



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1 = a; b_1 = aq; c_1 = aq^2; d_1 = aq^3$$

$$a_1 x^2 - 2b_1 x + c_1 = 0$$

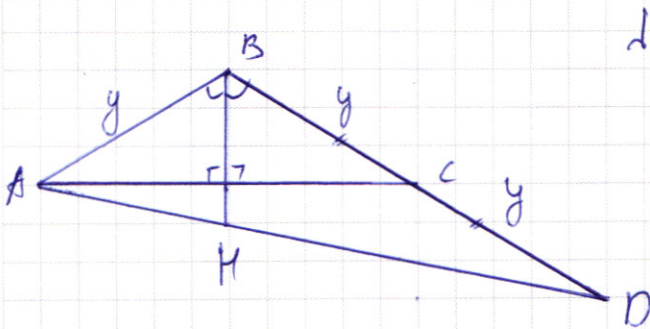
$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$D = 4a^2q^2 - 4a \cdot aq^2 = 0$$

$$d_1 = -\frac{b_1}{2a_1} = \frac{2aq}{2a} = q \Rightarrow aq^3 = q$$

$$aq^2 = 1 = c_1$$

Ответ: 1



AC - медиана, BH - биссектриса.

BH является высотой к AC и  
при этом биссектрисой  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle ABC$  - равн. и  $AB = BC = CA$ .

$y$  - целое число,  $AD < 3y$ ;  $AD = x$ ;  $x \geq 3$

$$3y + x = 900$$

Минимальный  $x = 3$ , макс- ~~пока~~ ~~максимальный~~ ~~ребер~~

$$\text{Максимальный } x = 3y - 6,$$

потому что  $3y + 3y - 3 = 900$  невозможно с целым  $y$ .

$$3y + 3 = 900 \Rightarrow y_{\max} = 299$$

$$3y + 3y - 6 = 900 \Rightarrow y_{\min} = 149$$

$$\Rightarrow \text{всего } y = \frac{299 - 149}{3} = 50$$

Ответ: 50 треугольников.



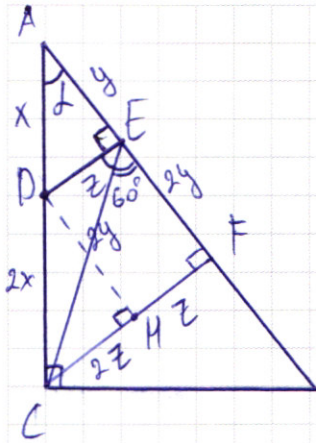


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: а)  $\triangle ABC$  - прямоугольн.  $AD:AC = 1:3$ .  $DE \perp AB$

$\angle CED = 30^\circ$ ;

б)  $AC = \sqrt{4}$ ;

Найти: а)  $\operatorname{tg} \alpha$  - ?

б)  $S_{CED}$  - ?

Решение:

1) Проведём прямую  $CF$ .  $CF \parallel DE \Rightarrow \angle EFC = \angle AED = 90^\circ$

2) Пусть  $AD = x$ ;  $AE = y$ ;  $DE = z$ . П.к.  $\triangle ADE \sim \triangle ACF$  по двум углам,  
 $AD:AC = 1:3$  (по угл.)  $\Rightarrow DE:CF = 1:3$  и  $AE:AF = 1:3 \Rightarrow DC = 2x$ ;  $CF = 3z$ ;  $EF = 2y$ .

3)  $\angle DEF = 90^\circ$ ;  $\angle DEC = 30^\circ \Rightarrow \angle CEF = 60^\circ$ .  $\operatorname{tg} \angle CEF = \sqrt{3} = \frac{3z}{2y}$   
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{y}$ .  $\frac{z}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  Ответ: а)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

4)  $DH \parallel EF$ ;  $DE \parallel CF \Rightarrow DH = EF = 2y$ .

5)  $S_{CED} = S_{CDEF} - S_{CEF} = S_{CDH} + S_{DEFC} - S_{CEF} = \frac{2z \cdot 2y}{2} + 2yz - \frac{2y \cdot 3z}{2} = zy$

6)  $\triangle AED$ , по теореме Пифагора  $z^2 + y^2 = x^2$ .

$x = \frac{AC}{3} = \frac{\sqrt{4}}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}$ .

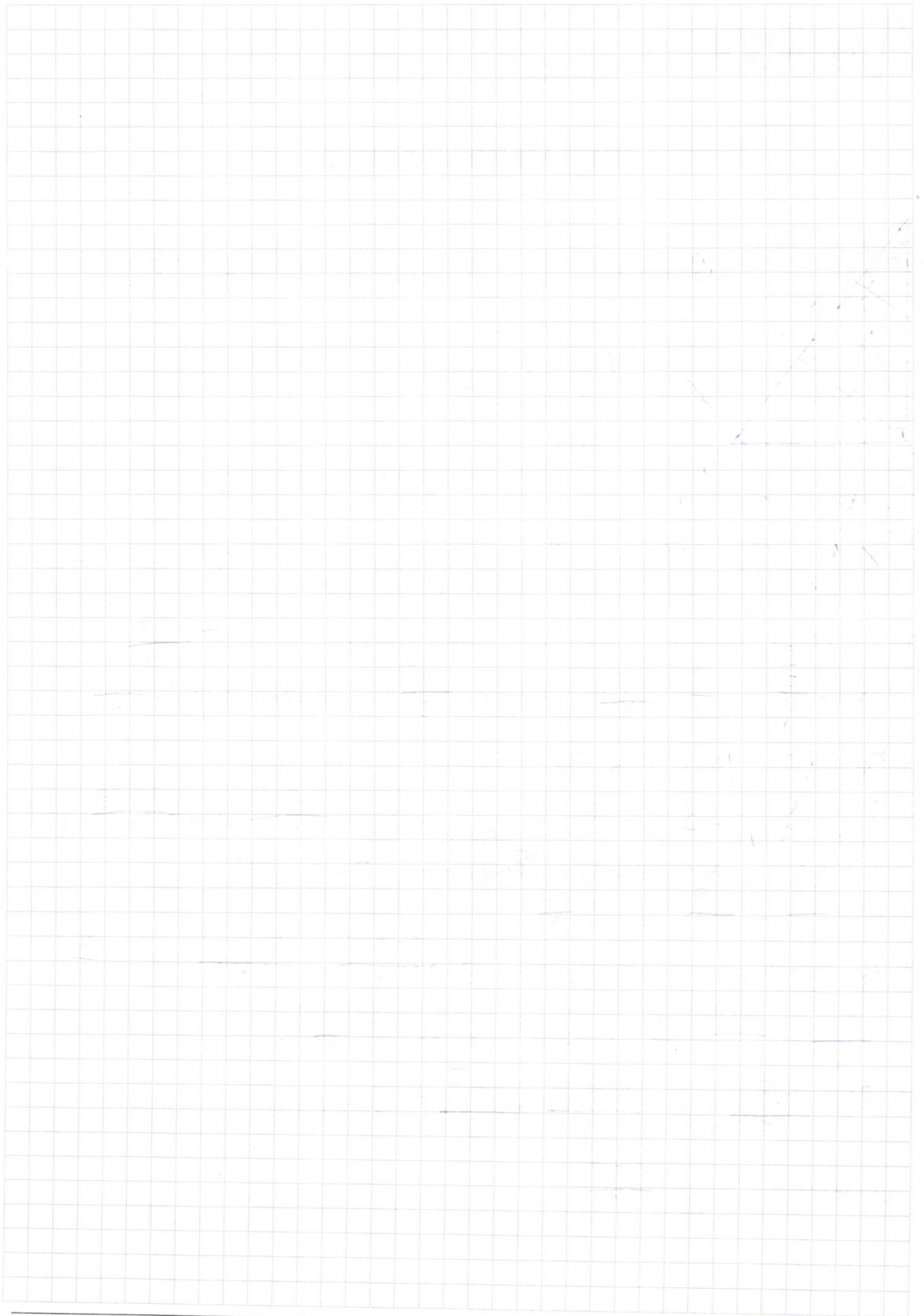
7) Из пункта 3 следует, что  $z = \frac{2\sqrt{3}y}{3} \Rightarrow \frac{4 \cdot 3 \cdot y^2}{9} + y^2 = \frac{4}{9}$

$\frac{12y^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow 21y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{21}$

8)  $zy = \frac{2\sqrt{3}y}{3} \cdot y = \frac{2\sqrt{3}y^2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = S_{CED}$

Ответ: б)  $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



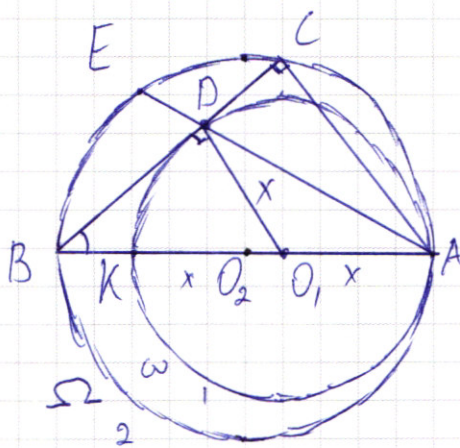


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:  $AB$  - диаметр  $\Omega$ .  $BC$  - касательная  
к  $\omega$ .  $CD = 2$ ;  $BD = 3$ .

Найти:  $r_\omega$  и  $r_\Omega$  - ? ;  $S_{BADE}$  - ?

Решение:

1)  $AK$  - диаметр  $\omega$ ;  $K$  лежит на  $AB$ .

2)  $\angle BDO_1 = 90^\circ$ , т.к.  $BD$  - касательная к  $\omega$ , а  $O_1D$  - радиус  $\omega$ .

3)  $\angle BCA = 90^\circ$ , т.к.  $\angle BCA$  является вписанным в  $\Omega$  и опирается на  $AB$ .

4)  $\triangle CBA \sim \triangle DBA$  по двум углам;  $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$   
 $3BA = 5BO_1 \Rightarrow 3BK + 6x = 5BK + 5x \Rightarrow BK = \frac{x}{2} \Rightarrow BA = 2,5x$

$$5) \frac{BD}{BC} = \frac{DO_1}{CA} \Rightarrow CA = \frac{DO_1 \cdot BC}{BD} = \frac{x \cdot 5}{3} = \frac{5x}{3}$$

6) По теореме Пифагора:  $BC^2 + CA^2 = BA^2$ :

$$5^2 + \frac{25x^2}{9} = \frac{25 \cdot 25}{100} x^2 \Rightarrow 1 + \frac{x^2}{9} = \frac{1}{4} x^2$$

$$1 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9} = \frac{9x^2 - 4x^2}{36}$$

$$36 = 5x^2 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$7) r_\omega = x = \frac{6\sqrt{5}}{5}; r_\Omega = AB : 2 = \frac{2,5}{2} x = \frac{5}{4} x = \frac{5 \cdot 6\sqrt{5}}{4 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ответ:  $r_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ;  $r_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$8x - 6 / |2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

а)  $y = 8x - 6 / |2x - 1|$  : при  $x \geq \frac{1}{2}$   $y = -4x + 6$  ; при  $x < \frac{1}{2}$   $y = 20x - 6$

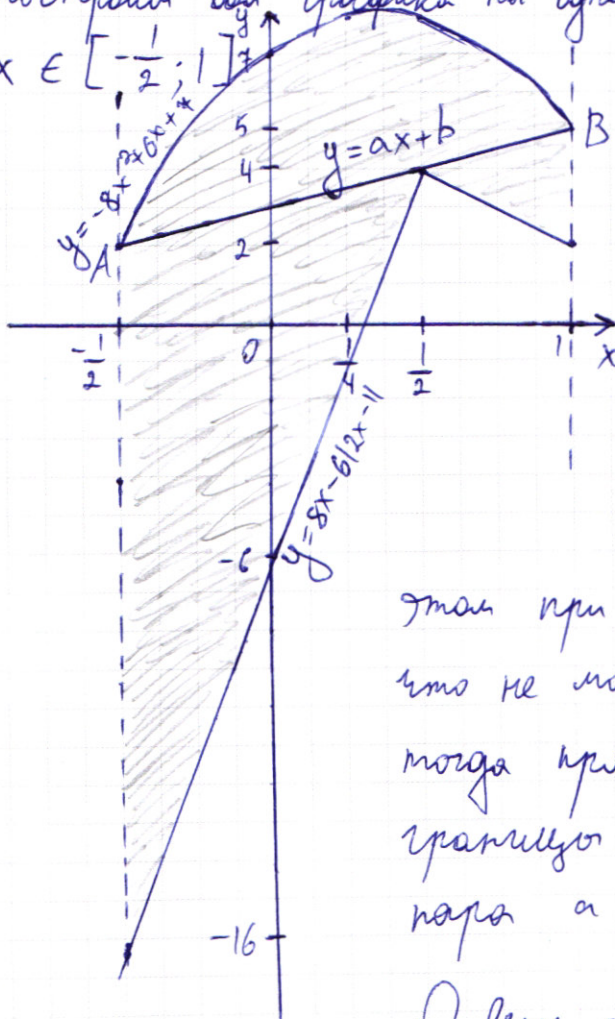
x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-16	-6	4	2

б)  $y = -8x^2 + 6x + 7$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
y	2	7	8	8	5

Построим оба графика на одной координатной плоскости.

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$



На графике мы чётко видим, где должна располагаться прямая  $y = ax + b$ . Мы можем отметить сразу, что  $a > 1$  и  $b > 0$ .

Попробуем соединить точки

$A(-\frac{1}{2}; 2)$  и  $B(1; 5)$  прямой.

Тогда её  $a = 2$  и  $b = 3$ . И при

этом при  $x = \frac{1}{2}$   $y = 4$ . Но есть одна проблема; что не можем изменить  $a$  и  $b$ , потому что тогда прямая выйдет за обозначенные границы, а значит единственная пара  $a$  и  $b$  - 2 и 3.

Ответ:  $a = 2$ ;  $b = 3$ .



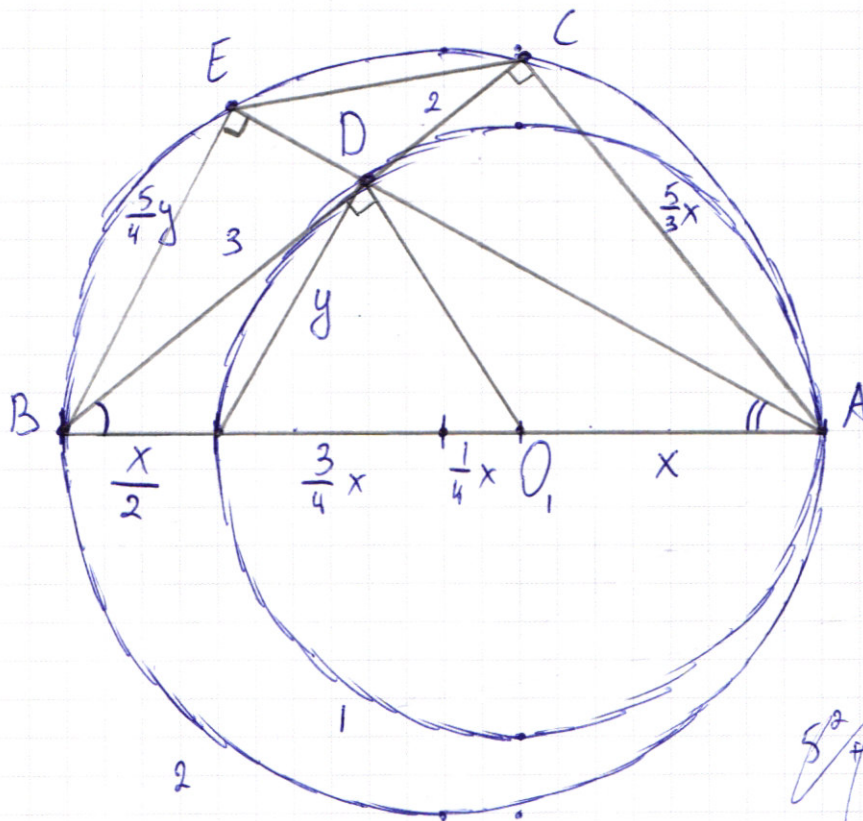


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)



$$K = x$$

$$R = \frac{5}{4}x$$

$$\frac{2x}{2,5x} = \frac{4y}{5y}$$

$$25 + \frac{25}{9}x^2 = \frac{25 \cdot 25}{100}x^2$$

$$1 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9}$$

$$1 = \frac{9x^2}{36} - \frac{4x^2}{36}$$

$$36 = 5x^2 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

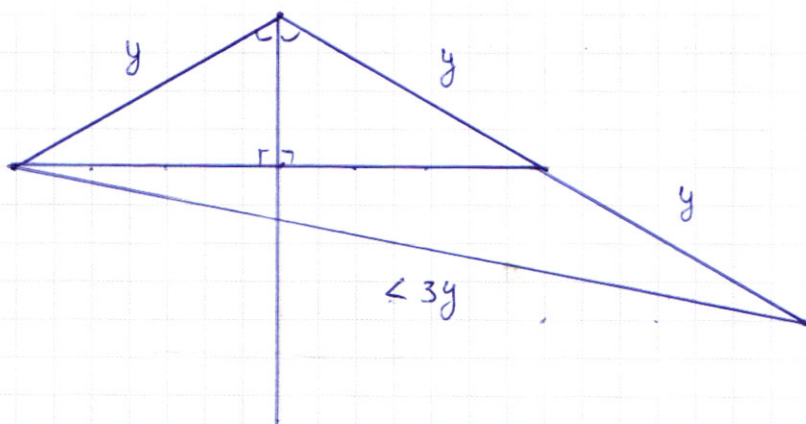
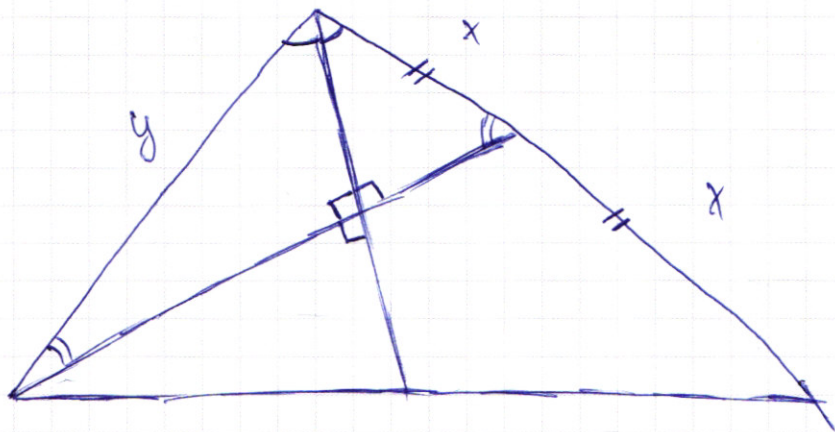
$$5^2 + \frac{25}{9}x^2 = \frac{100}{16}x^2$$

$$\frac{225}{9} + \frac{25}{9} = \frac{100}{16}x^2$$

$$\frac{25 \cdot 16}{9 \cdot 100} = x^2$$

$$x = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot \sqrt{16}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$





$$900 < 6y$$

$$900 - 3 = 897$$

$$299$$

$$900 - 6 = 894$$

$$149$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)  $a; b=aq; c=aq^2; d=q$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2aq}{a} = 2q$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{aq^2}{a}$$

$$D = 4a^2q^2 - 4a \cdot aq^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2q \\ x_1 \cdot x_2 = aq^2/a \end{array} \right\} x = q$$

$$aq^2 \cdot q = q$$

$$aq^2 = 1$$

$$3) \begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2y^2 - 11x - 10y + 20 = x - 6y$$

$$(x^2 - 11x) + (2y^2 - 10y + 20) = x - 6y$$

~~ху ху ху ху~~

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$x^2 + xy + 2y^2 - 6y - 12x - 4y - x + 20 + 6 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + xy + 2y^2 - 10y - 13x + 26 = x^2 - 12xy + 36y^2$$

$$13xy - 13x + 26 = 34y^2 + 10y$$

$$13(xy - x + 2) = y(34y + 10)$$

$$2y^2 - 10y + 20 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 5$$

$$y_1 \cdot y_2 = 10$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 20 = 100 - 80 = 20$$



$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$* x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$$

$$2y^2 - 36y^2 - 4y - 6y = -13xy + 12x + x - 6 - 20$$

~~xy^2~~

$$-34y^2 - 10y = 13(-xy + x - 2)$$

$$34y^2 + 10y = 13(xy - x + 2)$$

$$y(34y + 10) = 13(xy - x + 2)$$

$$* xy - x + 2 = (x - 6y)^2 + 6y - 4$$

$$34y^2 + 10y = 13(x - 6y)^2 + 48y - 52$$

$$34y^2 - 68y = 13(x - 6y)^2 - 52$$

~~$$34y(y - 2) = 13(x - 6y)^2 - 52$$~~

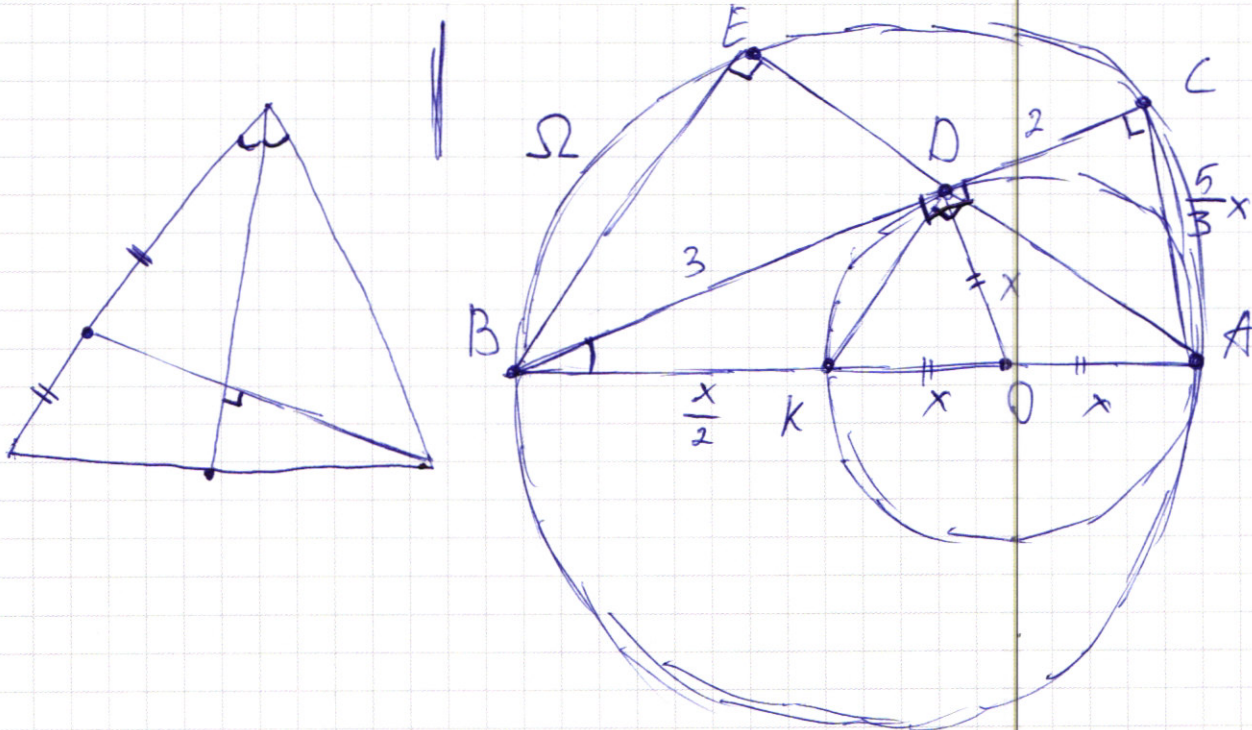
$$34y(y - 2) = 13(x - 6y + 4)(x - 6y - 4)$$

$$12x - 42y = 12\sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$x^2 + 2y^2 + 12x - 12x - 4y - 42y + 20 = 12\sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

~~$$x^2 + 2y^2 - 46y + 20 = 12x -$$~~

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$V_{\#} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{4}x = \frac{30}{4\sqrt{5}} = \frac{15}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{OD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{OD} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{OD} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{AB}{BO} = \frac{5}{3}$$

$$AC = \frac{5}{3}OD = \frac{5}{3}x$$

$$\frac{BO + OA}{BO} = \frac{5}{3}$$

$$25 = \frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{9}x^2$$

$$1 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9}$$

$$1 = \frac{9x^2 - 4x^2}{36}$$

$$36 = 5x^2 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$3BO + 3OA = 5BO$$

$$3OA = 2BO$$

$$3OA = 2BK + 2KO$$

$$x = 2BK$$

$$BK = \frac{x}{2} \Rightarrow AB = \frac{5}{2}x$$

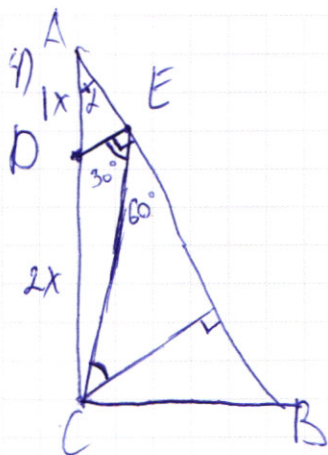




черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



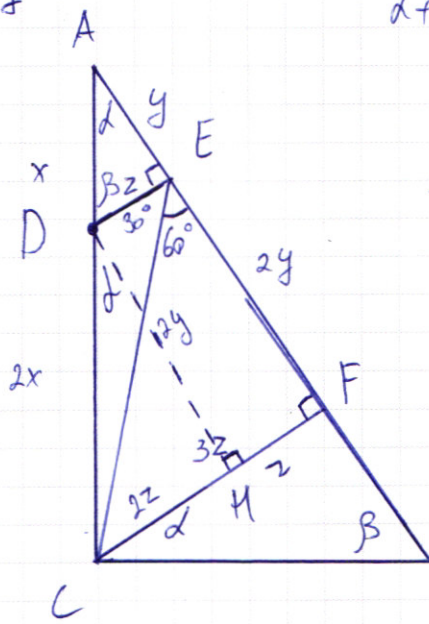
$$\operatorname{tg} \alpha = ? = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{10}{2,5} = 4$$

$$3x = \sqrt{4}$$

$$S_{CED} = ?$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



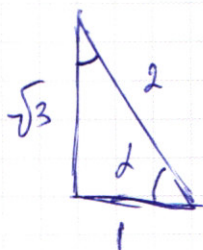
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{y}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3z}{2y} = \sqrt{3}$$

$$\frac{3z}{2y} = \sqrt{3}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$S_{CED} = S_{CDEF} - S_{CEF}$$

$$S_{CED} = S_{CDH} + S_{DEHF} - S_{CEF}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \quad S_{CED} = \frac{2z \cdot 2y}{2} + 2y \cdot z - \frac{2y \cdot 3z}{2} =$$

$$z = \frac{2y}{\sqrt{3}}$$

$$CE^2 = 9z^2 + 4y^2 = 2zy + 2zy - 3zy = zy$$

$$x = \frac{\sqrt{4}}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}$$

$$zy = \frac{2y^2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 4}{13\sqrt{3}} = \frac{8}{13\sqrt{3}}$$

$$z^2 + y^2 = x^2$$

$$z^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

$$zy = ?$$

$$y^2 = \frac{4}{13}$$

$$\frac{4y^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow 13y^2 = 4$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)  $8x - 6 | 2x - 1 | \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

1)  $8x - 6 | 2x - 1 |$  если  $2x - 1 \geq 0 \quad 2x \geq 1 \quad x \geq \frac{1}{2}$

$8x - 6(2x - 1) = 8x - 12x + 6 = -4x + 6$

если  $2x - 1 < 0 \quad 2x < 1 \quad x < \frac{1}{2}$

$8x - 6(1 - 2x) = 8x - 6 + 12x = 20x - 6$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-16	-6	4	2

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

2)  $-8x^2 + 6x + 7 = y$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	7	8	5

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

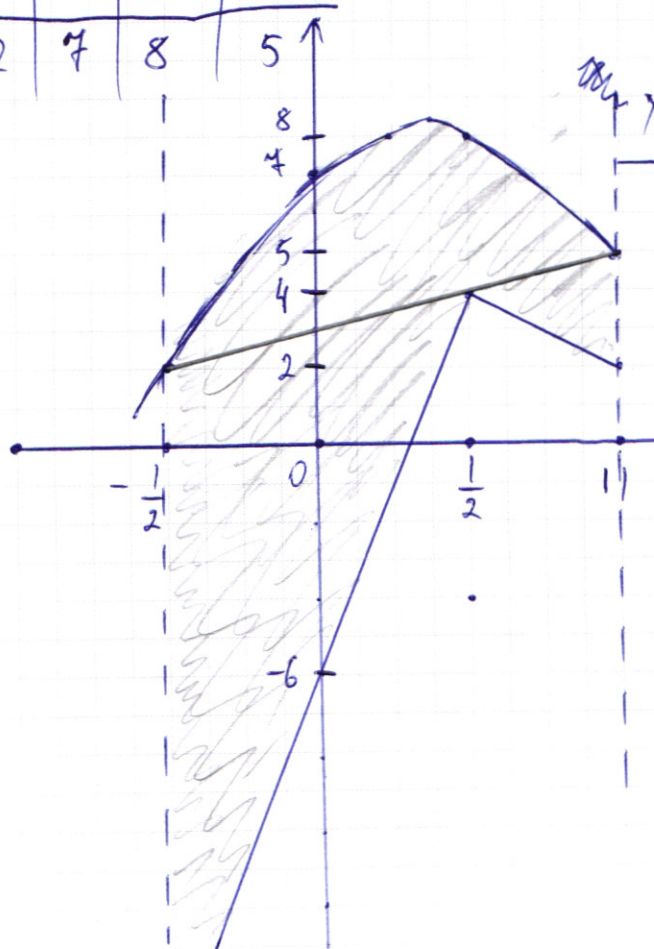
$D = 36 + 4 \cdot 8 \cdot 7$



$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-8 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

при  $x = 1$   
 $2 \leq y \leq 5$



$y = ax + b$

x	0	1
y	3	5

$b = 3$

$a = 2$

$y = 2x + 3$

$4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3$  - верно





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)