МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$ax^2 - 2bx + c = 0$; $b = a \cdot q$ $c = a \cdot q^2$

$c - ?$ $x_0 = a \cdot q^3$ x_0 - корень

$a \cdot a^2 \cdot q^6 - 2a \cdot q\, a \cdot q^3 + aq^2 = 0$;

Разделим на aq^2, т.к. $a, q \neq 0$

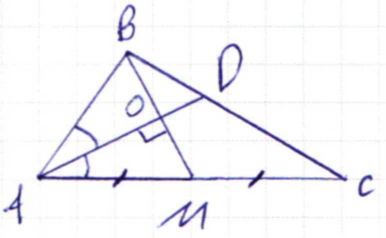
$a^2q^4 - 2aq^2 + 1 = 0$;

$(a^2q^2 - 1)^2 = 0$;

$aq^2 = 1 = c$

Ответ: 1

№2



Дано:

$AM = MC$; $\angle BAD = \angle CAD$;

$\angle AOM = 90°$; $P_{ABC} = 900$

Найти:

Количество Δ с целыми сторонами

Решение

1) Т.К. AO - высота, медиана ΔABM

$\Rightarrow$ ΔABM - равнобедр $\Rightarrow$ $AB = AM$

2) Пусть $AB = a$; $BC = y$, тогда $AC = 2a$

3) $\begin{cases} 3x + y = 900 \\ 2x < x + y \\ y < 3x \end{cases}$

$3x = y$, тогда $3x = 450$; $y = 450$

$y < 450$

Т.к. $3x \vdots 3$; $900 \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y = 447; 444;$ $444.....$

$x < y$ $\quad x = y$, тогда $x = 225$; $y = 225 \Rightarrow$

$\Rightarrow y > 225 \Rightarrow y = 228; 231...$

При $y = 447$, $x = 151$; а при $y = 228$ $x = 224$

~~Сумма~~ Кол-во таких пар равно: $224 - 151 + 1 = 74$

Ответ: 74

№7

$2 \leq x \leq 22$; $2 \leq y \leq 22$

$f(p) = [p/2]$; $f(ab) = f(a) + f(b)$

Определена на множестве полож. рац. чисел.

Кол-во пар x, y, таких, что $f(\frac{x}{y}) < 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = f(y) + f(\frac{x}{y})$;

При $f(\frac{x}{y}) < 0$ $f(y) > f(x)$

Чисел не так много, поэтому посчитаем каждое возможное $f(y)$.

$f(y)$, где $y \neq p$ считаю так:

$y = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$

$f(y) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}) + f(p_n) = f(p_1 \cdot p_2 \ldots p_{n-2}) + f(p_{n-1}) + f(p_{n-2})$;

$f(y) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) + \ldots + f(p_n)$

y	$f(y)$	y	$f(y)$	y	$f(y)$
2	1	11	5	20	4
3	1	12	3	21	4
4	2	13	6	22	6
5	2	14	4		
6	2	15	3		
7	3	16	4		
8	3	17	8		
9	2	18	3		
10	3	19	9		

„1" – 2

„2" – 4

„3" – 6

„4" – 4

„5" – 1

„6" – 2

„8" – 1

„9" – 1

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Далее просто находим сумму кол-ва возможных пар для каждого $f(y)$, таких, что $f(y) > f(x)$

$S = 1\cdot 20 + 1\cdot 19 + 2\cdot 17 + 1\cdot 16 + 4\cdot 12 + 6\cdot 6 + 4\cdot 2 = 181$

Ответ: 181

№ 6

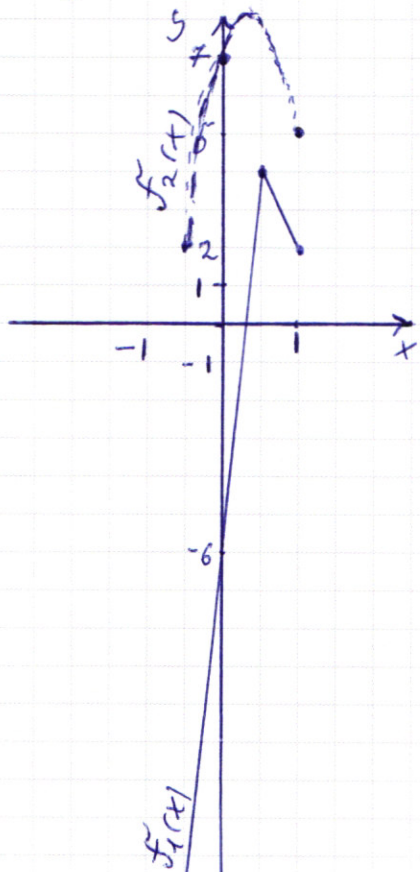
$8x - 6|2x-1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Пусть: $f_1(x) = 8x - 6|2x-1|$

$f_2(x) = -8x^2 + 6x + 7$ $\quad x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$f_3(x) = ax + b$



$|2x-1| = 0; \; 2x = 1; \; x = \frac{1}{2}$

$f_1(\frac{1}{2}) = 4; \; f_1(1) = 2$

$f_1(-\frac{1}{2}) = -16; \; f_1(0) = 6$

$f_2(1) = 5; \; f_2(0) = 7$

$f_2(-\frac{1}{2}) = 2$

$f_2(x)$ – парабола, нарисована схематично, за исключением точек $f_2(1)$; $f_2(0)$; $f_2(-\frac{1}{2})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f_3(x) = ax + b$ ← прямая.

Нам нужно „просунуть" эту прямую между графиками $f_2(x)$ и $f_1(x)$

Из чертежа явно видно, что получится это только, если

$f_3(1) = 2$; $f_3(\frac{1}{2}) = 4$; $f_3(-\frac{1}{2}) = 2$ (1)

(пользуемся, что неравенство нестрогое)

Из (1) находим, что $f_3(x) = 2x + 3$

$\Rightarrow$ $(a; b) = (2; 3)$

Ответ: $(2; 3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-2+3+4$

$\cancel{x}\geq 8$

$f(1)=0$

$f(4)=2f(2)=2$

$f(a^2)=2f(a)$

$ab\neq m^2$ -? $f(m^2)=2f(m)$

-6

$f(1)=0 \quad f(2)=1$

$\cancel{m>2}$ $f(m)$, при $m\geq 2$

$f(\frac{m}{n})$ $m>n$ = $\cancel{f(1+\frac{m-n}{n})}$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

-26

сводится к простым

$f(8)=f(4)+f(2)=f(2)+f(2)+f(2)$

$f(x)$, где $x\in N \geq 0$

$f(3)=1$

$f(\frac{m}{n})=f(2)+f(\frac{m}{2n})$

$f(\frac{3}{2})=0$

$f(3)$

$+f(2)+f\frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{4})=-1$

$=f(\frac{3}{2})=f(2)+f(\frac{3}{4})$

$\frac{x}{y}<\cancel{0}1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

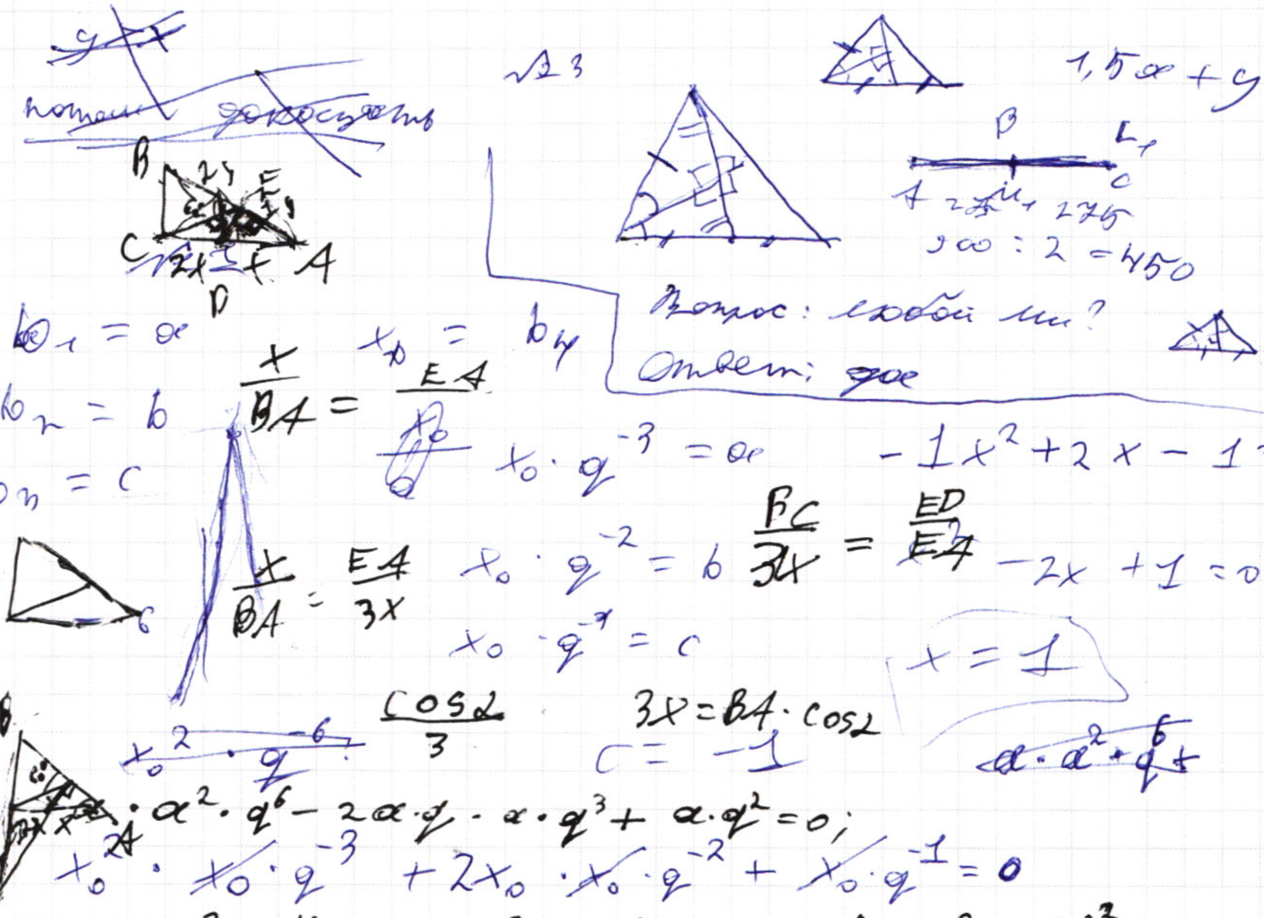
$f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)$ ✓ кроме все $f(x)$ найти и посмотреть ?

if $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow$ $f(y) > f(x) \Rightarrow$

~~потом доказать~~

№3

$1{,}5x + y = 900$



$900 : 2 = 450$

Вопрос: любой ли?
Ответ: да

$b_1 = a$ $\quad x_0 = b_4$

$b_2 = b$ $\quad \frac{x}{BA} = \frac{EA}{x_0}$ $\quad x_0 \cdot q^{-3} = a$ $\quad -1x^2 + 2x - 1 = 0;$

$b_3 = c$ $\quad \frac{BC}{3x} = \frac{ED}{EA}$

$\frac{x}{BA} = \frac{EA}{3x}$ $\quad x_0 \cdot q^{-2} = b$ $\quad -2x + 1 = 0$

$x_0 \cdot q^{-1} = c$ $\quad \boxed{x = 1}$

$\frac{\cos\alpha}{3}$ $\quad 3x = BA \cdot \cos\alpha$

~~$x_0^2 \cdot q^{-6}$~~ $\quad c = -1$ $\quad$ ~~$a \cdot a^2 \cdot q^6$~~

$a \cdot a^2 \cdot q^6 - 2a \cdot q \cdot a \cdot q^3 + a \cdot q^2 = 0;$

$x_0 \cdot x_0 \cdot q^{-3} + 2x_0 \cdot x_0 \cdot q^{-2} + x_0 \cdot q^{-1} = 0$

$a^2 \cdot q^4 - 2aq^2 + 1 = 0;$ $\quad (a q^2 - 1)^2 = aq^2 = 1$

if $x_0 = 0 \rightarrow$ бред, все числа не могут быть!

$\boxed{c = 1}$

$x_0^2 \cdot q^{-3} + 2x_0 \cdot q^{-2} + q^{-1} = 0$ $\quad 1 \cdot q^3$

$BA^2 = tg^2\alpha \cdot 9x^2 + 9x^2$

$x_0^2 + 2q x_0 + q^2 = 0$ $\quad f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

$BA^2 = 9x^2 \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$

$(x_0 + q)^2 = 0$ $\quad x_0 = -q;$ $\quad q = -x_0$

$BA = 3x \frac{1}{\cos\alpha}$

$x_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{x_0^3}\right) + 2x_0 \cdot \frac{1}{x_0^2} + x_0 \cdot \frac{1}{-x_0} = 0$

$-\frac{1}{x}$ $\quad \frac{2}{x}$ $\quad -1$

$\frac{1}{x_0} = 1$ $\quad x_0 = 1$

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(4)=f(2)+f(2)=2$;

$f(5)=2$; $f(6)=f(3)+f(2)=2$; $f(7)=3$;

$f(8)=f(4)+f(2)=3$; $f(9)=f(3)+f(3)=\boxed{2}$

$f(10)=f(5)+f(2)=3$; $f(11)=5$; $f(12)=f(6)+f(2)$

$=3$; $f(13)=6$; $f(14)=f(7)+f(2)=4$

$f(15)=3$ мне уже не проверится эта поле

$f(16)=f(8)+f(2)=4$; $f(17)=8$; $f(18)=3$;

$f(19)=9$; $f(20)=4$; $f(21)=4$; $f(22)=6$

$f(x)$	x
1	2
1	3
2	4
2	5
2	6
3	7
3	8
2	9
3	10
5	11
3	12
6	13
4	14
3	15
4	16
8	17
3	18
9	19
4	20
4	21
6	22

$f(y)>f(x)$

~~$f(y)=9$, при $y=19$~~

~~$x_9=21-1$~~

~~$f(y)=8$, при $y=17$~~

~~$x_8=21-1-1$~~ $: x_9-1$

~~$f(y)=7$ — нет~~

~~$f(y)=6$, при $y=$~~

$f(y)=9$ ~~$f(y)=7$~~

$x_9=21$ $x_7=0$

$f(y)=8$ ~~$f(y)=6$~~

$x_8=x_9-1$ ~~$x_6=x_8-6$~~

7 – „9"
1 – „8"
0 – „7"

2 – „1" 6 – „3" 1 – „5"

4 – „2" 4 – „4" 2 – „6"

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$20 + 19 + \underbrace{\overset{34}{2 \cdot 17} + \overset{16}{1 \cdot 16}}_{50} + \underbrace{\overset{48}{4 \cdot 12} + \overset{36}{6 \cdot 6}}_{84}$

$+ \underset{8}{4 \cdot 2}$

$70 + \underbrace{27 + 84}_{111} = 181$ Ответ на №1

$x^2 + 3xy^2 - 12xy = +y$

$x(y-1) - 6(y-1)$

$(y-1)(x-6)$

№3

$\cancel{1{,}5a + y = 900}$

$\begin{cases} 3a + y = 900 \\ 2a < y + a \\ \begin{cases} a < y \\ y < 3a \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} 3a + y = 900 \\ a < y \\ 3a > y \end{cases}$

$a = y \Rightarrow a = 225$

$150 < 450$ $y = 225 \to 228$

$450 > 450$

$900 : 6 = 150$

$900 : 4 = 225$

449

$y \vdots 3$

447

447

444

441

...

228

$\cancel{21}$

$\frac{-6}{-16} = 0\frac{3}{8}$

$a = 151$

$\frac{7}{8} \cdot -\frac{1}{2}$

$224 < 228$

$224 \cdot 3 = 672$

$+228$

900

$\boxed{224 \cdot 3} > 228$

$\cancel{-1(x-1)}$ $224 = 210$

$36 + 56 \cdot 4$

от $151 \ldots 224$

$\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$

$224 - 151 + 1 = 74$

№6

$x = 0$

$-6 \le b \le 7$

$20x - 1$

$x^2 + 2y^2 + -12x - 4y + 20 = 0$

$(x-6)^2 + (\sqrt{2}y - \sqrt{2})^2 \quad 18$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

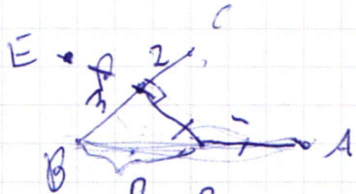
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2R_1 - R_2$

$R_{r,w}$ – ? S_{BACE}

$\cancel{R_{\Omega} = \sqrt{6}}$

$BC^2 + 9x^2 = BA^2$

$BC = tg\,\alpha \cdot 3x$

$$\begin{cases} (2R_1 - 2R_2)R_2 = 9 \\ R_2^2 + 9 = (2R_1 - R_2)^2 \end{cases}$$

$2R_1R_2 = 9 + R_2^2$

$9 + R_2^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - 4R_1R_2$

$2R_1 - R_2 = \frac{9}{2R_2}$

$\cancel{tg\alpha^2 \cdot 9x^2 + 1}$

$\frac{x^2}{tg^2\alpha \cdot 3x^2 + 9x^2} = tg^2\alpha$

$9x^2(1 + tg\,\alpha^2) = ...$

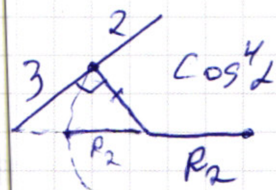
$R_2^2 + 9 = \frac{81}{R_2^2}$;

$R_2^4 + 9R_2^2 - 81 = 0$

$3 \cdot 81$ $(9\sqrt{3})$

$\frac{\cos^2\alpha}{9} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

$\cos^4\alpha = 9\sin^2\alpha$



$$\begin{cases} 2 \cdot 2(R_1 - R_2)R_2 = 9 \\ R_2^2 + 9 = 4(R_1 - R_2)^2 \end{cases}$$

$R_1 - R_2 = \frac{9}{4R_2}$

$R_2^2 + 9 = \frac{81}{4R_2^2}$;

$\cos^4\alpha + 9\cos^2\alpha - 9 = 0$

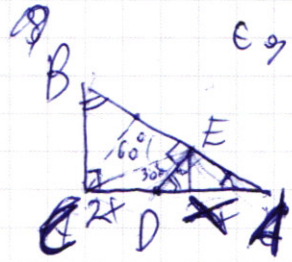
$81 + 36 = 117$

$\cancel{(2R_1 - R_2)R_2 = 9}$

$2(R_1 - R_2)2R_2 = 9$;

$$\begin{cases} 4(R_1 - R_2)R_2 = 9 \\ 9 + R_2^2 = (2R_1 - R_2)^2 \end{cases}$$

$tg(BAC)$ – ?



$R_1 = \frac{4R_2^2 + 9}{4R_2}$

$\cancel{4R_1R_2}$

$\frac{x}{AB} = \frac{EA}{3x}$; $EA \cdot AB = 3x^2$

$\frac{DE}{EA} = \frac{BC}{CA}$ $AB \cdot DE \cdot CA = 3x^2 \cdot BC$

☑ черновик ☐ чистовик

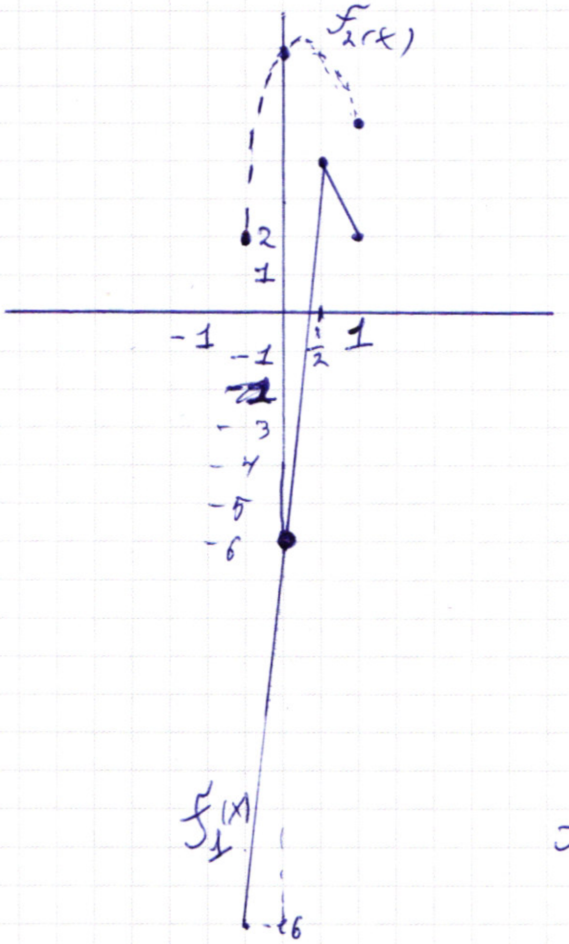
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f_1(x) = 8x - 6|2x - 1|$ $\quad x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ $\quad -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7$

$f_2(x) = -3x^2 + 6x + 7$



$f_2(1) = 5$

$f_2(0) = 7$

$f_2(-\frac{1}{2}) = 2$

$|2x - 1| = 0;$

$2x = 1;$

$x = \frac{1}{2}$

$f_1(\frac{1}{2}) = 4$

$f_1(1) = 2$

$f_1(0) = -6$

$f_3(x) = ax + b$

1

прямая

f_2 — пунктир — схематично

мы должны просунуть некую трубу $f_3(x)$ между графиком параболы и $f_2(x)$ графиком

Нетрудно заметить, что такое возможно только при

$f_3(1) = 5$; $f_3(\frac{1}{2}) = 4$; $f_3(-\frac{1}{2}) = 2$

$\Rightarrow f_3(x) = 2x + 3$

Ответ: $(2; 3)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)