МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

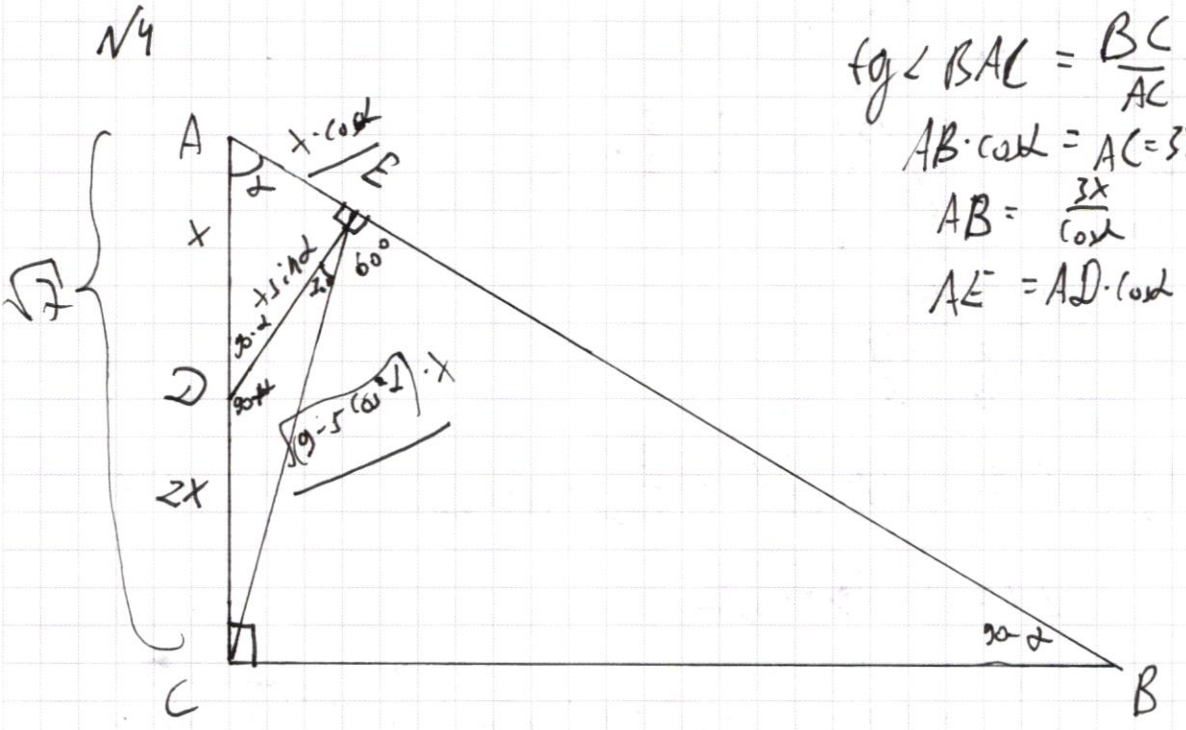
$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC}$ $\angle BAC=\alpha$

$AB\cdot\cos\alpha = AC = 3x$

$AB = \frac{3x}{\cos\alpha}$

$AE = AD\cdot\cos\alpha = x\cdot\cos\alpha$

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ($\angle A$ - общий $\angle AED = \angle ACB$)

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{x\cos\alpha}{\cancel{AC}3x} = \frac{\cos\alpha}{3}$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{x\sin\alpha}{x\cdot\alpha} = \frac{BC}{3x}$

$tg\alpha = \frac{BC}{3x}$

$\frac{DE}{BC} = \frac{\cos\alpha}{3}$ $\cancel{BC = \frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot 3}$

$CE = \sqrt{x^2\cos^2\alpha + 9x^2 - 2\cdot 3x^2\cos\alpha\cdot\cos\alpha} = x\sqrt{\cos^2\alpha + 9 - 6\cos^2\alpha} =$
$= x\sqrt{9-5\cos^2\alpha}$

$3x = AC = \sqrt{AE^2 + EC^2 - 2\angle AEC} = \sqrt{x^2\cos^2\alpha + x^2(9-5\cos^2\alpha) - 2\cos 120°\cdot x^2\cdot\cos\alpha\sqrt{9-5\cos^2\alpha}}$

$9x^2 = x^2(\cancel{9}\ \cancel{-5\cos^2\alpha + \cos^2\alpha}^{-4\cos^2\alpha} - 2\cos\alpha\cdot\cos 120°\cdot\sqrt{9-5\cos^2\alpha})$

$$0 = -4\cos^2\alpha - 2\cos 120^\circ \sqrt{1-5\cos^2\alpha}$$

$$2\cos^2\alpha = -\cos 120^\circ \sqrt{9-5\cos^2\alpha}$$

$$4\cos^2\alpha = \cos^2 120^\circ (9-5\cos^2\alpha)$$

$$4\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(9-5\cos^2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha\left(4+\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{4} \Big/ \frac{21}{4} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{9}{6}$$

$$\cancel{1+\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha}}$$

$$tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

б) $EB = AB - AE = \frac{3x}{\cos\alpha} - x\cdot\cos\alpha \quad ED = x\cdot\sin\alpha$

$$EC = x\cdot\sqrt{9-5\cdot\cos^2\alpha}$$

$$S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}\cdot\underset{\frac{1}{2}}{\sin 30^\circ}\cdot CE\cdot ED = \frac{1}{4}\cdot x^2\sqrt{9-5\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha$$

$$3x = \sqrt{7}$$

$$9x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{7}{9}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{7}$$

$$\cancel{\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$S_{\triangle ECD} = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}\cdot\sqrt{9-5\cdot\frac{9}{49}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}$$

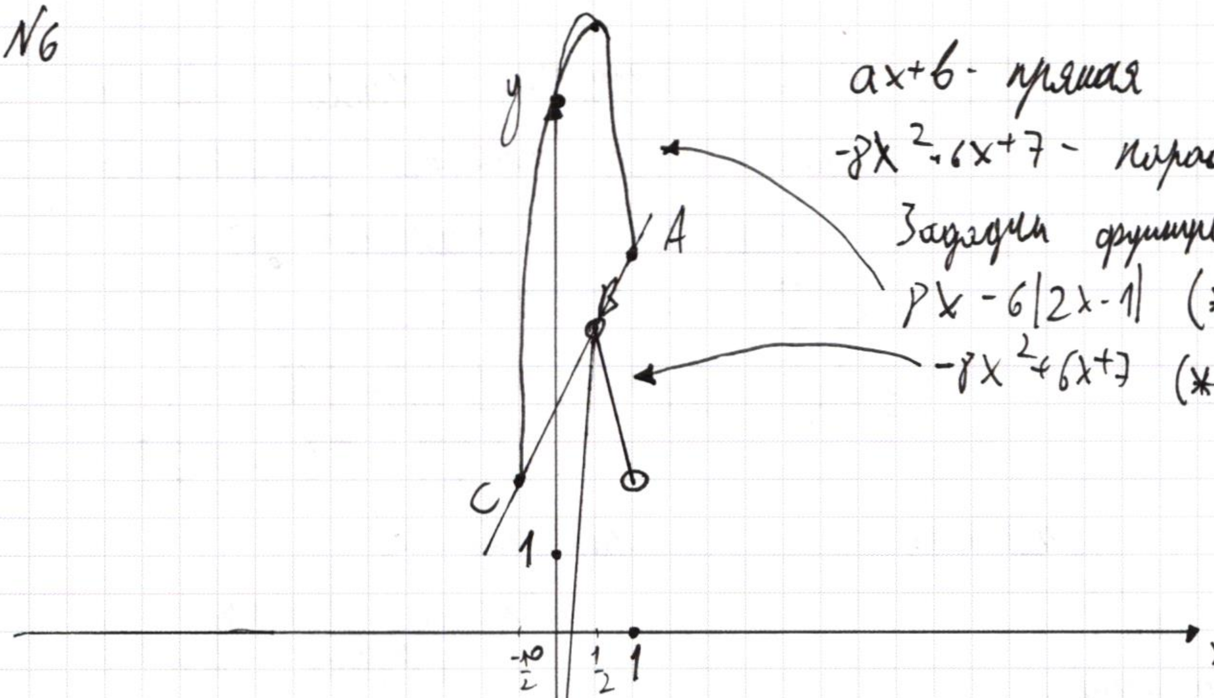
Ответ: $tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{\triangle ECD} = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}\cdot 3\sqrt{1-\frac{5}{49}}\ \frac{44}{49}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} =$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{11}}{7} = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{7}}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$ax+b$ - прямая

$-8x^2+6x+7$ - парабола

Заданы функции

$8x-6|2x-1|$ (*)

$-8x^2+6x+7$ (**)

1) (*) $8x-6|2x-1|=y$

$2x-1\geq 0$ $x\geq\frac{1}{2}$

$x=1$ $x=\frac{1}{2}$

$y=2$ $y=4$

$2x-1\leq 0$ $8x+12x-6=$
$=20x-6$

$x=\frac{1}{2}$ $y=4$

$x=-\frac{1}{2}$ $y=-16$

(**) $-8x^2+6x+7$

$x=1$ $y=5$

$x=0$ $y=7$

$x=\frac{1}{2}$ $y=8$

$x=-\frac{1}{2}$ $y=2$

2) т.к. $ax+b$ - прямая и лежит между двумя функциями, то: $\underset{x=1}{ax+b\leq 5}$

$a+b\leq 5$

$\underset{x=-\frac{1}{2}}{}$ $-\frac{1}{2}a+b\leq 2$

$\frac{1}{2}a+b\geq 4$

3) исходя из графика можно соединить точки AC они образуют отрезок в $ax+b$. и можно заметить что в таком случае $B\in AC$ =>

=> это единственный вариант

$a+b=5$

$-\frac{1}{2}a+b=2$

$-a+2b=4$

$3b=9$

$b=3$ => $a=2$

Ответ: $a=2$; $b=3$

№7.

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

~~$f(x)$~~ любое натуральное число можно разбить на конечное количество простых делителей a

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = a\cdot b\cdot c\cdot\ldots$

$f(x) = f(a\cdot b\cdot c) = f(a)+f(b)+f(c) =$

$= \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] + \left[\frac{c}{2}\right]$

стоит заметить, ~~каждый~~ каждое слагаемое строго больше $0 \Rightarrow f(x)>0$

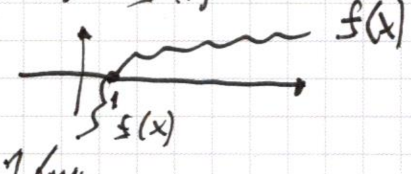
что $f(1)=0$

в противном

случае $f(a\cdot b\cdot 1) =$

$= f(a)+f(1)+\cancel{f(1)}+f(b) = f(a+b(1)) = a$ так как

$\Rightarrow f(1)=0$



$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

если $y = 22$ $x \to 21$ вари

$y=21$ $x \to 20$ вари

$y = 20$ $x \to 19$ вари

значит $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ если $\frac{x}{y}<1$

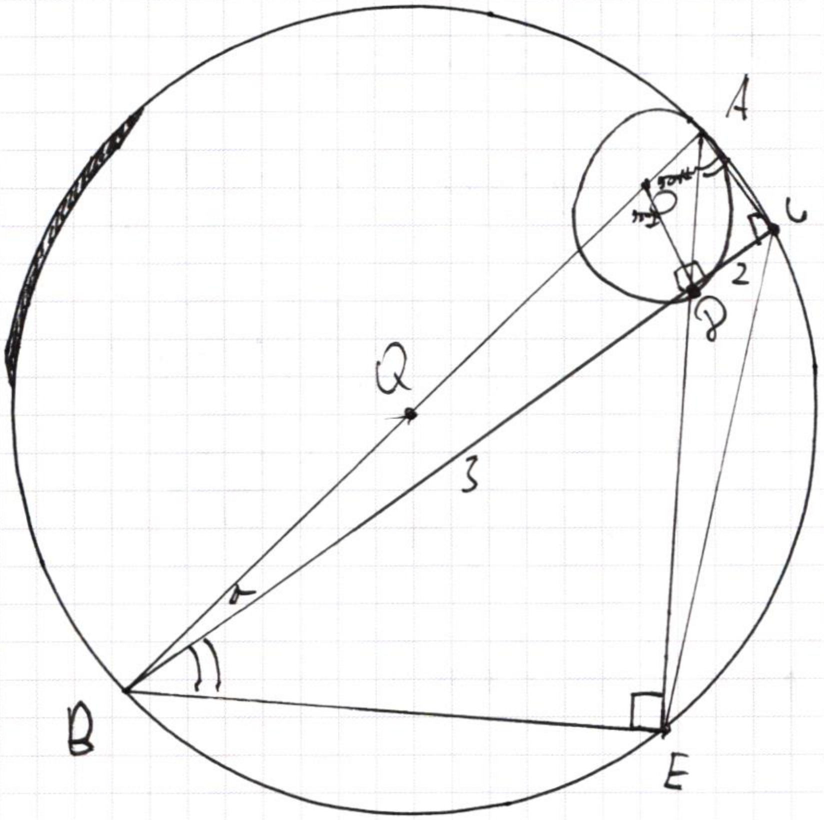
Ответ: $11\cdot 21 = 231$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) $Q \in AB$

$O \in AB$

A - точка касания

$OA = r$

$BQ = R$

$OD \perp BC$

BC - касательная

$\angle BCA = 90^\circ$

т.к. BA - диаметр

$\triangle ABC \sim \triangle BOD$

$$\frac{BO}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{OD}{AC}$$

$BO = 2R - r$

$BA = 2R$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{3+2}$$

$10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$

$R = \frac{5}{4}r$

2) $\triangle BOD$ - прямоугольн $\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$BD^2 + OD^2 = BO^2 \Rightarrow 3^2 + r^2 = (2R - r)^2 \Rightarrow$

$9 + r^2 = \left(\frac{5}{2}r - r\right)^2 = \left(\frac{5-2}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}r^2 \Rightarrow 9 = \frac{5}{4}r^2 \Rightarrow r = \frac{12}{\sqrt{5}}$

$R = \frac{5 \cdot 3}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$

3) $AD = \sqrt{2r^2 - 2 \cdot \cos\angle AOD \cdot r^2}$

$AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} =$ $\quad \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AC = \frac{5OD}{3} = \frac{5r}{3}$

$= \sqrt{4 + \frac{25}{9} \cdot \frac{12^2}{5}} = \sqrt{4 + \frac{5 \cdot 4^2}{1}} = \sqrt{84}$

По свойству хорд $AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{84}} = \frac{6}{\sqrt{84}}$

3) $BE = \sqrt{BA^2 - AE^2} = \sqrt{36\cdot 5 - \left(\frac{6}{\sqrt{84}} + \sqrt{84}\right)^2} =$

$= \sqrt{36\cdot 5 - \left(\frac{\sqrt{84}+6}{\sqrt{84}}\right)^2} = \sqrt{36\cdot 5 - \frac{(\sqrt{84}+6)^2}{84}}$

$S_{\Delta BEA} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot AE$

4) $\angle CAE = \angle CBE$ (опираются на одну дугу CE)

$\sin\angle DBE = \frac{DE}{BD} = \frac{6}{\sqrt{84}} : 3 = \frac{2}{\sqrt{84}}$

$S_{\Delta EAC} = \frac{1}{2}\sin\angle \cancel{CBE}\, EAC\cdot AC\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{84}}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{84}}+\sqrt{84}\right)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{12}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{84}}\left(\frac{6+\sqrt{84}}{\sqrt{84}}\right)\cdot\frac{5\cdot 4}{\sqrt{5}} =$

$= \left(\frac{6+\sqrt{84}}{84}\right)\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)$

$S_{\cancel{A}ACE} = S_{ABEA} + S_{EAC}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№~~ №1 a, b, c, d

$ax^2 - 2bx + c = 0$

a
$b = aq$
$c = aq^2$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$a \neq 0$ в противном случае прогрессия не осуществима

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$

$x = q$ один корень =>

=> $d = aq^3$

$q = aq^3$

$q \neq 0$ в прот. случае прогрессия не осуществима

$1 = aq^2 = c$

Ответ: третий член прогрессии равен 1.

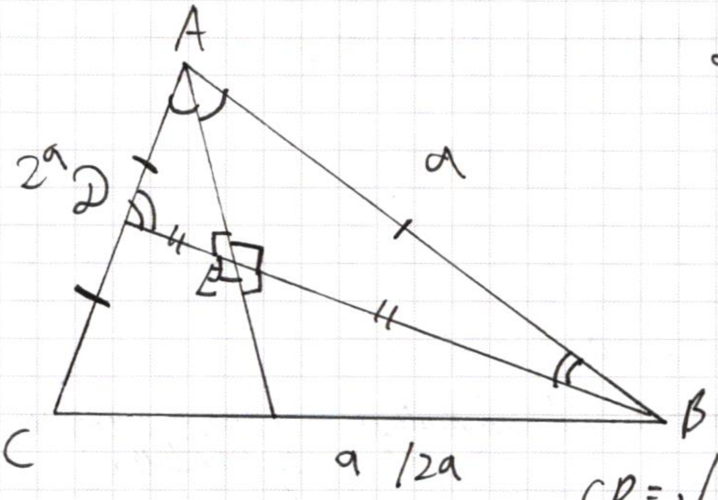
№2.

$\triangle ADB$ - равноб. т.к. AE - бис-са и высота => и медиана

$DE = EB$

$AD = AB$

Пусть $AD = a$



$$CB = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\angle CAB}$$

$2a + 2a + a = 900 \quad 5a = 900 \quad a = 180$

$2a + a + a \quad 4a = 900 \quad a = 225$

$$CB = \sqrt{(2a)^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \cos\angle CAB} =$$

$$= a\sqrt{5 - 4\cos\angle CAB}$$

$CB \in \mathbb{N}$

$\cancel{a \in}\ a \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{5 - 4\cos\angle CAB}}_{*} \in \mathbb{N}$

$\cos\angle CAB = -1$ * невозм. $\quad \cos\angle CAB = \frac{1}{4} \Rightarrow * = 1$

$\cos\angle CAB = 1 \quad * = 2$

$CB = a$

$CB = 2a$

Ответ: 2 варианта

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} > 0 \\ x^2+2y^2-\cancel{1}\,2x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$x^2-12x+36+2y^2-4y+\overset{2\ -11}{\cancel{8}}\cancel{-}24=0$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

$$xy-6y-x+6>0$$

$$x-6y>0 \quad x>6y$$

$$(x-6y)^2=xy-6y-x+6$$

$$(x-6y)^2=\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-6y-x+1 \quad |\cdot 2$$

$$2(x-6y)^2=(x+y)^2-x^2-y^2-12y-2x+12$$

$$-(x^2+2x+1)$$

$$-(y^2+12y+\overset{11}{\cancel{6}})$$

$$4-4\cdot a=4(1-a)$$

$$12^2-4\cdot 6$$

$$2(x-6y)^2=(x+y)^2-(x+1)^2-(y^2+12y+14)+24=0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x - 6|2x-1| \le ax+6 \le -8x^2+6x+7$

$x < \frac{1}{2}$

$|2x-1| > 0 \quad 2x-1 > 0 \quad 2x > 1 \quad x > \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 \le ax+6$

$ax+6 \le -8x^2+6x+7$

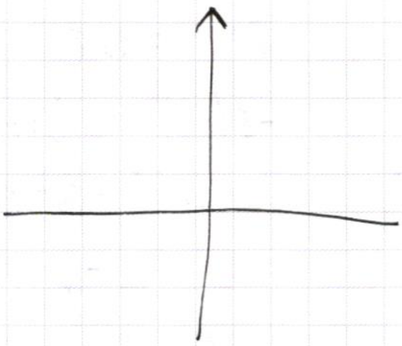
$$\begin{cases} -4x+6 \le ax+6 \\ ax+6 \le -8x^2+6x+7 \end{cases}$$

a

$0 \le x(a+4)+6+6$

$\cancel{0 \le -}$

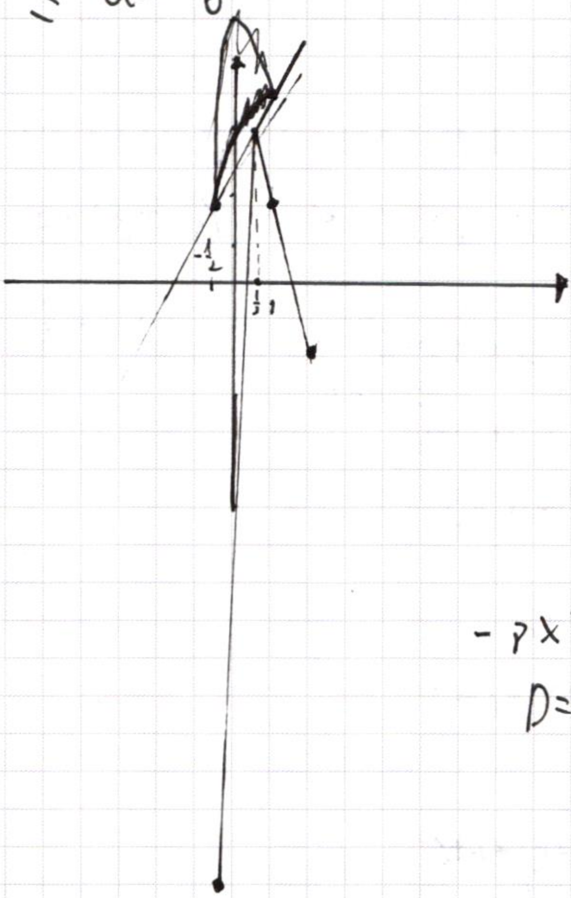
$8x^2+x(a-6)-1 \le 0$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1| \le ax+6$



$8x - 6(2x-1)$

$2x-1 \ge 0$

$x \ge \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6$

$-4x+6$

$x=1 \; y=2$

$x=\frac{1}{2} \; y=4$

$8x+6(2x-1)$

$2x-1<0$

$2x<1$

$x<\frac{1}{2}$

$8x+12x-6$

$20x-6$

$-\frac{1}{2}$

$-10-6$

$-8x^2+6x+7$

$\frac{+6}{2\cdot 8} = \frac{3}{8}$

$D = 36 + 4\cdot 8\cdot 7$

$4\cdot 8\cdot 7$

$\times \begin{array}{r} 32 \\ 7 \end{array}$

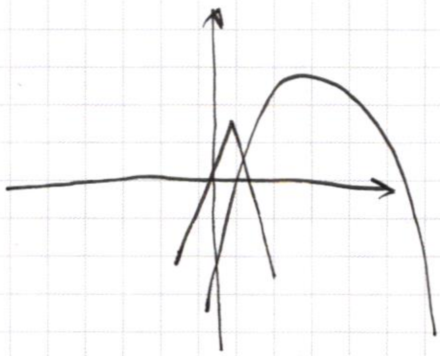
$\begin{array}{r} 224 \\ +\;36 \\ \hline 260 \end{array}$

$-8+6+7 = 13-8 = 5$

$-8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6\cdot\frac{1}{2} + 7 =$

$= -8\cdot\frac{1}{4} - 3 + 7 =$

$= -2 - 3 + 7 = 2$



$-8\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{2} + 7 =$

$= -2 + 3 + 7 = 8$

$-2 - 3 + 7 = 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

f $\frac{3}{22}$ $\boxed{f\left(\frac{1}{y}\right)<0}$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

~~>0~~ колот

пау.

$1+f\left(\frac{1}{22}\right)<0$

2
3

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

$[x]<x$ целое

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{y}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

2 11 <0
3 12 21
4 13 22
5 14
6 15
7 16
8 17
9 18
10 19

$(x;y)$

$2\le x\le 22$

$2\le y\le 22$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=$

$=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

любые числа [illegible]

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)$~~ $\frac{x}{y}<1$ — подходит

$f(abc)=f(a)+f(b)+f(c)=$

$=[a/2]+[b/2]+[c/2]$

$\frac{a-1}{2}$ $a\neq 2$

$f(x)+f\left(1\cdot\frac{1}{y}\right)=\cancel{f(x)}$

$\boxed{f(1)=0}$

$f_2\left(\frac{1}{abc}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{b}\right)+f\left(\frac{1}{c}\right)}{}$ <0

$-f(x)>f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f^2(x)<f^2\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)^2$

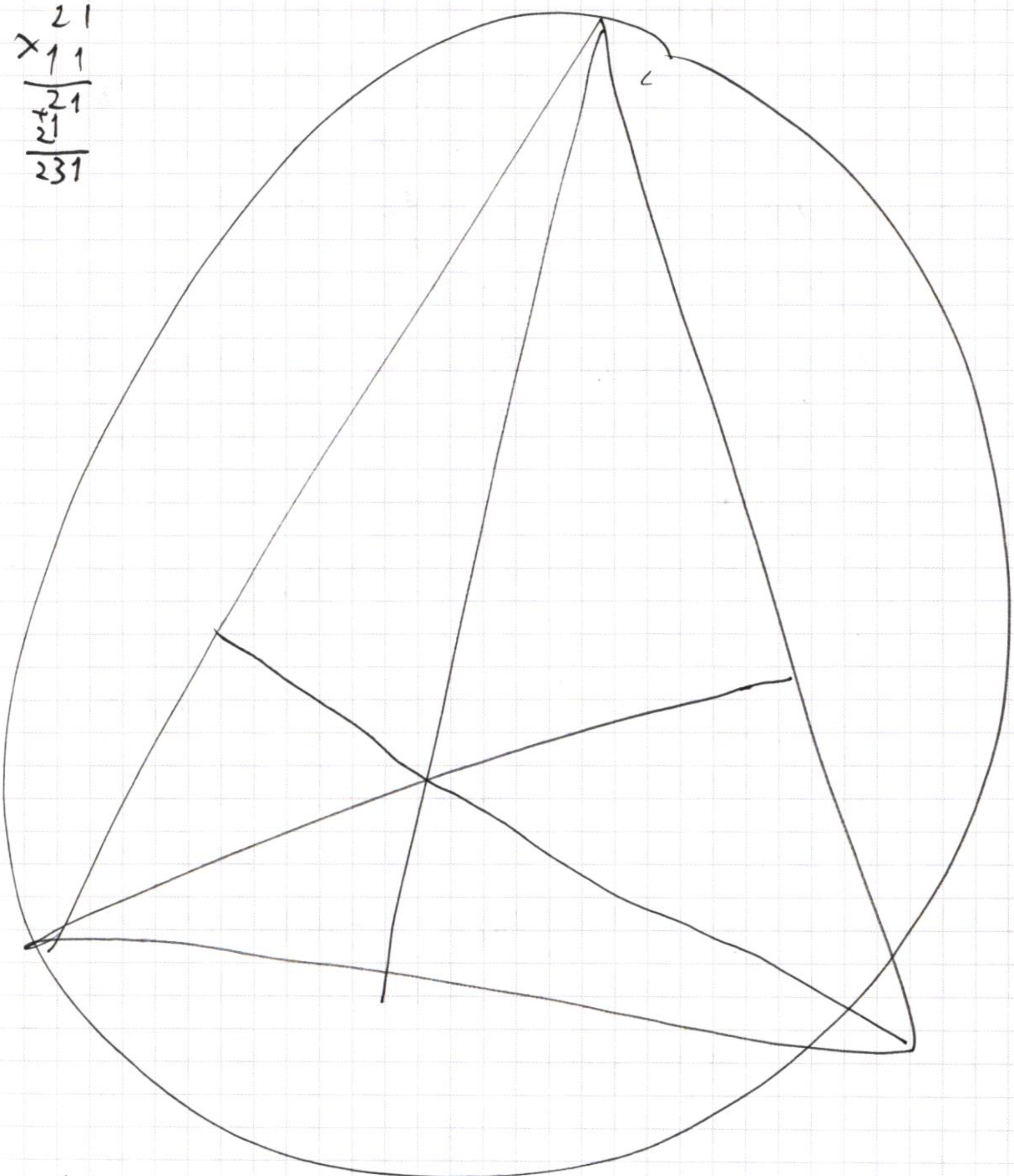
$\left(f(x)-f\left(\frac{1}{y}\right)\right)\boxed{\left(f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)\right)}<0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 11 \\ \hline 21 \\ +\ 21\ \\ \hline 231 \end{array}$$



21 вершин

S $\square$ $\frac{21 \cdot 22}{2} = 11 \cdot 21$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$\cancel{x^2-12xy}$

$x^2-13xy+36y^2=-6y-x+6$

$36y^2+6y+1$

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2-12yx+36y^2=xy-6y-x+6$

$\cancel{(x-6y)^2}=$

$x^2-13yx+36y^2=-6y-x+6$

$x^2+x+36y^2+6y=13yx+6$

$\cancel{x(x+1)+6y(6y+1)}=$

$2(x-6y)^2=2xy-6y-x+6$

$2(x-6y)^2=(x+y)^2-x^2-y^2-6y-x+6$

$\cancel{2x^2}$

$-x^2-x \quad -(x^2+x+\frac{1}{4})$

$-y^2-6y \quad -(y^2+6y$

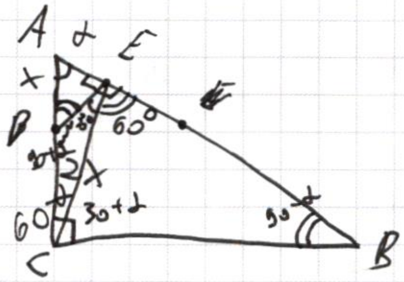
$x^2+13yx+13$

$2x^2-24yx+72y^2$

$3x^2-24yx+73y^2=(x+y)^2-6y-x+1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

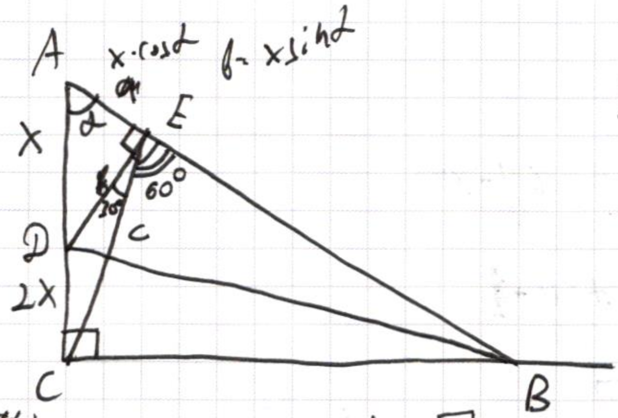


$\frac{BC}{AC}$

$$\frac{BC}{DE} = \underbrace{\frac{AC}{AE}}_{=3x} = \frac{\cancel{AB}\,AB}{\cancel{AB}\,\underbrace{AD}_{=x}}$$

$\cancel{AB = \sqrt{9x^2+BC^2}}$

$$\frac{3x}{x\cdot\cos\alpha} = \frac{\cancel{\sqrt{9x^2+BC^2}}}{\cancel{x}} \quad \frac{\cancel{3x}}{\cos\alpha}\ \frac{\sqrt{9x^2+BC^2}}{x}$$



$AB\cdot\cos\alpha = 3x$

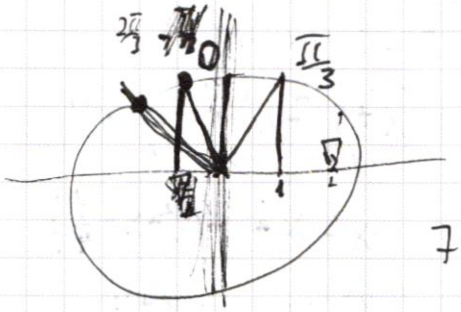
$AB = \frac{3x}{\cos\alpha}$

$\frac{3x}{\cos\alpha} = \sqrt{9x^2+BC^2}$

$\frac{9x^2}{\cos^2\alpha} = 9x^2+BC^2$

$9x^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right) = BC^2$

$3x\sqrt{\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)} = BC$



$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7-3

$\frac{BC}{AC} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$

$= \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

$\sqrt{3} = a$

$ab = \sqrt{7}$

$\sqrt{b^2-a^2}$

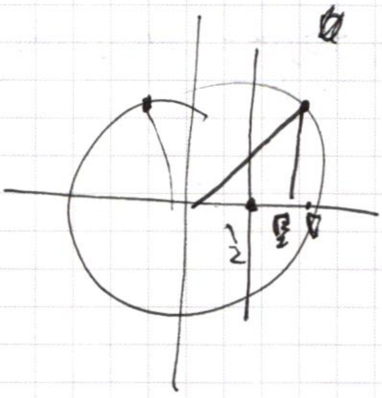
$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\cancel{x^2} = \cancel{x^2}\cos^2\alpha + \cancel{x^2}\sin^2\alpha - 2\cos(120°)\cdot\cancel{x^2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$x = x - \cos(120°)\sin 2\alpha$

$\cos(120°)\cdot\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = 0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

144 = 12·4

$144 - 48 = 96$

$144 + 48 = 192$

4(1-a)

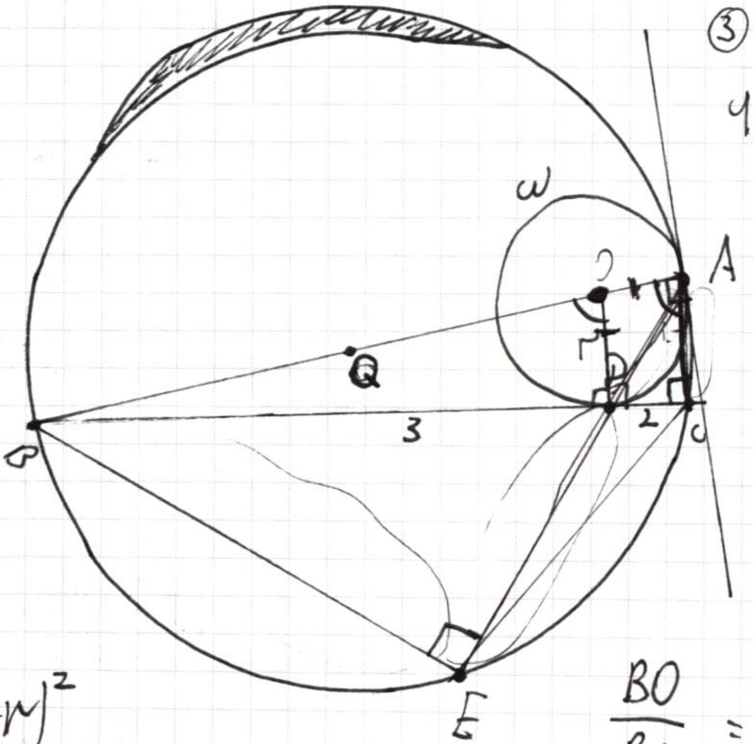
144 -4

144 : 4 = 36

$\boxed{36}$

4(36-6)

4(36-b)



$3^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$9 + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$$\frac{BO}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{OD}{AC}$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{5} = \frac{r}{AC}$$

$10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$

$R = \frac{5}{4}r$

$9 = 4 \cdot \frac{25}{16} r^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} r^2$

$9 = \frac{25}{4} r^2 - 5r^2$

$9 = r^2\left(\frac{25}{4} - 5\right) = r^2\left(\frac{25}{4} - \frac{20}{4}\right) = \frac{5}{4}$

$3 = r\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{6}{\sqrt{5}} = r = \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{10} = 1{,}2\sqrt{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$(x-6)^2+2(y-2)^2=24$

$x^2-12yx+\frac{3}{6y}xy-6y-x+6$

$y-1$

$6,5(x^2-2xy+y^2)+\cancel{30y^2}-ax^2$

$-2xy\cdot a=+13xy$

$a=\frac{13}{2}=6,5$

$\cancel{6,5(x^2-}$ $6,5(x-y)^2-5,5x^2+29,5y^2=$
$=6y-x+6 \quad |\cdot 2$

$13(x-y)^2-11x^2+58y^2=12y-2x+12$

$13(x-y)^2+11(x^2-\cancel{47}y^2)$

$11x^2-2x$

$58y^2-12y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a,b,c ∠x

$ax^2-2bx+c=0$

a

~~bq~~ $aq=b$

$aq^2=c$

$aq^3=d$

$$ax^2-2aqx+aq^2=0$$

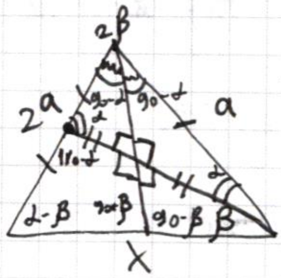
$a\neq0$ $\quad x^2-2qx+q^2=0$

$$(x-q)^2=0$$

$$x=q$$

$q\neq0$ $\quad aq^3=q=x$

~~a, b, c,~~ q $\quad aq^2=1$



$2a \,/\, a$

$360-(180-\alpha+\alpha-\beta+90)=$

$=360-(270-\beta)=$

$=90+\beta$

$x^2=4a^2+a^2-2\cos2\beta\cdot2a\cdot a$ =>

=> $x^2=5a^2-4\cos2\beta\cdot a^2$ =>

=> $x^2=a^2(5-4\cos2\beta)$

$x=a\sqrt{5-4\cos2\beta}$ $>0\in\mathbb{N}$

$x=a\sqrt{4}=2a$

$x=a\cdot\sqrt{1}=a$

~~$\cos2\beta$~~ $\boxed{5-4}$

$\begin{cases}\cos2\beta=\frac{1}{4}\\ \cos2\beta=1\end{cases}$

* $2a+2a+a=900$

** $2a+a+a=900$

* $5a=900 \quad a=\frac{900}{5}$

** $4a=900 \quad a=\frac{900}{4}$

$900:5=180$ $\quad 900:4=225$

Ответ: 2.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \quad (*) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad (**) \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-6y-x+6>0$

$x-6y>0 \qquad x>6y$

$(*)$ $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$(x-6y)^2=xy-6y-x+6$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+36y^2=-6y-x+6$

$\cancel{2x^2-26xy+36y^2=}$

$2x^2-26xy+72y^2=-12y-2x+12$

$x^2-26xy+13^2y^2+x^2-97y^2=$

$=-12y-2x+12$

$13 \cdot 13 = 39$, 13, 169, $169-72=97$

$(x-13y)^2+(x+1)^2=$

$=97y^2-12y\ldots$

$(x-13y)^2$ $\cancel{2x^2-26xy+72y^2=-12y-2x+12}$

$\frac{AD}{BD}=\frac{DC}{DE}$

$x^2-13xy+36y^2=-6y-x+6$

$-x^2+2y^2+12x+4y-20=0 \quad |\cdot 3 \quad |\cdot(-1) \quad |+$

$\cancel{3x^2}+6y \quad -13xy$

$36-5\cdot 14$

$$\boxed{(x-6)^2+2(y-2)^2=24 \quad V}$$

$x^2-12x+36+2y^2-8y+8-24$

$36+8=38+6=44 \Rightarrow 44-20=24$

$2y^2-4y+2$

$2(y^2-2y+1)$

$16 \cdot 5 = 80$