МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1 \leqslant ax+b \leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7

Заметим, что $f(x) = f(x/y \cdot y) = f(x/y) + f(y)$, поэтому $f(x/y) = f(x) - f(y)$, поэтому $f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$. Тогда если для некоторых $x_1 \neq y_1$ выполнено $f(x_1) \neq f(y_1)$, то ровно одна из пар $(x_1; y_1)$ и $(y_1; x_1)$ нам подходит. В таком случае будем говорить, что нам подходит неупорядоченная пара $\{x_1; y_1\}$. Всего неупорядоченных пар $\{x; y\}$, где $1 \le x \le 21$ и $1 \le y \le 21$, будет $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$. Найдём, сколько нам не подходит.

Зная разложение на множители натурального числа, нам несложно посчитать f от него: $f(1) = 0$, т.к. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$; $f(2) = f(3) = 1$; $f(4) = f(5) = f(6) = f(9) = 2$; $f(7) = f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18) = 3$; $f(14) = f(16) = f(20) = f(21) = 4$; $f(11) = 5$, $f(17) = 8$, $f(19) = 9$, $f(13) = 6$. Теперь мы можем посчитать, сколько неупорядоченных пар нам не подходит: если $f(x) = f(y) = 1$, пар $\{x; y\}$, где x и y различны, одна, если $f(x) = f(y) = 2$, то $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, если $f(x) = f(y) = 3$, то $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, если $f(x) = f(y) = 4$, то $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, если $f(x) = f(y)$ — другое число, пар нет. Итого нам не подходит $1 + 6 + 15 + 6 = 28$ пар. Значит, подходит $210 - 28 = 182$.

~~На каждую неупорядоченную пару приходится~~

На каждую подходящую неупорядоченную пару приходится ровно одна подходящая пара, поэтому ответ — 182.

Ответ: 182.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}.$$

Возведём обе части первого уравнения в квадрат: $y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$; $4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$. Из этого вычтем второе уравнение: $2x^2-5xy+6x+5y-5=0$. Отсюда выразим y: $y=\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}$. Подставим это во второе уравнение: $2x^2-4x+3+\left(\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}\right)^2-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{2x^2+6x-5}{x-1}\right)=0$;

$$2x^2-4x+3+\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}\left(\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}-4\right)=0;$$

$$2x^2-4x+3+\frac{(2x^2+6x-5)(2x^2-14x+15)}{25(x-1)^2}=0;$$

$$\frac{(50x^2-100x+75)(x^2-2x+1)+(2x^2+6x-5)(2x^2-14x+15)}{25(x-1)^2}=0;$$

$$\frac{(50x^4-200x^3+325x^2-250x+75)+(4x^4-16x^3-64x^2+160x-75)}{25(x-1)^2}=0;$$

$$\frac{54x^4-216x^3+261x^2-90x}{25(x-1)^2}=0;$$

$$\frac{(6x^3-24x^2+29x-10)x}{(x-1)^2}=0;$$

несложно, подставив, убедиться, что число 2 является корнем $6x^3-24x^2+29x-10=0$.

Разделим $6x^3-24x^2+29x-10$ на $x-2$ в столбик:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3-24x^2+29x-10 & x-2 \\ -\;6x^3-12x^2 & \overline{6x^2-12x+5} \\ \hline -12x^2+29x & \\ -\;-12x^2+24x & \\ \hline 5x-10 & \\ -\;5x-10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Получаем, что $\frac{(6x^2-12x+5)(x-2)x}{(x-1)^2}=0$. При этом

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6x^2-12x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-6\cdot5}}{6}=\frac{6\pm\sqrt6}{6}$. Итак, никакие числа x, кроме 0, 2, $\frac{6+\sqrt6}{6}$ и $\frac{6-\sqrt6}{6}$ не могут быть корнями. Проверим эти: для них y будет равен 1, 3, $\left(\frac{7+2\sqrt6}{3}+6+\sqrt6-5\right)\cdot\frac{\sqrt6}{5(\sqrt6+1)}=\frac{(10+5\sqrt6)\sqrt6}{5(\sqrt6+1)}=\frac{(2+\sqrt6)(\sqrt6-1)\sqrt6}{5}=$ $=\frac{4\sqrt6+6}{5}$ и $\left(\frac{7-2\sqrt6}{3}+6-\sqrt6-5\right)\cdot\frac{\sqrt6}{5(\sqrt6-1)}=\frac{6-4\sqrt6}{5}$ соответственно.

$x=0$, $y=1$ подходит; $x=2$, $y=3$ подходит; $x=\frac{6+\sqrt6}{6}$, $y=\frac{4\sqrt6+6}{5}$ подходит; $x=\frac{6-\sqrt6}{6}$, $y=$ $=\frac{6-4\sqrt6}{5}$ подходит.

Ответ: $(0;1)$; $(2;3)$; $\left(\frac{6+\sqrt6}{6};\ \frac{4\sqrt6+6}{5}\right)$; $\left(\frac{6-\sqrt6}{6};\ \frac{6-4\sqrt6}{5}\right)$.

Задача №1

Пусть частное прогрессии — q. Тогда $b=aq$, $c=aq^2$, четвёртый член прогрессии — aq^3. Тогда $a(aq^3)^2+2aq\cdot aq^3+aq^2=0$; $a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$, так как $a\neq0$ и $q\neq0$, $(aq^2)^2+2aq^2+1=0$; $c^2+2c+1=0$; $c=-1$.

Ответ: -1.

Задача №2

Пусть в $\triangle ABC$ биссектриса BD перпендикулярна медиане AM, пусть BD и AM пересекаются в точке H. Тогда BH — биссектриса и высота $\triangle ABM$, поэтому $AB=BM$, поэтому $AB=\frac12BC$.

Пусть в $\triangle ABC$ мы знаем, что $AB=\frac12BC$. Докажем, что его биссектриса BD перпендикулярна его медиане AM. В самом деле, $AB=\frac12BC\Rightarrow AB=BM$, но BD — прямая, содержащая биссектрису $\triangle ABM$, поэтому и содержащая высоту, т.к. $\triangle ABM$ — равнобедренный, поэтому $BD\perp AM$, ЧТД.

Получаем, что в треугольнике одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан тогда и только тогда, когда в нём одна из сторон в два раза больше другой. Пусть эти стороны — x и $2x$, третья сторона — $1200-3x$. Тогда по неравенству треугольника $2x < x+(1200-3x)$ и $1200-3x < x+2x$, то есть $x < 300$ и $x > 240$. Таких x ровно 59. Причём понятно, что $1200-3x > 1200-3\cdot 300 = 300$, поэтому $1200-3x \neq x$, поэтому никакой треугольник мы не посчитали дважды.

Ответ: 59.

Задача №4

а) Пусть $AC=8x$. Тогда $AD=3x$, $DC=5x$. Пусть $\angle BAC=\alpha$. Тогда по теореме о сумме углов в треугольнике $\triangle AED$: $\angle ADE = 90^\circ-\alpha$; $\angle CDE = 90^\circ+\alpha$ как смежный с ним; по теореме о сумме углов в $\triangle DEC$: $\angle ECD = 45^\circ-\alpha$. Тогда $DE = AD\sin\alpha = 3x\sin\alpha$; по теореме синусов в $\triangle CDE$: $\frac{3x\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)} = \frac{5x}{\sin 45^\circ}$;

$\cancel{\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\alpha = 5(\sin\alpha\cos 45^\circ}$

$\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\alpha = 5(\cos\alpha\sin 45^\circ - \sin\alpha\cos 45^\circ)$; $3\sin\alpha = 5\cos\alpha - \sin\alpha$; $4\sin\alpha = 5\cos\alpha$; $tg\alpha = \frac{5}{4}$.

а) Ответ: $\frac{5}{4}$.

~~б) Если~~ $\cancel{tg\alpha = \frac{5}{4}}$, ~~то~~ $\cancel{ctg\alpha = \frac{4}{5}}$, ~~поэтому~~ $\cancel{\sin^2\alpha = \frac{5}{9}}$, ~~$\alpha$ острый, поэтому~~ $\cancel{\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}}$,

б) Заметим, что $DC = \frac{5}{8}\sqrt{29}$; $DE = \frac{3}{8}\sqrt{29}\sin\alpha$; площадь $\triangle CED$ — это полупроизведение сторон CD и DE, умноженное на синус угла между ними: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\sqrt{29}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{29}\sin\alpha\cdot\sin(90^\circ+\alpha) = \frac{15\cdot 29}{128}\sin\alpha\cos\alpha$. Т.к. $tg\alpha = \frac{5}{4}$, $\cos^2\alpha = \frac{16}{41}$, но α острый, поэтому $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$. Поэтому искомая площадь — это $\frac{15\cdot 29}{128}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}\cdot\frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{75\cdot 29}{32\cdot 41} = \frac{2175}{1312} = 1\frac{863}{1312}$.

б) Ответ: $1\frac{863}{1312}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|$. Посмотрим на левое неравенство: $2x^2-x-1\le ax+b \Leftrightarrow 2x^2-(a+1)x-(b+1)\le 0$. Это парабола ветвями вверх, её наибольшее значение на отрезке находится на конце отрезка, поэтому для $2x^2-(a+1)x-(b+1)$ необходимо и достаточно, чтобы $2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-(a+1)\left(-\frac{1}{4}\right)-(b+1)\le 0$ и $2\left(\frac{3}{2}\right)^2-(a+1)\left(\frac{3}{2}\right)-(b+1)\le 0$, то есть, чтобы $2a-8b-5\le 0$ и $4-3a-2b\le 0$.

Посмотрим на правое неравенство: мы видим, что на отрезке $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ должно выполняться $ax+b\le 1-x \Leftrightarrow (a+1)x\le 1-b$. $(a+1)x$ монотонна, поэтому для этого неравенства необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось на концах отрезка: $(a+1)\left(-\frac{1}{4}\right)\le 1-b \Leftrightarrow 4-4b+a+1\ge 0 \Leftrightarrow a-4b+3\ge 0$ и $(a+1)\cdot\frac{1}{2}\le 1-b \Leftrightarrow 1-2b-a\ge 0$.

На отрезке же $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ должно выполняться $(a-3)x\le b-1$, тоже необходимо проверить только концы отрезка, левый мы уже проверили, для правого $3a-9\le 2b-2 \Leftrightarrow 2b-3a+7\ge 0$

Итак, условие задачи равносильно тому, что $2a-8b-5\le 0$, $4-3a-2b\le 0$, $4b-a-3\le 0$, $a+2b-1\le 0$, и $3a-2b-7\le 0$ одновременно. Из четвёртого неравенства выражаем $a\le 1-2b$ и подставляем в остальные: $4-3(1-2b)-2b\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1+4b\le 0 \Leftrightarrow b\le -\frac{1}{4}$; $4b-(1-2b)-3\le 0 \Leftrightarrow 3b-2\le 0 \Leftrightarrow b\le\frac{2}{3}$. Ещё из третьего неравенства выражаем $a\ge 4b-3$, подставляем: $2(4b-3)-8b-5\le 0 \Leftrightarrow -11\le 0$; $(4b-3)+2b-1\le 0 \Leftrightarrow 3b-2\le 0 \Leftrightarrow b\le\frac{2}{3}$; $3(4b-3)-2b-7\le 0 \Leftrightarrow 5b-8\le 0 \Leftrightarrow b\le\frac{8}{5}$.

В общей сложности мы получим $b\le -\frac{1}{4}$, $4b-3\le a\le 1-2b$. Подставив в неравенства, понимаем, что этого достаточно. Ответ: $b\le -\frac{1}{4}$, $4b-3\le a\le 1-2b$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \Rightarrow y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$xy-2x-y+2 = x(y-2)-(y-2) = (x-1)(y-2)$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$-\;2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$5y(x-1)=2x^2+6x-5$

$y=\frac{2x^2+6x-5}{5(x-1)}$

№1

$a;\ b=aq;\ c=aq^2;\ aq^3.$

$a\cdot(aq^3)^2+2aq(aq^3)+$
$+aq^2=0;$

$a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

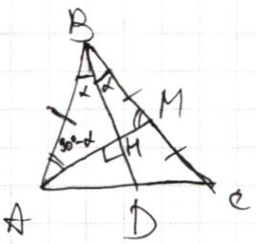
$a^2q^4+2aq^2+1=0$

$c^2+2c+1=0$

$(c+1)^2=0$

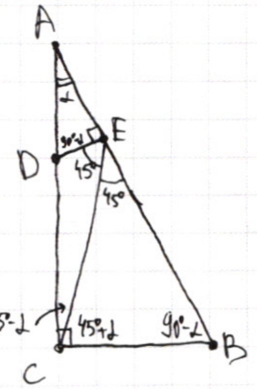
$c=-1.$

№2



BH — бисс. и высота $\triangle AMB \Rightarrow$
$\Rightarrow AB=BM=MC.$

№4



$\begin{array}{r} 75 \\ \times 29 \\ \hline 675 \\ 150\ \ \\ \hline 2175 \end{array}$ $\begin{array}{r} 32 \\ \times 41 \\ \hline 32 \\ 128\ \ \\ \hline 1312 \end{array}$

$45^\circ+\alpha+90^\circ-\alpha=45^\circ+90^\circ$

$\begin{array}{r} 2175 \\ -1312 \\ \hline 863 \end{array}$

$\cos\alpha=\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{3AC^2}{8AB}$

Пусть $AC=8x$, $AD=3x$, $DC=5x$, $DE=3x\sin\alpha$, $\frac{3x\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}=\frac{5x}{\sin 45^\circ}$

$\sin^2+\cos^2=1$

$tg^2+1=\frac{1}{\cos^2}$

$\cos^2=\frac{1}{tg^2+1}$ $\sin^2=\frac{1}{ctg^2+1}$

$\frac{16}{25+16}=\frac{16}{41}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(2)=1$ $\qquad f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$

$f(p)=\frac{p-1}{2}$, p — нечётн. простое

$f(x)=f(x/y\cdot y)=f(x/y)+f(y)$

$f(x/y)=f(x)-f(y)$.

$f(x/y)<0 \Leftrightarrow f(y)>f(x)$. $\quad f(y)=f(x)\Leftrightarrow f(ky)=f(kx)$, $k\in\mathbb{Q}$

$k=p/y$: $\frac{p-1}{2}=f\left(\frac{px}{y}\right)$

$f(n)>0$, $n\in\mathbb{N}, n>1$.

$\cancel{f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n})=1}$

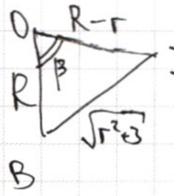
$f(2^k p_1 p_2 p_3\cdot\ldots\cdot p_n)=\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\ldots+\frac{p_n-1}{2}+k=\frac{\sum p_i-n}{2}+k$

$f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=2$, $f(6)=2$, $f(7)=3$, $f(8)=3$, $f(9)=2$, $f(10)=3$, $f(11)=5$, $f(12)=3$, $f(13)=6$, $f(14)=4$, $f(15)=3$, $f(16)=4$, $f(17)=8$, $f(18)=3$, $f(19)=9$, $f(20)=4$, $f(21)=4$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$BI = \sqrt{r^2+3}$



$\cos\beta = ?$

$r^2+3 = 2R^2 - 2Rr + r^2 - 2R(R-r)\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{2R^2-2Rr-3}{2R(R-r)}$

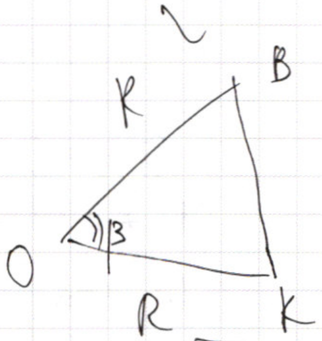
№6

$2x^2-(a+1)x-(b+1)\le 0$

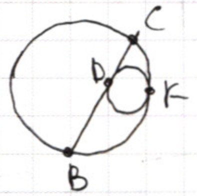
Ветви вверх → знач. на концах: $-\frac{5}{8} - b + \frac{a}{4} \le 0$; $2a-8b-5\le 0$

$\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$: $ax+b\le 3x-1$; $(a-3)x\le b-1$, знач. на концах: $a-3\le 2b-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b-a+1\ge 0$



$BK=\sqrt{2R^2-2R^2\cos\beta} = \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos\beta} = \sqrt{2}R\sqrt{\frac{3}{2R(R-r)}} = \sqrt{\frac{3R}{R-r}}$



$\left(\frac{CK}{KB}\right)^2 = \frac{CD}{DB}$!

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

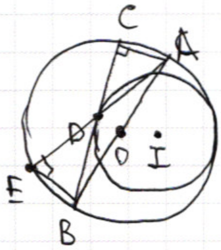
$CD=1,\ BD=3$

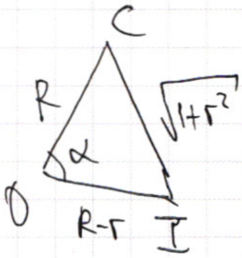
$AB=2R,\ ID=r$

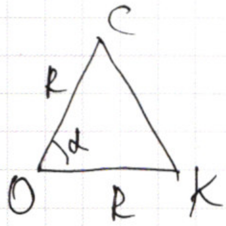
$CA=\sqrt{4R^2-16}=2\sqrt{R^2-4}$

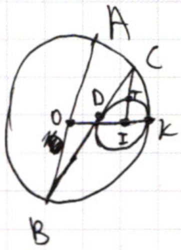
$CI=\sqrt{1+r^2}$

$OI=R-r$









$\cancel{CT\cdot(CT+2r)=1}$

$\cancel{CT^2+2rCT-1=0}$

$\cancel{CT=-r\pm\sqrt{r^2+1}}$

$\cancel{CT=\sqrt{r^2+1}-r;\ CK=\sqrt{r^2+1}=\sqrt{1+r^2}}$

$r^2+1=2R^2+r^2-2Rr-2R(R-r)\cos\alpha$

$\cancel{2R^2-2Rr-2R(R-r)c}$

$2R^2-2Rr-1=2R(R-r)\cos\alpha$

$\cos\alpha=\dfrac{2R^2-2Rr-1}{2R(R-r)}$

$CK=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos\alpha}=R\sqrt{2-\dfrac{2R^2-2Rr-1}{R(R-r)}}=R\sqrt{\dfrac{2R^2-2Rr-2R^2+2Rr+1}{R(R-r)}}=$

$=R\sqrt{\dfrac{1}{R(R-r)}}=\sqrt{\dfrac{R}{R-r}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)