МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№2 - продолжение)

Пусть $AB = a \Rightarrow BC = 2a$. $\frac{AC}{3} = b$. Тогда $1200 = 3a + 3b = 3(a+b) \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 400$. Тогда, т.к. $a \in N \Rightarrow b \in N$. По нер-ву треугольника:

$$\begin{cases} 3b + a > 2a \\ 3a > 3b \\ 3b + 2a > a \end{cases} \quad (1)$$

Третье нер-во верно всегда при $a \in N$. Тогда (1) примет вид:

$$\begin{cases} 3b - 1 \geq a \\ a \geq b + 1 \end{cases} \quad (\text{т.к. } a, b \in N)$$

$$b + 1 \leq a \leq 3b - 1$$

$$a = 400 - b \Rightarrow \begin{cases} 2b \leq 399 \\ 4b \geq 401 \end{cases} \Rightarrow \underline{101 \leq b \leq 199}$$

Тогда, как было сказано ранее, достаточно взять треугольник со сторонами a и $2a$ при заданном b и он удовлетворяет условию (b удовлетворяет условию нер-ва треугольника)

Тогда, т.к. $b \in N$ и $101 \leq b \leq 199$, то всего есть 99 таких треугольников.

Ответ: 99.

№3

Пусть $x - 1 = a$, $y - 2 = b$. Тогда несложно заметить, что $y - 2x = b - 2a$,

$\sqrt{2xy - 2x - y + 2} = \sqrt{ab}$, $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 2a^2 + b^2$

Тогда $\begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 0 \end{cases}$

(см. далее на стр. 3)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3 (продолжение)

Т.к. $2a^2+b^2 \geq 0$, т.к. $a, b \in R$, то, $2a^2+b^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

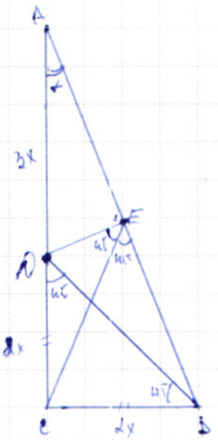
При $a=b=0$: $b-2a=0=\sqrt{ab}$ - верно. Тогда, $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

(Можно даже проверить:

$$\begin{cases} 2-2\cdot 1=\sqrt{(1-1)(2-2)}=0 \\ 2\cdot(1-1)^2+(2-2)^2=0 \end{cases} \text{- верно)}$$

Ответ: $(1;2)$

№4



а) 1) Т.к. $DE \perp AB$ и $\angle C = 90^\circ \Rightarrow DEBC$ - вписс $\Rightarrow$ т.к. $\angle DEB = 90^\circ = 2\cdot 45 = 2\cdot\angle DEC \Rightarrow CD = BC$ (из вписанности $\angle DBC = \angle DEC = 45$ и т.к. $\angle C = 90^\circ$, $\angle CDB = 45^\circ$)

2) $AD = 3x \Rightarrow AC = 5x \Rightarrow CD = 2x \Rightarrow$ по п. 1 $\Rightarrow BC = 2x$.

3) $tg\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

б) 4). $\angle BAC = \angle A = \alpha \Rightarrow ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{25}{4}+1 = \frac{29}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

5). По п. 4 и т.к. $\angle DEA = 90^\circ$ и $AD = 3x \Rightarrow DE = \frac{6x}{\sqrt{29}}$ ($DE = AD\sin\alpha$)

6) Из вписанности $\Rightarrow \angle CDE = 180 - \angle CBE = 180 - 90 + \angle BAC = 90 + \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle CDE = \sin(90+\alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

(т.к. $0 < \alpha < 90$)

7) По т. Пифагора и по п. 2 $\Rightarrow 25x^2 + 4x^2 = 29 \Rightarrow$ т.к. $x>0$, $x=1$

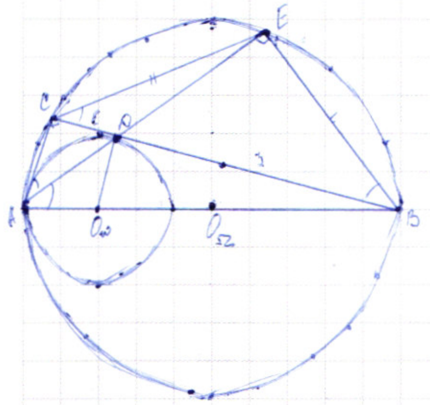
8) $S_{CDE} = \frac{CD\cdot DE\cdot \sin\angle CDE}{2} = \frac{2x\cdot 6x\cdot 5}{2\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}} = \frac{2\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 29} = \frac{30}{29}$.

Ответ: $\frac{30}{29}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

1) По лемме Архимеда E-середина $\overset{\frown}{CB}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AE- биссектрисса $\angle CAB$ и $CE = BE$ (из вписанности)

2) По п.1 $\Rightarrow$ $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$ (по св-ву биссектриссы)

3) По т. Пифагора (пусть $AC = x$ $\Rightarrow$ $AB = 3x$) : $x^2 + 16 = 9x^2 \Rightarrow$
(т.к. AB-диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90°$)

$\Rightarrow x = \sqrt{2} = AC$

4) По п. 3 $\Rightarrow$ $AB = 3\cdot\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\underline{R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

5) O_ω, O_Ω - центры ω и Ω соответственно.

6) Т.к. BC касается ω $\Rightarrow$ $O_\omega D \perp BC$ $\Rightarrow$ т.к. $O_\omega D \perp BC$ и

$AC \perp BC$ $\Rightarrow$ $\frac{O_\omega D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ $O_\omega D = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{r_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$

7) Пусть $\angle CAB = \alpha$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

8) Из вписанности ACEB: $\sin\angle CEB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\angle CEB = -\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = -\frac{1}{3}$
(т.к. $\angle CEB > \angle AEB = 90°$)

9) По т. cos в $\triangle CEB$: $BC^2 = 2CE^2 - 2\cos\angle CEB \cdot CE^2 =$
($CE = BE$ по п.1)

$= 2CE^2 + \frac{2}{3}CE^2 = 16$

$CE^2 = \frac{16}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $CE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

10) $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BEC} = \frac{AC \cdot BC}{2} + \frac{CE^2 \cdot \sin\angle CEB}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{3\cdot 2\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot 3} =$

$= \underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

№6.

Пусть $f(x)=ax+b$ – прямая. $g(x)=2x^2-x-1$ – парабола, выпукла вниз, $h(x)=x+|2x-1|$.

Разберёмся для начала с первым неравенством:

$2x^2-x-1 \le ax+b$.

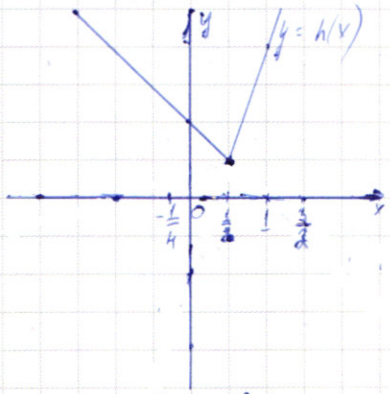
Нетрудно понять, что $\overset{\text{абсцисса}}{}$ вершина $g(x)$ лежит на $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$, т.к. она равна $\frac{1}{4}$. Тогда, т.к. $f(x)$ – прямая, а $g(x)$ – выпукла вниз, то $g(x)\le f(x)$ на $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}] \Leftrightarrow \begin{cases} g(-\frac{1}{4}) \le f(\frac{1}{4}) \\ g(\frac{3}{2}) \le f(\frac{3}{2}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1 \le -\frac{1}{4}a+b \\ \frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1 \le \frac{3}{2}a+b \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \,|\cdot 8 \\ 2 \le \frac{3}{2}a+b \,|\cdot 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -5 \le -2a+8b \\ 4 \le 3a+2b \end{cases}$ (1)

Теперь приступим ко второму нер-ву.

$h(x)=x+|2x-1| \Rightarrow$ $h(x)=\begin{cases} 3x-1, & x\ge\frac{1}{2} \\ -x+1, & x\le\frac{1}{2} \end{cases}$ (кстати, выпукла вниз)

$\frac{1}{2} \in [-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$, т.е. нам не повезло и, всё-таки, придётся её ($h(x)$) нарисовать.



Т.к. $h(x)$ выпукла вниз и $\frac{1}{2} \in [-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$, т.е. минимум $h(x)$ достигается при $x\in[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$, то $f(x)\le h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{2}) \le h(\frac{1}{2}) \\ f(-\frac{1}{4}) \le h(-\frac{1}{4}) \\ f(\frac{3}{2}) \le h(\frac{3}{2}) \end{cases}$

(т.к. $f(x)$ – прямая и, даже, если $f(\frac{1}{2}) \le h(\frac{1}{2})$ может оказаться, что $f(\frac{3}{2}) > h(\frac{3}{2})$, т.е. $f(x)$ пересечёт $h(x)$ правее (левее) $\frac{1}{2}$, но левее $\frac{3}{2}$ (правее $-\frac{1}{4}$))

$\begin{cases} \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2} \,|\cdot 2 \\ -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4} \,|\cdot 4 \\ \frac{3}{2}a+b \le \frac{7}{2} \,|\cdot 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a+2b\le 1 \\ -a+4b\le 5 \\ 3a+2b\le 7 \end{cases}$ (2)

(см. далее на стр. 6)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

Домножив в нер-х в (1) всё, что надо и сложив их, получим:

$-7 \le 28b$

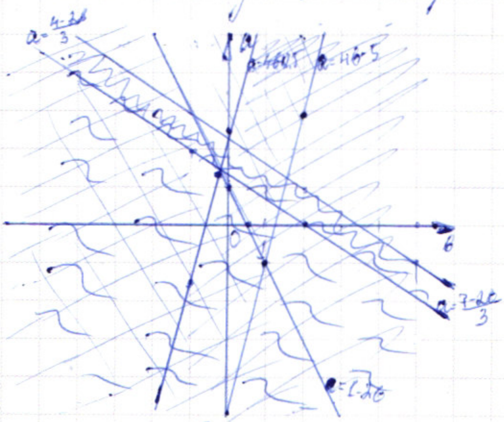
$-\frac{1}{4} \le b$

Сложив первые 2 нер-ва из (2), получим: $6b \le 6$, $b \le 1$

Запишем (1) и (2) в одну систему:

$$\begin{cases} a+2b \le 1 & (\circ) \\ -a+4b \le 5 & (\circ\circ) \\ 3a+2b \le 7 & (\circ\circ\circ) \\ -5 \le -2a+8b & (\circ\circ\circ\circ) \\ 4 \le 3a+2b & (\circ\circ\circ\circ\circ) \end{cases}$$

В bOa построим соответствующие нер-ва:



Заметим, что прямые $a=1-2b$, $a=4b+2.5$, $a=\frac{4-2b}{3}$ пересекаются в одной точке $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$ (легко подставить и проверить)

Закрасив нужные нам области, получим, нас „интересует" параллелограмм, полученный пересечением $a=4b+2.5$, $a=4b-5$ и $a=\frac{4-2b}{3}$, $a=\frac{7-2b}{3}$ и полуплоскость „ниже" $a=1-2b$. Т.к. вышеуказанные прямые пересекаются в одной точке, то только точка $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$ удовлетворяет условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$ Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

№7 (продолжение).

Тогда, если $y = 2\cdot 7$ или $3\cdot 7$, а x при этом ≤ 16, то

$f(x) < f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ и всё ок. Если y кратен 5, то $f(y) = 4$: только при $y = 20$ (т.к. $2\cdot 3\cdot 5 > 21$) т.е. при $y = 20$, $x \leq 16$ – всё ок ($f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$)

10). Теперь посмотрим, когда $x \geq 18$, т.е. $x = 18$ или $x = 20$ или $x = 21$

(т.к. в случае $x = 17$ и $x = 19$ $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$, как было сказано ранее)

Если $x = 18 = 3\cdot 3\cdot 2$, то $f(x) = 2f(3) + f(2) = 3$

Если $x = 20 = 5\cdot 2\cdot 2$, то $f(x) = 4$

Если $x = 21 = 7\cdot 3$, то $f(x) = 4$

$\Rightarrow f(y) \geq 5 \Rightarrow$ как было сказано ранее, $y \in \{11; 13; 17; 19\}$

11) Таким образом, путём странных и мутных рассуждений, мы получили, что если $f(y) = 4$, то $y \in \{14; 20; 21\}$,

т.е. при $y \in \{14; 20; 21\}$, а $x \notin \{11; 13; 14; 17; 20; 21\}$ – $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

12). Разберём, когда $f(y) = 3$, а $f(x) \leq 2$. $f(x) \leq 2 \Rightarrow$

либо $x = 5$, либо $x = 3\cdot 3$, $x = 2\cdot 2$, $x = 2\cdot 3$. $f(y) = 3 \Rightarrow y = 7$,

$y = 5\cdot 2$, $y = 5\cdot 3$, $y = 2\cdot 2\cdot 2$, $y = 2\cdot 3\cdot 3$, ($y \neq 3\cdot 3\cdot 3$, т.к. $27 > 21$), $y = 2\cdot 2\cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 6 вариантов y и 4 варианта x. $f(x) = 1 \Rightarrow x = 2$ или $x = 3$,

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

6 вариантов y и 7 вариантов x

13) $f(y) = 2 \Rightarrow f(x) = 0$ или $f(x) = 1 \Rightarrow$ $x = 1$, $x = 2$ или $x = 3$, $y = 5$, $y = 9$, $y = 4$, $y = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \times 3$ вариантов

14) $f(y) = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, $y = 2$, $y = 3 \Rightarrow 2 \times 1$ вариантов.

15) Тогда, всего вариантов $= 4\cdot(21-4) + 3\cdot(21-7) + 6\cdot 7 + 4\cdot 3 + 2\cdot 1 =$

$= \underline{166}$

Ответ: 166 вариантов

(Рассмотрим просто варианты $f(y) = 5, 4, 3, 2, 1$, $f(y) \neq 0$, т.к. иначе $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№7

1) $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

2) $f(1) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

3) По п. 2 $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

4) Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$, $p_1, \ldots p_n$ – простые числа.

$y = q_1^{\beta_1} \ldots q_k^{\beta_k}$, $q_1, \ldots q_k$ – простые числа.

Понятно, что $n, k \leq 4$ (т.к. $2^5 = 32 > 21$). Причём, если p_i (q_i) равно 11, 13, 17 или 19, то $n = 1$ ($k = 1$) и $\alpha_1 = 1$ ($\beta_1 = 1$) (т.к. $11 \cdot 2 > 21$)

5) Понятно, что $f(x)$ – сумма f от простых делителей x, каждое значение f из которых домножено на свою степень вхождения в x. Т.е. $f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$

6) Пусть какое-то $p_i \geq 11 \Rightarrow x = p_i \Rightarrow f(x) \geq f(11) = 5$. Тогда, если ни один q_i не превосходит 7, то, т.к. степень вхождения 5 и 7 не более 1 ($25, 49 > 21$), ~~то $f(y) \leq f(7) + f(5)$~~ причём 5 и 7 одновременно быть не могут, и не может быть так, что вместе с 7 есть ещё 2 множителя ($7 \cdot 2 \cdot 2 > 21$), а вместе с 5 есть ещё 3 множителя ($5 \cdot 2^3 > 21$), то $f(y) \leq f(7) + f(3)$ или $f(y) \leq f(5) + 2f(3) \Rightarrow f(y) \leq 4$. Т.е. $f(x) - f(y) > 0$.

7) По п.6 $\Rightarrow$ если $y \in \{11; 13; 17; 19\}$, а $x \notin \{11; 13; 17; 19\}$, то $f(x) - f(y) < 0$

8) Теперь рассмотрим, когда $x, y \notin \{11; 13; 17; 19\}$. Тогда в распоряжении остались 2, 3, 5 и 7 (простые множители)

9) Как было сказано ранее, если есть в разложении 7 и еще что-то, то может быть ещё только 2 или 3 $\Rightarrow f(y) = f(7) + f(3) = 4$. Причём, т.к. $f(2) = 1 = f(3)$, то не важно 2 есть или 3. Тогда, если $x \leq 16$, то в его разложении ≤ 3 множителей, причём, если множителя 3, то там нет 5-ки (т.к. $5 \cdot 2 \cdot 2 > 16$), т.е. $f(x) \leq 3f(3) = 3$, в других случаях, множителей ≤ 2, и $f(x) \leq f(5) \cdot f(3) = 3$.

(см. далее на стр.8)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11, 13, 17, 19

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

$f\left(\frac{11}{11}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{11}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1.

Пусть α — знаменатель геом. прогрессии. Тогда числа a, b, c и четвертый её член соответственно равны a, $a\alpha$, $a\alpha^2$, $a\alpha^3$.
Подставим $a\alpha^3$ в данное равенство (оно зануляется, т.к. $a\alpha^3$ — корень)

$$a^3\alpha^6 + 2ab\alpha^3 + c = 0$$

Теперь подставим b и c:

$$a^3\alpha^6 + 2a^2\alpha^4 + a\alpha^2 = 0. (1)$$

Положим, $a\alpha^2 = 0$. Тогда, т.к. данная последовательность — геом. прогрессия, то $a = b = c = a\alpha^3 = 0$. Тогда $ax^2 + 2bx + c = 0$ "при всех" x и условие выполнено.

Если $a\alpha^2 \neq 0$, то (1) делим на $a\alpha^2$:

$$a^2\alpha^4 + 2a\alpha^2 + 1 = 0$$

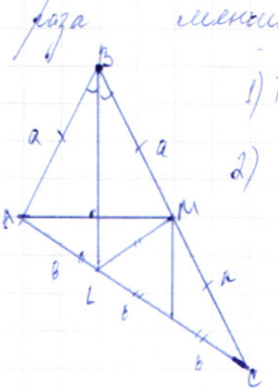
$$(a\alpha^2 + 1)^2 = 0$$

$$a\alpha^2 = -1$$

Ответ: 0 или -1.

№2.

Нетрудно заметить, что если одна сторона треугольника в 2 раза меньше другой, то условие выполнено. И наоборот, если условие выполнено, то одна сторона в 2 раза меньше другой.



1) Т.к. $BL \perp AM \Rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2}$, BL — биссектриса, AM — медиана

2) Т.к. $AB = BM = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ т.к. BL — биссектриса, и $AB = BM \Rightarrow BL \perp AM$

$\boxtimes$

(см. далее на стр.2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, \; a\alpha, \; a\alpha^2, \; a\alpha^3$

~~$a^3\alpha^{12} + 2ab\alpha^3 + c = 0$~~

~~$a \cdot a^2\alpha^6$~~

$a^3\alpha^6 + 2a^2\alpha^4 + a\alpha^2 = 0$

$a^2\alpha^4 + 2a\alpha^2 + 1 = 0$

$a\alpha^2$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

$-\frac{5}{8} \le ax + b$ $\quad -\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a + b$

$2 \le ax + b$ $\quad 2 \le \frac{3}{2}a + b$

~~$y = 2x$~~

$1 - 2b = 4b + 2c$

$6b = -\frac{1}{5}$

~~$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$~~

$3 - 6b = 4 - 2b$

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$-1 = 4b$

$b = -\frac{1}{4}$

$y - 2 - 2(x-1)$

$x - 1 = a$

$y - 2 = b$

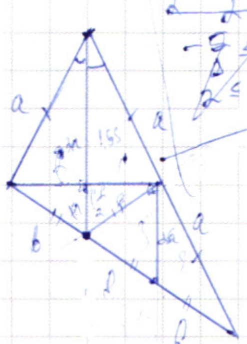
$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 =$

$-5 \le -2a + b$

$2 \le 2a + b$

$-3 \le 2b$ $\quad b \ge -1{,}5$

$\begin{cases} 5 \le -2a - b \\ 4 \le 3a + 2b \end{cases}$



$3(a+b) = 1200$

$a, b \in \mathbb{N}$

$a + b = 400$

$-b - 1 \ge -a \ge -3b + 1$

$b + 1 \le a \le 3b - 1$

$b < a < 3b$

~~$3b > 2a$~~

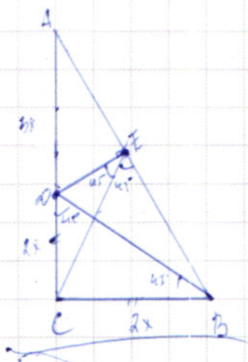
$3b + a > 2a$

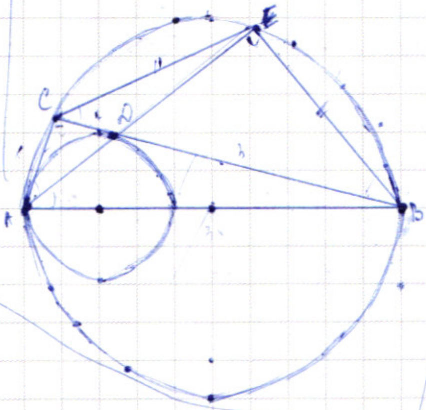
$3b > a$

$400 - b - 1 \ge b \ge 400 - 3b + 1$

$399 - b \ge b \ge 401 - 3b$

$\boxed{199 \ge b \ge 101}$



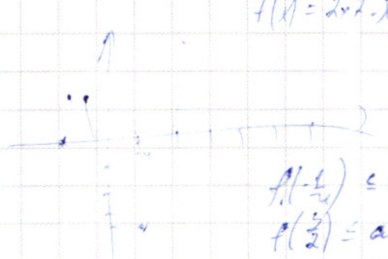


$2x^2 - x - 1 \ge ax + b$

$2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{7}{8}$

$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$

$f(x) = 2x^2 - x - 1$



$f\left(-\frac{1}{4}\right) \le ax + b$

$f\left(\frac{3}{2}\right) \le ax + b$