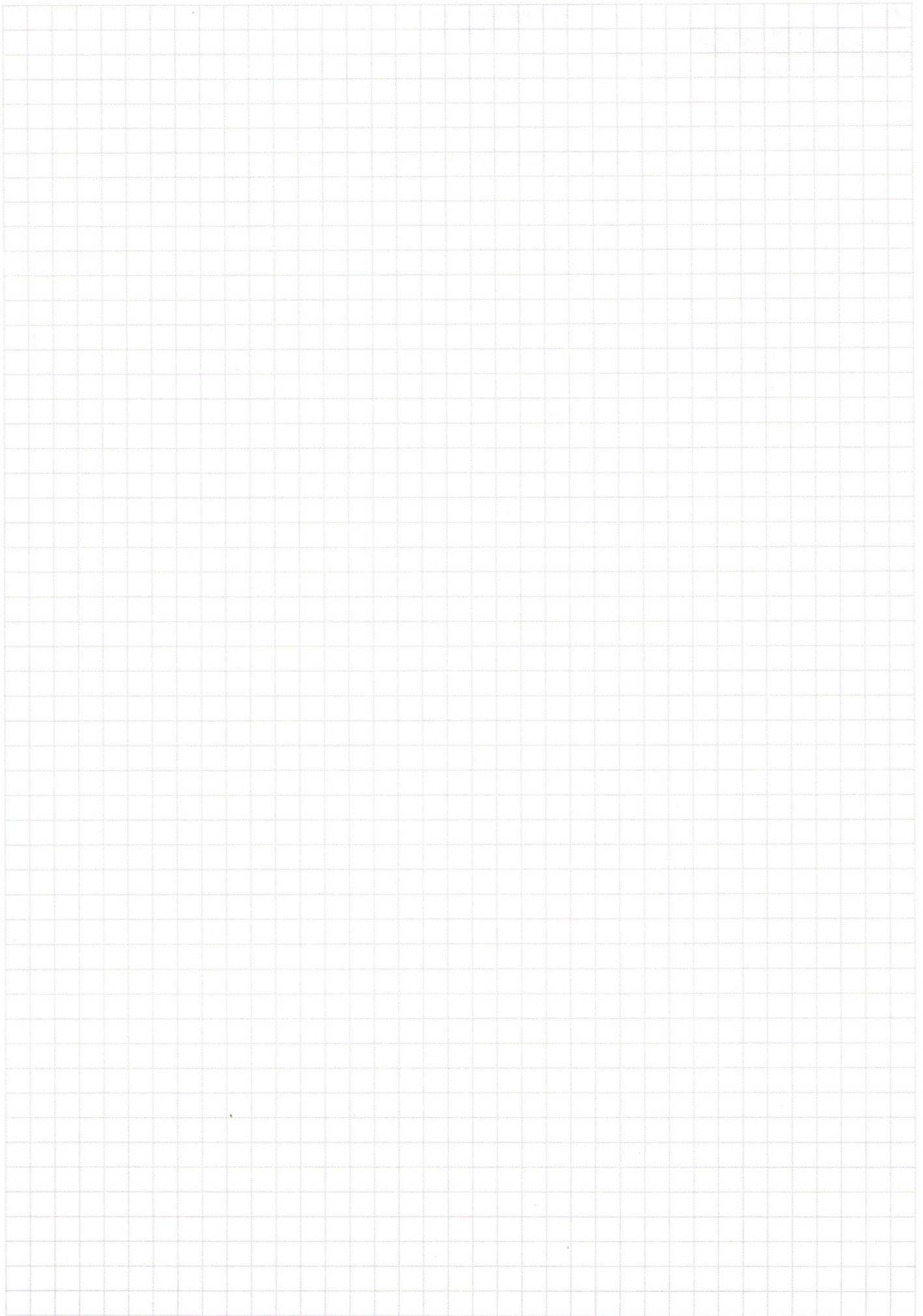
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6)$$

$$(x-6)^2 = 18 - 2(y-1)^2$$

$$(6-6y)(2x-6y-6) = (y-1)(x-6+2(y-1)) - 18$$

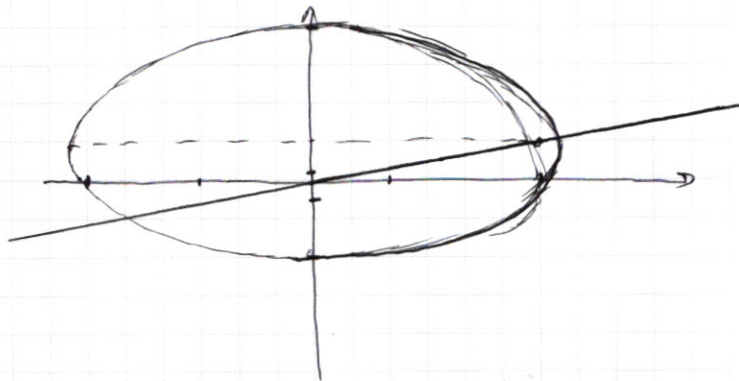
$$6(1-y)(2x-6y-6) = (y-1)(x+2y-8) - 18$$

$$18 = (y-1)(x+2y-8 + 12x-36y-36)$$

$$18 = (y-1)(13x-34y-44)$$

$$(x-6-y+1)(x-6+y-1) = 18 - 3(y-1)^2$$

$$(x-y-5)(x+y-7) = 3(6-(y-1)^2)$$



$$(x-6y)^2 = y(x-6) + (6-x) = y(x-6) - (x-6) = (x-6)(y-1)$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3y + 9y^2 + 2xy^2 - 7xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$(x-3y)^2$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4y + 16y^2 + 20y^2 - 5xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$(x-4y)^2$$

$$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x$$

$$x^2 - 2 \cdot 6 \cdot xy + 36y^2 + 6y + x - xy$$

$$x^2 - 2 \cdot 6 \cdot xy + 36y^2 + y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1 + 8y + x - xy - 1$$

$(y-1)^2$

