МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Обозначим за q знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$ согласно определению геометрической прогрессии

$ax^2 + 2bx + c = 0$ Заменим b и c на $a \cdot q$ и $a \cdot q^2$ соответственно

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$ Вынесем a и преобразуем

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$ $a(x+q)^2 = 0$

Рассмотрим 2 случая: 1) $a = 0$. Тогда $b = 0 \cdot q = 0$, $c = 0 \cdot q^2 = 0$

Заметим, что $x = 0$ является корнем уравнения $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$ (так как $\forall x$ является корнем такого уравнения). Значит этот случай подходит под все условия, в данном случае $c = 0$

2) $a \neq 0$ Тогда, из того, что $a(x+q)^2 = 0$ следует, что $(x+q)^2 = 0$ Тогда $x = -q$ – единственный корень уравнения.

Четвёртый член геометрической прогрессии равен $c \cdot q$ (предыдущий член умножить на знаменатель прогрессии)

$cq = -q$ 1) $q = 0 \Rightarrow c = a \cdot q^2 = a \cdot 0^2 = 0$

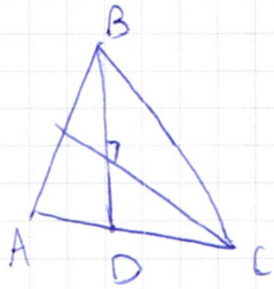
2) $q \neq 0$, можно сократить $c = -1$

Разобрали все возможные случаи, получили 2 ответа.

Ответ: третий член прогрессии равен либо -1, либо 0

№2. Не имеет значения из какой вершины идёт биссектриса и какую из медиан она пересекает, так как все случаи взаимно заменяемы. Поэтому, не умаляя общности, пусть биссектриса из вершины C перпендикулярна медиане из вершины B.

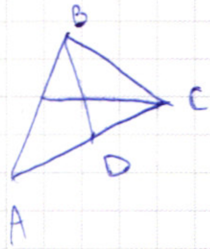
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



Обозначим за D точку пересечения медианы и стороны AC.
Заметим, что если биссектриса перпендикулярна BD, то в $\triangle DCB$ эта биссектриса является и высотой. Тогда $\triangle DCB$ равнобедренный, то есть $CB = CD$.
A BD - это медиана, значит $CD = \frac{1}{2} AC = CB$

$AC = 2 \cdot CB$

Это условие является и необходимым (что показано выше) и достаточным. Покажем, что оно достаточно: возьмём треугольник в котором $AC = 2 \cdot CB$. Проведём биссектрису из вершины C и медиану BD из B



$CD = \frac{1}{2} AC = CB$, значит $\triangle DCB$ равнобедренный
Тогда биссектриса является и высотой, значит биссектриса перпендикулярна BD.

Доказана достаточность.

То есть нужно посчитать количество треугольников, где периметр $= 1200$, стороны целочислены и одна из сторон в два раза больше другой.

Обозначим стороны треугольника за a, b и c. И пусть $2b = a$. (не умаляя общности, так как треугольники с равными сторонами равны).
По условию $a + b + c = 1200$ $a = \frac{b}{2}$, подставим

$\frac{3b}{2} + c = 1200$, домножим на 2 обе стороны: $3b + 2c = 2400$

Заметим, что $2400 \vdots 3$, $3b \vdots 3$. Тогда и $2c \vdots 3$. НОД$(2,3) = 1$, поэтому $c \vdots 3$. Также $2400 \vdots 2$, $2c \vdots 2$. Тогда $3b \vdots 2$. НОД$(3,2) = 1$, поэтому $b \vdots 2$.

Теперь, так как a, b, c стороны $\triangle$, то можно выписать неравенства треугольников: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = \frac{b}{2}$, заметим. Получаем, что $\frac{3b}{2} > c$, $\frac{b}{2} + c > b$, $b + c > \frac{b}{2}$

То есть $3b > 2c$, $c > \frac{b}{2}$ и $\frac{b}{2} + c > 0$. ~~Второе~~ Третье верно всегда, так как стороны всегда имеют положительную длину $(a>0, b>0, c>0)$

Посмотрим на неравенства $3b > 2c$ и $2c > b$, их выполнение необходимо. Вспомним, что $3b + 2c = 2400$

$3b + 2c > 2c + 2c = 4c$ по первому неравенству $\Rightarrow 4c < 2400$, $c < 600$

$3b + 2c > 3b + b = 4b$ по второму неравенству $\Rightarrow 4b < 2400$, $b < 600$

По первому неравенству $3b + 2c < 3b + 3b = 6b \Rightarrow 6b > 2400$, $b > 400$

Также $c > \frac{b}{2} > 300$ ~~и так как $c > 0$, то $3b < 2400 \Rightarrow b < 800$~~

Заметим, что если $c < 600$, то $2c < 1200 \Rightarrow 3b > 2c$, так как $b > 400$; $2c > b$, так как $2c > 600$, $b < 600$

Получаем следующие оценки: $300 < c < 600$, $400 < b < 600$

Для таких ограничений выполнены все неравенства треугольника.

$3b + 2c = 2400$. Тогда $b = \frac{2400 - 2c}{3}$, $a = \frac{b}{2} = \frac{2400 - 2c}{6} = \frac{1200 - c}{3}$

То есть, выбирая c, мы однозначно задаём весь треугольник.

Найдём количество способов выбрать c: $c \vdots 3$ и $300 < c < 600$.

То есть $c = 303, 306, 309 \dots 594, 597$

Из промежутка $301 - 599$ нам подходит каждое третье число.

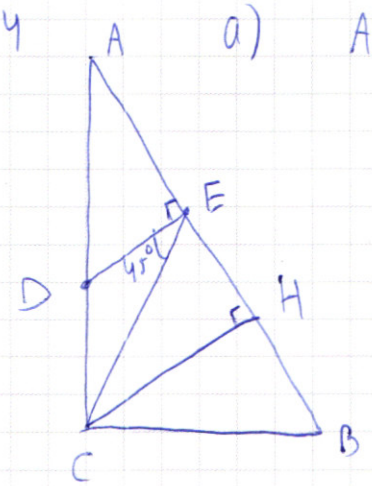
Количество чисел между ~~59~~ 301 и 599 равно $599 - 301 + 1 = 299$

$\left[\frac{299}{3}\right] = 99$ (берём целую часть, так как чисел целое количество).

Получаем, что количество треугольников, подходящих под условие, равно 99 (заметим, что каждое c задаёт ~~про~~ нужный Δ: выполнены неравенства треугольника; $a, b, c > 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $2a = b$)

Ответ: есть 99 треугольников, подходящих под условие

№4



а) $AD:AC=3:5$, $\angle CED=45°$, $DE\perp AB$

Проведём высоту CH данного треугольника

$DE\perp AB$, $CH\perp AB \Rightarrow DE \parallel CH$.

Тогда $\triangle ADE \sim \triangle ACH$ (общий угол и параллельны 2 стороны, противолежащие этому углу).

Тогда $\frac{AD}{AC}=\frac{EA}{HA}=\frac{3}{5}$ по условию.

$\angle CED=45°$, $\angle DEH=90°$. Тогда

$\angle CEH=\angle DEH-\angle CED=45°$. Также $\angle EHC=90°$

$\angle HCE=180°-\angle CEH-\angle EHC=45°$.

Значит $\triangle CEH$ равнобедренный, $CH=EH$

$$\frac{EH}{HA}=\frac{HA-EA}{HA}=1-\frac{EA}{HA}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

Заметим, что $\angle BAC=\angle HAC$, так как $H\in[BA]$. Тогда равны и тангенсы углов. $tg\angle HAC=\frac{CH}{HA}$, так как $\angle AHC=90°$

(определение тангенса в прямоугольном треугольнике)

$tg\angle BAC=\frac{CH}{HA}=\frac{EH}{HA}$ $(CH=EH)$ $=\frac{2}{5}$ по только что вычисленному

Ответ: $tg\angle BAC=\frac{2}{5}$

б) $AC=\sqrt{29}$ Обозначим длину AH за $5y \Rightarrow CH=2y$, так как $\frac{CH}{AH}=\frac{2}{5}$

$EH=CH=2y$, $AE=AH\cdot\frac{3}{5}=3y$. Обозначим длину AC за $5x$.

$AD=\frac{3}{5}AC=3x$ $DC=AC-AD=2x$. $5x=\sqrt{29}$, $x=\frac{\sqrt{29}}{5}$ по условию

По теореме Пифагора для $\triangle AHC$

$AC^2=25x^2=CH^2+AH^2=4y^2+25y^2=29y^2$

$25x^2=25\cdot\frac{29}{25}=29=29y^2 \Rightarrow y^2=1$. $y=1$, так как длина всегда >0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $AH = 5$, $CH = 2$, $AE = 3$, $HE = 2$

Теперь, по теореме Пифагора для $\triangle AED$

$$DE^2 = AD^2 - AE^2 = 9x^2 - 9 = 9\cdot\frac{29}{25} - 9 = \frac{9\cdot 29 - 9\cdot 25}{25} = \frac{9\cdot 4}{25} = \frac{36}{25}$$

$DE > 0$, поэтому $DE = \frac{6}{5}$

$$S_{\triangle CHE} = \frac{1}{2}CH\cdot HE = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2 \quad (CH \perp HE)$$

$CDEH$ – трапеция $\Rightarrow S_{CDEH} = \frac{CH+DE}{2}\cdot h$

В данном случае $h = HE$, так как $HE \perp CH$

$$S_{CDEH} = \frac{CH+DE}{2}\cdot HE = \frac{2+\frac{6}{5}}{2}\cdot 2 = \frac{16}{5}$$

$$S_{\triangle CED} = S_{CDEH} - S_{\triangle CHE} = \frac{16}{5} - 2 = \frac{6}{5}$$

Ответ: $S_{\triangle CED} = \frac{6}{5}$

№7 $\quad f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

2 – простое число $\Rightarrow f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

3 – простое число $\quad f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$

5, 7, 11, 13, 17, 19 – простые числа: $f(5) = 2$, $f(7) = 3$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$, $f(17) = 8$, $f(19) = 9$. Найдём значения для всех x, $2 \le x \le 21$

$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 2$, $\quad f(8) = f(2\cdot 4) = f(2) + f(4) = 3$

$f(6) = f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 2$, $\quad f(9) = f(3\cdot 3) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2\cdot 5) = f(2) + f(5) = 3$, $\quad f(12) = f(2\cdot 6) = f(2) + f(6) = 3$

$f(14) = f(2\cdot7) = f(2)+f(7) = 4$ $\qquad$ $f(15) = f(3\cdot5) = f(3)+f(5) = 3$

$f(16) = f(2\cdot8) = f(2)+f(8) = 4$ $\qquad$ $f(18) = f(2\cdot9) = f(2)+f(9) = 3$

$f(20) = f(2\cdot10) = f(2)+f(10) = 4$ $\qquad$ $f(21) = f(3\cdot7) = f(3)+f(7) = 4$

Теперь найдём $f(1)$: $f(2) = f(2\cdot1) = f(2)+f(1)$. Значит $f(1) = 0$

$\cancel{f(1) = f(\frac{1}{2}\cdot2) = f(\frac{1}{2})+f(2) = f(\frac{1}{2})+1}$ $\Big|$ $\cancel{\Rightarrow f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{3})}$

$\cancel{f(1) = f(\frac{1}{3}\cdot3) = f(\frac{1}{3})+f(3) = f(\frac{1}{3})+1}$

$\cancel{f(\frac{3}{2}) =}$ Теперь найдём $f(\frac{x}{y})$. $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

заметим, что $f(1) = f(y)+f(\frac{1}{y}) \Rightarrow$ $\quad f(\frac{1}{y}) = f(1) - f(y) = 0 - f(y) = -f(y)$

$(y\cdot\frac{1}{y} = 1)$

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Если $x = 1$, то подходящим y будет любое число >1, то есть ровно 20 чисел $(2 \le y \le 21)$ $\quad$ (так как $\forall y \in \mathbb{N}$, $1 \le y \le 21$, $f(y) \ge 0 \Rightarrow -f(y) \le 0$)

$f(1) - f(y) = -f(y) < 0$, если $y > 1$

Если $x = 2$ или $x = 3$, то $f(\frac{x}{y}) = 1 - f(y) < 0$, если $f(y) > 1$, то есть $y > 3$. Подходят числа $4, 5, 6 \ldots, 21$, их ровно 18.

Если $x = 4, 5, 6, 9$, то $f(\frac{x}{y}) = \cancel{f(2)}\ 2 - f(y)$

$2 - f(y) < 0$, если $f(y) > 2$, то есть подходят числа $7, 8, 10, 11 \ldots 21$, их будет 14.

Если $x = 7, 8, 10, 12, 15$ или 18, то $f(\frac{x}{y}) = 3 - f(y)$

$3 - f(y) < 0$, если $f(y) > 3$, то есть $y = 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21$, то есть ровно 8 чисел.

Если $X = 14, 16, 20, 21$, то $f(\frac{x}{y}) = 4 - f(y)$

$4 - f(y) < 0$, если $f(y) > 4$, то есть $y = 11, 13, 17$ или 19, 4 числа.

Если $X = 11$, то $f(\frac{11}{y}) = 5 - f(y) < 0$, если $f(y) > 5$, то есть $y = 13, 17$ или 19

Если $x = 13$, то $f(\frac{13}{y}) = 6 - f(y) < 0$, если $y = 17$ или 19

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $x=17$, то $f\left(\frac{17}{y}\right)=8-f(y)<0$, если $y=19$

Если же $x=19$, то $f\left(\frac{19}{7}\right)=9-f(y)\geq 0$ при $\forall y\in[1,21], y\in\mathbb{N}$.

Посчитаем количество пар:

$x=1$ 20 разных y 20 пар

$x=2,3$ 18 разных y $2\cdot 18=36$ пар

$x=4,5,6,9$ 14 разных y $4\cdot 14=56$ пар

$x=7,8,10,12,15,18$ 8 разных y $6\cdot 8=48$ пар

$x=14,16,20,21$ 4 разных y $4\cdot 4=16$ пар

$x=11$ 3 разных y 3 пары

$x=13$ 2 разных y 2 пары

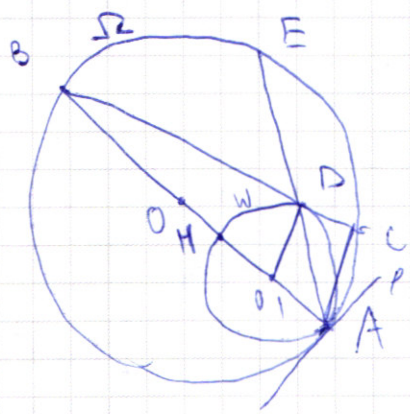
$x=17$ 1 подходящий y 1 пара

$x=19$ нет подходящих 0 пар.

Просуммируем и получим ответ: количество пар $=182$

Ответ: количество подходящих пар (x,y) равно 182.

№5



$CD=1$, $BD=3$. Проведём касательную к окружностям через A — прямая l

$l\perp AB$, так как AB диаметр.

Обозначим за H вторую точку пересечения AB и w. $H\in(AB)\Rightarrow AH\perp l$, тогда AH — диаметр (только диаметры и радиусы перпендикулярны касательной) $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1$ — центр w — лежит на ~~прямой~~ отрезке AB.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Соединим точки A и C, O_1 и D. $\angle ACB = 90°$, так как AB – диаметр, $C \in \Omega$.
$\angle O_1DB = 90°$, так как BD – касательная, O_1D – радиус.

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ по двум углам. ~~BC =~~

$\frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD} = \frac{CD+BD}{BD} = \frac{4}{3}$. $O_1B = AB - O_1A = \frac{3}{4}AB$

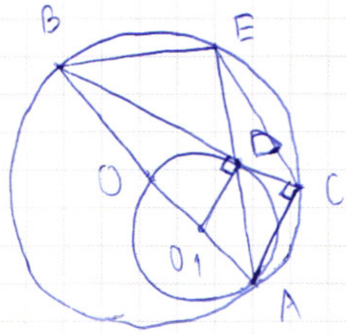
Значит $O_1A = \frac{1}{4}AB$

Пусть r – радиус ω, R – радиус Ω. Тогда $O_1A = r$, $AB = 2R$

Значит $r = \frac{R}{2}$ $2r = R$

Заметим, что $AH = 2r$, так как AH – диаметр ω.

$O \in AB, H \in AB$, $AH = AO = R$ $\Rightarrow$ точки H и O совпадают.



Найдем AC: $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ по ранее доказанному $\Rightarrow \frac{AC}{O_1D} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{3}$

$O_1D = r$, так как $D \in \omega$

$AC = \frac{4}{3}O_1D = \frac{4}{3}r$

$\triangle ABC$ прямоугольный, напишем теорему Пифагора для него: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$BC = CD + BD = 4$, $AC = \frac{4}{3}r$, $AB = 2R = 4r$

$\frac{16}{9}r^2 + 16 = 16r^2$ сократим на 16

$\frac{1}{9}r^2 + 1 = r^2$ $\frac{8}{9}r^2 = 1$ $r^2 = \frac{9}{8}$ $r = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$R = 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Треугольник ACD прямоугольный, верна теорема Пифагора: $AC^2 + CD^2 = AD^2$

$AC = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$ $AD^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$

Тогда $\sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (определение синуса в прямоугольном треугольнике)

BC и AE – пересекающиеся хорды $\Rightarrow$ по теореме для хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DE$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Тогда $AE = AD + DE = 2\sqrt{3}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$, где d_1, d_2 - длина диагоналей, $\sin\alpha$ - угол между ними

$d_1 = BC = 4$, $d_2 = AE = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \angle ADC$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin\angle ADC = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{2}$

Ответ: радиус окружности ω равен $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, радиус Ω равен $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№6 $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

При $x = -\frac{1}{4}$ $2x^2 - x - 1 = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

$x + |2x-1| = -\frac{1}{4} + |-\frac{3}{2}| = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

То есть $-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a + b \le \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \le \frac{1}{4}a - b \le \frac{5}{8}$ (домножили на -1)

При $x = \frac{1}{2}$ $2x^2 - x - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -1$

$x + |2x-1| = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

$-1 \le \frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -(\frac{1}{2}a + b) \le 1$ (домножили на -1)

При $x = \frac{3}{2}$ $2x^2 - x - 1 = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

$x + |2x-1| = \frac{3}{2} + |2| = \frac{7}{2}$

$2 \le \frac{3}{2}a + b \le \frac{7}{2}$. Сложим с предыдущим неравенством (с $-\frac{1}{2} \le (-\frac{1}{2}a - b) \le 1$)

$2 - \frac{1}{2} \le \frac{3}{2}a + b - \frac{1}{2}a - b \le \frac{7}{2} + 1$ то есть $\frac{3}{2} \le a \le \frac{9}{2}$

Сложим неравенства $2 \le \frac{3}{2}a+b \le \frac{7}{2}$ и $-\frac{5}{4} \le \frac{1}{4}a-b \le \frac{5}{8}$

Получаем $\frac{3}{4} \le \frac{7}{4}a \le \frac{7}{2}+\frac{5}{8} = \frac{33}{8}$

Значит $a \le \frac{33}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{33}{14}$ $\Rightarrow \frac{3}{2} \le a \le \frac{33}{14}$ ($a \ge \frac{3}{2}$ по ранее полученному)

У нас уже было получено неравенство $-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}a-b \le 1$

Домножим его на 3: $-\frac{3}{2} \le -\frac{3}{2}a-3b \le 3$

и сложим с $2 \le \frac{3}{2}a+b \le \frac{7}{2}$

Тогда $\frac{1}{2} = 2-\frac{3}{2} \le \frac{3}{2}a+b-\frac{3}{2}a-3b \le \frac{7}{2}+3 = \frac{13}{2}$

$\frac{1}{2} \le -2b \le \frac{13}{2}$ $\Rightarrow -\frac{13}{2} \le 2b \le -\frac{1}{2}$

То есть $-\frac{13}{4} \le b \le -\frac{1}{4}$

Если $x=0$, то $-1 \le b \le 1$. Значит $-1 \le b \le -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{4} \le -b \le 1$

Сложим это неравенство с неравенством $-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4}$

Получаем, что $-\frac{5}{8}+\frac{1}{4} \le -\frac{1}{4}a+b-b \le \frac{5}{4}+1$

$-\frac{1}{8} \le -\frac{1}{4}a \le \frac{9}{4}$ Домножим на -4:

$-9 \le a \le \frac{1}{2}$

Тогда получаем, что с одной стороны $a \ge \frac{3}{2}$, с другой $a \le \frac{1}{2}$, что невозможно. Значит таких пар (a,b) нет.

Ответ: таких пар (a,b), что $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$ $\forall x \in [-\frac{1}{4},\frac{3}{2}]$ не существует.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

598, 299, 303

$\frac{2400-597\cdot 2}{3} = \frac{2400-1194}{3}$ $b=\frac{2400-303\cdot 2}{3}$

$2x^2-x-1 \le \underset{3x+1}{ax+b} \le x+|2x-1|$

$-x+1 \ge 2x$

$-3x \ge -1$

$3x \le 1$

$x < \frac{1}{3}$

$3a \ge 4-2b$

$a \ge \frac{4}{3}-\frac{2}{3}b$

$\frac{1794}{3}=598$

$\frac{1206}{3}=402$

201

$x \in [-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$

1) $x < \frac{1}{2}$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x-\underset{-x+1}{2x+1}$

$-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

$2x^2-x-1 \le 2x$

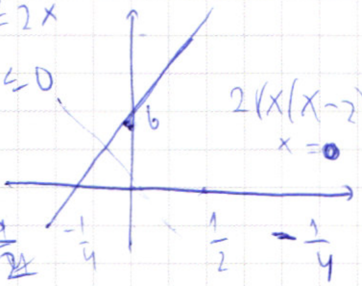
$2x^2-\cancel{4}x\cancel{-1} \le 0$

$2(x(x-2)) \le 0$

$x=0$

$D = 9+8=17$

$x_1 = \frac{9-\sqrt{17}}{4} > \frac{3}{4}$

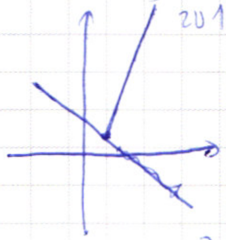


$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=$

3, 1

(2, 0)



$\frac{1+2-8}{8} = \frac{-5}{8} \le 0x+b$

$2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1 = -1 \le ax+b$

$+\frac{22}{56}$ 78, $+\frac{56}{48}$ 104

$18-2\sqrt{17} > 12$

$30 > 2\sqrt{17}$

$15 > \sqrt{17}$

$2x^2-x-1=0$

$D = 1+8=9$

$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

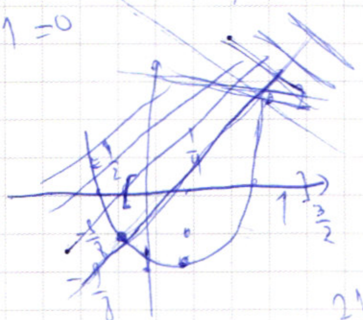
$x_2 = 1$

$(3, -1)$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}-1=0$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1 = \frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1 = -\frac{9}{8}$



$\frac{9}{4}\cdot 2-\frac{3}{2}-1 = \frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1 = 2$

$-b \le -1$

$a\frac{3}{2}+b \ge 2$

$a+1 \ge a+b \ge a-1$

$7 \ge 3a+2b \ge 4$

$(-1, -1)$

$1 \ge b \ge -1$

$-1 \le a \le 3$

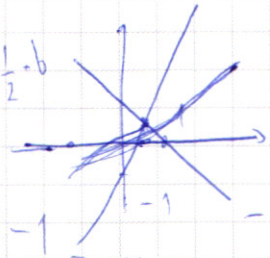
$2 \ge a+b \ge 0$

$\frac{1}{2} \ge a\frac{1}{2}+b$

$-1 \le a+2$

$a+2b \le 1$

$x \ge \frac{1}{2}$



$-x+1$

$3x-1$

$x = -\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4}$

$4 \le 3a+2b \le 7$

$-1 \le b \le 1$

$0 \le a+b \le 2$

$-\frac{1}{4}a+b \ge -\frac{5}{8}$

$\frac{1}{4}a+b \ge -\frac{9}{8}$

$-1 \le a \le 3$

$\frac{9}{2}-1 = \frac{7}{2} \ge a\cdot\frac{3}{2}+b$

$7 \ge 3a$

$-1 \le \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2}$

$-1 \le \frac{1}{2}a+1$

$-2 \le \frac{1}{2}a$

$a \ge -4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-\frac{1}{4}a+b \geq -\frac{5}{8}$ $\quad -2a+8b \geq -5$

$\frac{-25+8}{4}$ $\quad -2a \geq -13$

$2a \leq 13$

$x+|2x-1|$ $\quad a < \frac{13}{2}$

$-\frac{1}{4}$ $\quad -\frac{1}{4}+|1-\frac{3}{2}|$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=[\frac{p}{2}]$

$1 \leq x \leq 21$

$1 \leq y < 21$

$f(2)=1$ $\quad f(4)=2$

$f(3)=1$ $\quad f(6)=2$ $\quad f(\frac{x}{y})<0$

$f(5)=2$ $\quad f(12)=3$ $\quad f(7)=3$

$f(10)=f(2)+f(5)=3$ $\quad f(11)=5$

$f(1)=f(\frac{1}{2})+f(2)=f(\frac{1}{2})+1=f(\frac{1}{3})+1=f(\frac{1}{5})+2=f(\frac{1}{12})+3$

$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{5})+1=f(\frac{1}{7})+2=f(\frac{1}{6})+1$

$f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{5})=f(\frac{1}{6})=f(\frac{1}{9})$

$f(21)=f(3)+f(7)=4$ $\quad f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})+1$

$f(\frac{x}{y})$ $\quad f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)+\underset{0}{f(1)}-f(y)$ $\quad f(1)=f(\frac{2}{3})$

$f(1)=f(y)+f(\frac{1}{y})$ $\quad f(\frac{1}{7})=f(\frac{1}{8})=f(\frac{1}{10})$

$f(x)-f(y)$ $\quad f(\frac{1}{11})=$

$1+f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=f(1)=f(\frac{2}{3})$

$f(1)=f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{2})=2f(1)$

$f(1)=0$

$56+56=112$

$112+48=160$

$160+16=176$

182

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$c = aq^2$, $b = aq$ $\quad aq^3 = -b + \sqrt{b^2-ac}$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac$

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} = 0$

$a^2q^3 = -aq$

$2aq^3 = -q$, $q \neq 0$

$c = aq^2 = -1$

$y = \sqrt{2-y}$, $y^2 = 2-y$, $y^2+y-2=0$

$a+b+c = 1200$

$a = \frac{b}{2}$

$2c < \frac{3b}{2} + c = 1200$ $\quad \frac{b}{2} < c < 600$ $\quad b < 1200$

$\frac{3b}{2} > c$ $\quad c + \frac{b}{2} > b$ $\quad c > \frac{b}{2}$

$\frac{b}{2} < c < \frac{3b}{2}$

$3b > 1200$ $\quad b > 400$

$200 < c < 600$

$400 < b < 800$

$\frac{3b}{2} = 1000$

$a = 200$, $b = 400$, $c = 600$

$3b = 2000$

$3b + 2c = 2400$

$b = 500$, $c = 450$, $a = 250$

201, 204 ... 597

399

133 числа c

$799 - 402 + 1 = 398$

402 ... 798

199 чисел b

$133 \cdot 199 = 26467$

$133 \cdot 200 = 26600$

$\sqrt{6}\sqrt{3} = \sqrt{18}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$xy - 2x - y + 2 \geq 0$

$y - 2x \geq 0$, $y \geq 2x$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$(y-2x)^2 = y^2 - 4xy + 4x^2 = y^2 + 2x^2 + (2x^2 - 4xy)$

$(y-2)^2 - (2x-2)^2 + 6x^2 + 3 + 4x$

$(y-2)^2 - 1 + 2x^2 - 4x$

$3(2x^2+4x+1)$

$(y-2-2x+2)(y-2x)(y+2x-4)$

$y - 2 - 2x - 2$

$y - 2 + 2x + 2$

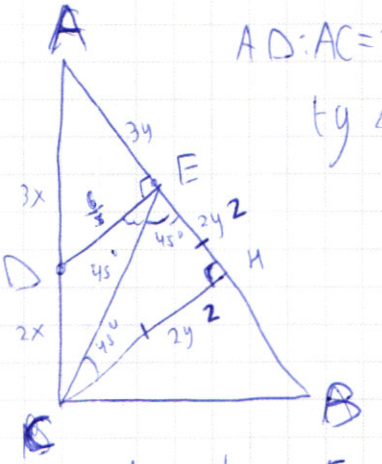
$(y-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 - 2x - 2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$AD : AC = 3 : 5$

$tg\,\angle BAC - ?$ $\angle CED = 45°$

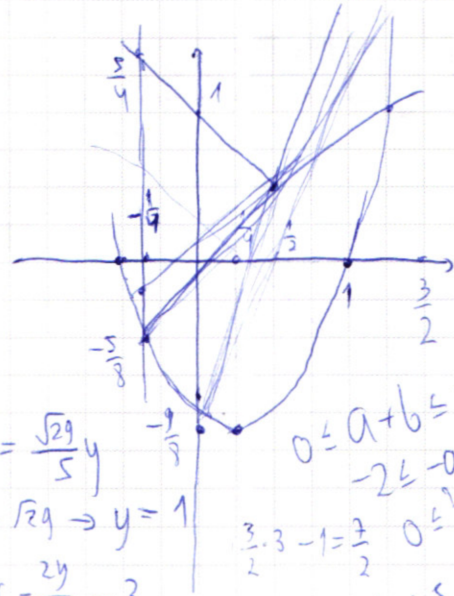
$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$CH = HE = 2y$

$(5x)^2 - (5y)^2 = CH^2 = 4y^2$

$25x^2 - 25y^2 = 4y^2$

$25x^2 = 29y^2$ $x = \frac{\sqrt{29}}{5}y$



$0 \le a+b \le 2$

$-2 \le -a-b \le 0$

$0 \le \frac{7}{2}a \le \frac{7}{2}$

$-\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$

$-2a + 8b = -5$ $2a + b = 1$

$AC = \sqrt{29}\,y = \sqrt{29} \to y = 1$

$\frac{3}{2}\cdot 3 - 1 = \frac{7}{2}$

$\frac{DE}{3y} = \frac{2}{5}$ $b = 1 - 2a$ $tg\,\angle BAC = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}$

$-\frac{5}{4} \le \frac{1}{4}a - b \le \frac{5}{8}$

$\frac{6}{5}$

$-2a + 8 - 16a = -5$ $DE = \frac{6}{5}$

$-\frac{1}{4} \le \frac{3}{4}a \le \frac{33}{8}$

$-18a = -13$

$S = \frac{16}{5} - 2 = \frac{6}{5}$

$\frac{2 + \frac{6}{5}}{2}\cdot 2 = \frac{16}{5} = S_{CDEH}$

$-1 \le 7a \le \frac{33}{2}$

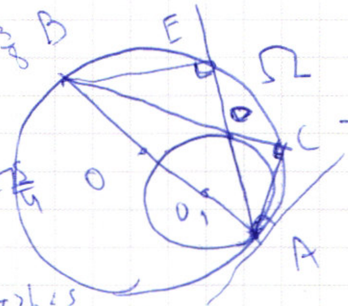
$2\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 =$ $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3 - 1 = 2$

$a \le \frac{33}{14}$

$a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{1}{8}$ $a = \frac{13}{18}$ $b = 1 - \frac{13}{9} = -\frac{4}{9}$

$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

$-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{8}$



$CD = 1$ $BD = 3$ $BC = 4$

$\frac{3}{2}a + b = 2$

$3a + 2b = 4$

$-\frac{9}{4} \le \frac{1}{4}a \le \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$

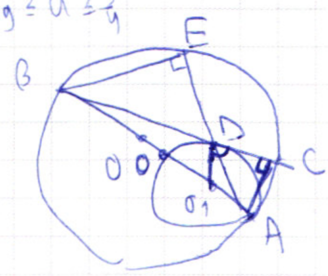
$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

3

$\frac{26}{9} - \frac{8}{9} =$

$-9 \le a \le \frac{9}{4}$

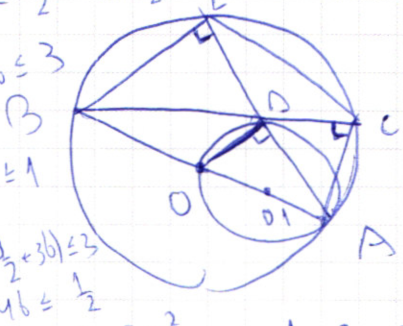
$AC = \frac{4}{3}r$



$\frac{AB}{AO_1} = \frac{BC}{DC} = 4$

$-\frac{5}{4} \le -\frac{1}{2}a + 2b \le \frac{5}{2}$

$-\frac{9}{4} \le 3b \le 3$



$2R = AB = 4\cdot AO_1$

$\frac{AC}{O_1D} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{3}$

$-\frac{3}{4} \le b \le 1$

$R = 2r$

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

$AC = \frac{4}{3}r$

$-\frac{3}{2} \le -\left(\frac{3}{2} + 3b\right) \le 3$

$-\frac{1}{2} \le -4b \le \frac{1}{2}$

$16 + \frac{16}{9}r^2 = (4r)^2 = 16r^2$

$16 = \frac{20}{9}r^2$

$\frac{36}{5} = r^2$

$r = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

$1 + \frac{1}{9}r^2 = r^2$

$\frac{7}{2} - 3$

$1 = \frac{8}{9}r^2$

$BO_1 = 3r$

$9r^2 = r^2 + 9$

$8r^2 = 9$

$AC = \frac{4}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$ $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$1 \le a \le 3$

$AD^2 = 4 + 1$

$AD = \sqrt{5}$

$DE = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ $AE = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

$-4b = \frac{1}{2}$ $b = -\frac{1}{8}$

$BE^2 = 9\cdot 2 - \frac{64}{5} = \sqrt{\frac{26}{5}} = BE$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)