МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

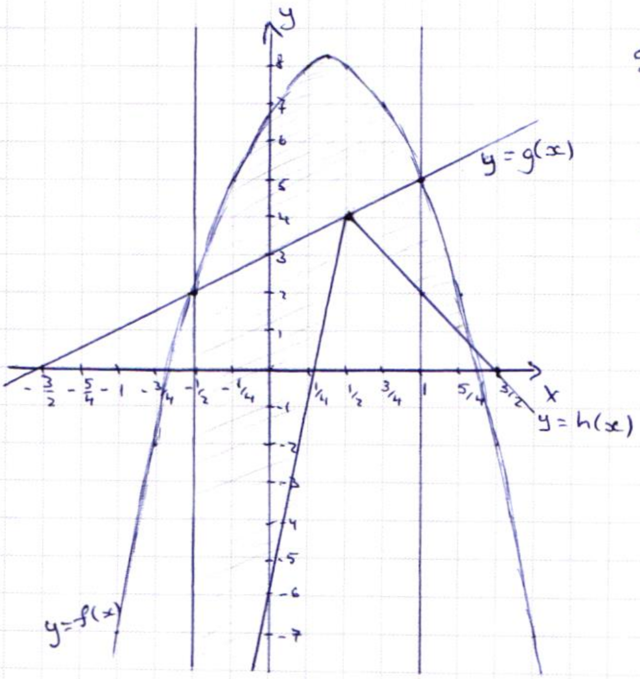
$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$f(x) = 8x-6|2x-1| \Rightarrow f(x) = \left[\begin{array}{l} 8x-12x+6,\ x \ge \frac{1}{2} \\ 8x+12x-6,\ x < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = \left[\begin{array}{l} -4x+6,\ x \ge \frac{1}{2} \\ 20x-6,\ x < \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$g(x) = ax+b$ – прямая

$h(x) = -8x^2+6x+7$ – парабола, ветви вниз

$x_в = -\frac{6}{-2\cdot 8} = \frac{3}{8} \Rightarrow y_в = -8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7 = -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7 = \frac{9+56}{8} = \frac{65}{8}$



$g(x) \ge f(x) \Rightarrow g(-\frac{1}{2}) \ge -16,\ g(1) \ge 2,$

$g(\frac{1}{2}) \ge 4$

$g(x) \le h(x) \Rightarrow g(-\frac{1}{2}) \le 2,\ g(1) \le 5$

$\begin{cases} \frac{1}{2}a+b \ge 4 \\ -\frac{1}{2}a+b \le 2 \\ a+b \le 5 \end{cases}$

Рассмотрим прямую, проходящую через т. $(-\frac{1}{2}; 2)$ и $(1; 5)$:

$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}a+b=2 \\ a+b=5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a+b-a+2b=5+4 \\ a+b=5 \end{cases}$

$\Rightarrow a=2,\ b=3$

$k(x) = 2x+3:\ k(\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{2}+3 = 4$

$\Rightarrow$ прямая $k(x)$ проходит через т. $(\frac{1}{2}; 4)$

$g(-\frac{1}{2}) \le 2,\ g(1) \le 5,\ g(\frac{1}{2}) \ge 4 \Rightarrow g(x) = k(x),\ g(-\frac{1}{2}) = 2,\ g(1) = 5,\ g(\frac{1}{2}) = 4$

Ответ: при $a=2,\ b=3$

№1

$k_n = k \cdot q^{n-1}$

$a = k \qquad b = kq \qquad c = kq^2 \qquad d = kq^3$

$ax^2 - 2bx + c = 0 \; : \; D = 4b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2} = b \pm \sqrt{b^2-ac}$

$x = kq \pm \sqrt{k^2q^2 - k \cdot kq^2} = kq = d$

$d = kq = kq^3 \Rightarrow q^2 = 1 \Rightarrow q = \pm 1$

I. $q = 1 \Rightarrow a = b = c = d$

$ax^2 - 2bx + c = c(x^2 - 2x + 1) = c(x-1)^2 = 0$

$x = d = c \Rightarrow c(c-1)^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

II. $q = -1 \Rightarrow a = c,\; b = d = -a$

$ax^2 - 2bx + c = c(x^2 + 2x + 1) = c(x+1)^2$

$x = d = -c \Rightarrow c(1-c)^2 = c(c-1)^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

Прогрессия геометрическая $\Rightarrow k \neq 0 \Rightarrow c \neq 0 \Rightarrow c = 1$

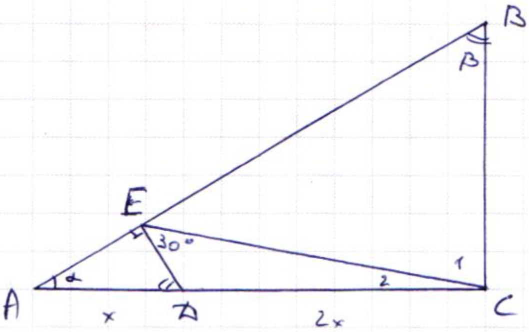
Ответ: $c = 1$

см. далее →

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) $AD : AC = 1:3 \Rightarrow AD : DC = 1:2$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ (т.к. $\angle AED = \angle ACD$, $\angle BAD$ общий) $\Rightarrow \angle ADE = \angle B = \beta$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

$\angle DEB = \angle DCB = 90° \Rightarrow DEBC$ – впис., BD – диам.

$\triangle EDC$: по теореме синусов $\frac{DC}{\sin 30°} = \frac{ED}{\sin\angle 2} \Rightarrow \frac{2x}{1/2} = \frac{ED}{\sin\angle 2}$

$ED = 4x\sin\angle 2$

$\sin\angle 2 = \sin(180° - 30° - 180° + \beta) = \sin(\beta - 30°) = \sin\beta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\beta\cdot\frac{1}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}\sin\beta - \cos(\cancel{90°-\alpha}\ \beta)}{2}$

$ED = 2x(\sqrt{3}\sin\beta - \cos\beta) = 2x\left(\sqrt{3}\cdot\frac{AE}{AD} - \frac{ED}{AD}\right)$

$ED\cdot AD = 2x(\sqrt{3}AE - ED) \Rightarrow \frac{ED}{AE}AD = 2x\sqrt{3}\frac{AE}{AE} - 2\frac{ED}{AE}$

$tg\alpha\cdot AD = 2x\sqrt{3}\ \cancel{tg\alpha} - 2tg\alpha \Rightarrow tg\alpha(x + 2x) = 2x\sqrt{3}$

$tg\alpha = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{EDC} = S = S_{AEC} - S_{AED}$

Т.к. $\triangle AED$ и $\triangle AEC$ имеют общ. угол α, то $\frac{S_{AEC}}{S_{AED}} = \frac{AE\cdot AC}{AE\cdot AD} = 3$

$\Rightarrow S_{AEC} = 3S_{AED} \Rightarrow S = S_{AEC} - S_{AED} = 2S_{AED}$

$tg\alpha = \frac{ED}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ED = \frac{2\sqrt{3}}{3}AE$

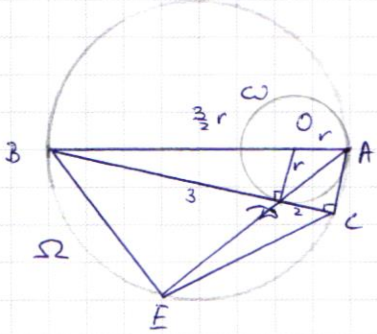
$\triangle AED$ – п/у $\Rightarrow AE^2 + ED^2 = AD^2 \Rightarrow AE^2 + \frac{4\cdot 3}{9}AE^2 = \frac{7}{9}$ $\left(AD = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$\frac{7}{3}AE^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow AE^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow AE = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ED = \frac{2\sqrt{3}}{3}AE = \frac{2}{3}$

$S_{AED} = \frac{1}{2}AE\cdot ED = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow S = 2S_{AED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3} = tg\alpha$ б) $S = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

№5



BC, AE – хорды Ω => $BD \cdot DC = AD \cdot DE = 6$

$OD \perp BC$ (т.к. BC – касат. к ω, OD – радиус),
$AC \perp BD$ (т.к. опирается на AB – диаметр)
=> $OD \parallel AC$ => $\triangle BOD \sim \triangle BAC$
(O ∈ AB по св-ву касающихся окр-тей)

$\frac{BO}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5BO = 3AB = 3BO + 3OA$

$2BO = 3OA = 3OD = 3r \Rightarrow BO = \frac{3}{2} r$

$\triangle BOD$ – прямоуг. => по т. Пифагора $BO^2 = BD^2 + OD^2$

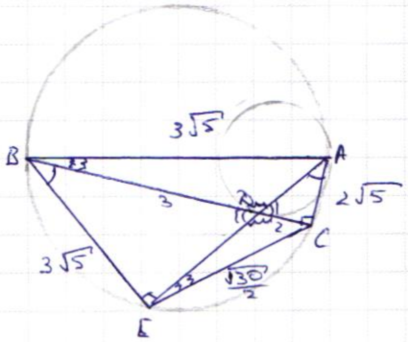
$\frac{9}{4} r^2 = 9 + r^2 \Rightarrow \frac{5}{4} r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = \frac{9 \cdot 4}{5} \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$AB = BO + OA = \frac{3}{2} r + r = \frac{5}{2} r = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot \sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

~~AB~~ AB – диаметр Ω => $R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\triangle BAC$ – п/у => $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 5 \cdot 9 - 25 = 45 - 25 = 20$

$\Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$



$\triangle BDE \sim \triangle ADC$ ($\angle BED = \angle DCA = 90°$,
$\angle BDE = \angle ADC$, т.к. верт.)

=> $\frac{BE}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BE = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{5}$

~~$\triangle BEC$ – п/у => $CE^2 = BC^2 - BE^2$~~

~~$CE^2 = 25 - 9 \cdot 5 =$~~

$\triangle BDA \sim \triangle EDC$ ($\angle BDA = \angle EDC$ как верт.,
$\angle ABC = \angle AEC$, т.к. опир. на дугу $\overset{\frown}{AC}$)

=> $\frac{EC}{AB} = \frac{DC}{AD} \Rightarrow EC = \frac{3\sqrt{5} \cdot 2}{AD}$

$\triangle ADC$ – п/у => $AD^2 = DC^2 + AC^2 = 4 + 4 \cdot 5 = 24 \Rightarrow AD = 2\sqrt{6}$

$EC = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$p = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{30}/2\right)$

$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(8\sqrt{5} + \sqrt{30}/2\right) \cdot \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{30}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{30}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(8\sqrt{5} - \frac{\sqrt{30}}{2}\right)} =$

~~$= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{30}}{2}\right)\sqrt{\left(8\sqrt{5} + \sqrt{30}/2\right) \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\sqrt{5\left(64 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{30}}{2}\right)\sqrt{\left(8\sqrt{5}+\frac{\sqrt{30}}{2}\right)\left(8\sqrt{5}-\frac{\sqrt{30}}{2}\right)} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+\frac{\sqrt{30}}{2}\right)\cdot$

$\cdot\sqrt{\cancel{6}, 5(64-6/4)} = \frac{1}{4}\cdot \overset{5}{\cancel{8\sqrt{5}}}\cdot\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{128-3}{2}} = \frac{5}{4}\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot\overset{\sqrt{125/2}}{\cancel{\sqrt{63}}} =$

$= \frac{5(4+\sqrt{6})}{8}\cdot\cancel{\sqrt{63}}\,\frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{65(\sqrt{6}+4)}{8\sqrt{2}}$

Ответ: $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $S = \frac{65(4+\sqrt{6})}{8\sqrt{2}}$

№7

$f(ab) = \left[\frac{ab}{2}\right]$, $f(ab) = \left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{b}{2}\right] \Rightarrow \left[\frac{ab}{2}\right] = \left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{b}{2}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{2y}\right] = \left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{1}{2y}\right]$

$2 \le y \le 22 \Rightarrow \left[\frac{1}{2y}\right] = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{2}\right]$

$2 \le x \le 22 \Rightarrow 1 \le \frac{x}{2} \le 22 \Rightarrow 1 \le \left[\frac{x}{2}\right] \le 22$

$\Rightarrow$ пар натуральных чисел, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, не существует.

Ответ: таких пар нет (0)

№3

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \Rightarrow x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) + 20 - 38 = 0$

$\Rightarrow (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$x - 6 = \pm\sqrt{18 - 2(y-1)^2} = \pm\sqrt{2(3-y+1)(3+y-1)} = \sqrt{2(-y+4)(y-2)}$

$\Rightarrow (y-4)(y-2) \le 0 \Rightarrow y \in [2, 4]$

$x - 6y = \sqrt{2\cancel{(x-6)}(y-1)(y-2)(-y+4)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

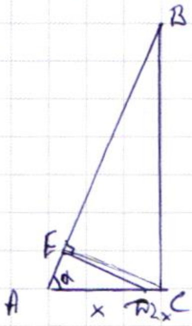
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

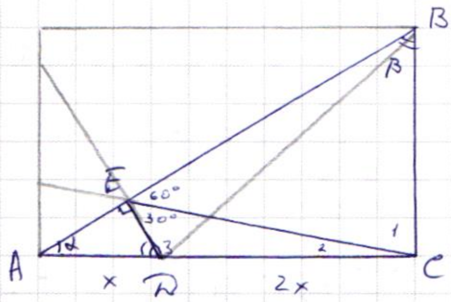
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4





$tg\,\alpha = ?$ $\quad AD : AC = 1:3$

$AE \perp AB \quad \angle CED = 30°$

$\angle C = 90°$

$\triangle AED \sim \triangle ACB \Rightarrow \angle B = \angle ADE$

$\alpha + \beta = 90° \qquad \beta + \angle 1 + 60° = 180°$

$\angle 3 = 180° - \beta \Rightarrow$

$30° + \angle 2 + 180° - \beta = 180°$

$\angle 1 + \angle 2 = 90°$

$tg\,\alpha = \frac{ED}{AE}$ $\qquad \sqrt{7}$

$\beta + \angle 1 = 120°$

$\beta - \angle 2 = 30° \Rightarrow \beta - \angle 2 + \angle 1 + \angle 2 = 30 + 90$

$\angle 1 + \angle 2 = 90°$

$DEBC$ – впис, BD – диаметр $(\angle DEB = \angle C = 90°) \Rightarrow \angle B + \angle 3 = 180°$

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{3x} = \frac{ED}{BC} = \frac{3x}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = 9x^2$

$\triangle EDC \; \frac{DC}{\sin 30°} = \frac{ED}{\sin\angle 2} \Rightarrow \frac{2x}{1/2} = \frac{ED}{\sin\angle 2} \Rightarrow ED = 4\sin\angle 2$

$\sin\angle 2 = \sin(90° - \cancel{\beta}) = \cos\cancel{\beta}\angle 1 = \cos(180° - \beta - 60°) = -\cos(\beta + 60°) =$

$= \sin\beta\sin 60° - \cos\beta\cos 60° = \frac{\sqrt{3}\sin\beta}{2} - \frac{\cos\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}\sin\beta - \sin(90° - \beta)}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}\sin\beta - \sin\alpha}{2}$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \Rightarrow \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$ED = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}\sin\beta - \sin\alpha}{2} = 2\left(\sqrt{3} \cdot \frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB}\right) = 2\left(\sqrt{3} \cdot \frac{AE}{AD} - \frac{ED}{AD}\right)$

$: AE$

$ED \cdot AD = 2\sqrt{3}AE - 2ED \qquad tg\,\alpha \cdot AD = 2_x\sqrt{3} - 2_x tg\,\alpha$

$tg\,\alpha\,(AD - 2_x) = 2_x\sqrt{3} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{2_x\sqrt{3}}{x - 2x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\angle 2 = 180° - 30° - 180° + \beta = \beta - 30° \Rightarrow \sin(\beta - 30°) = \sin\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} -$

$- \cos\beta \cdot \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6 $8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$D = 36 + 8\cdot 24 = 36 + 192 = 228$

$x_6 = \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{6}{-2\cdot 8} = \frac{3}{8}$ $y_e = -8\cdot\frac{9}{8\cdot 8} + 6\cdot\frac{3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9+56}{8} = \frac{65}{8}$

$f(x) = 8x - 6|2x-1| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 8x - 12x + 6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 8x + 12x - 6, & x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -4x + 6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x - 6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$g(x) = ax + b$ – прямая

$h(x) = -8x^2 + 6x + 7$

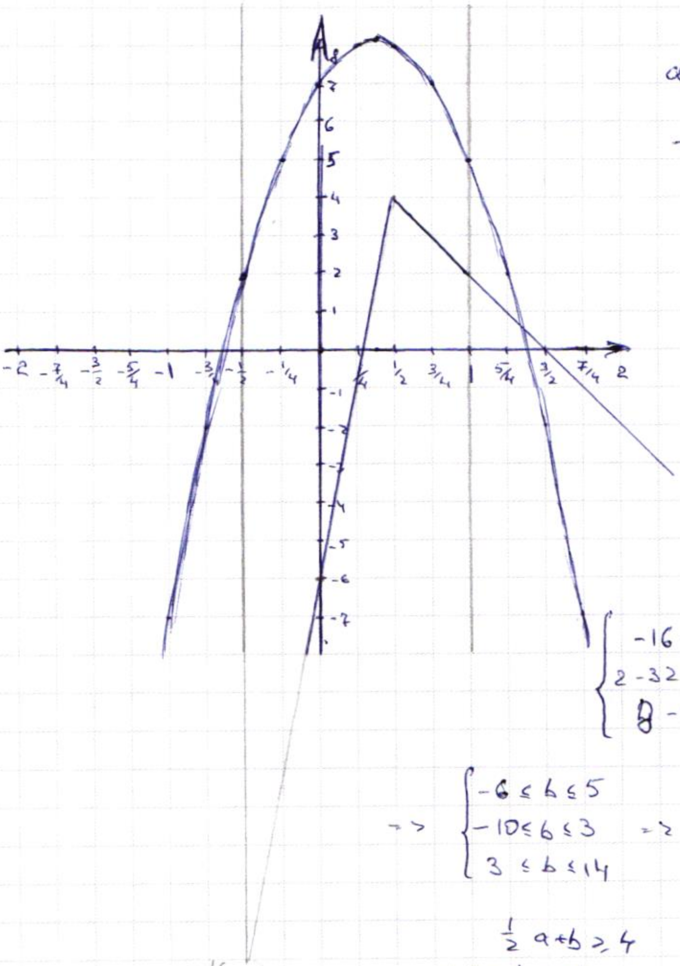
$-8\cdot\frac{1}{4} - 6\cdot\frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$

$-8\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{2} + 7 = -2 + 3 + 7 = 8$

$-8\cdot\frac{1}{16} + 6\cdot\frac{1}{4} + 7 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 7 = 8$

$-8\cdot\frac{25}{16} + 6\cdot\frac{5}{4} + 7 = -\frac{25}{2} + \frac{15}{2} + 7 = 7 - 5 = 2$

$-8\cdot\frac{9}{4} + 6\cdot\frac{3}{2} + 7 = -18 + 9 + 7 = -9 + 7 = -2$



$g(x) \ge f(x)$

$\Rightarrow g(1/2) \ge 4;\ g(-\frac{1}{2}) \ge -16;\ g(1) \ge 2$

$g(x) \le h(x) \Rightarrow g(1) \le 5$

$g(-\frac{1}{2}) \le 2$

$2 \le a + b \le 5$

$-16 \le -\frac{1}{2}a + b \le 2$

$4 \le \frac{1}{2}a + b \le 8$ $\Rightarrow -12 \le 2b \le 10 \Rightarrow -6 \le b \le 5$

$-2 \le \frac{1}{2}a \le 13 \Rightarrow -4 \le a \le 16$

$-10 \le a + b \le 21$

$\begin{cases} -16 + 4 \le -\frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}a + b \le 2 + 8 \\ 2 - 32 \le -a + 2b + a + b \le 5 + 4 \\ -5 \le a + 2b - a - b \le 16 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 \le 2b \le 10 \\ -30 \le 3b \le 9 \\ 3 \le b \le 14 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -6 \le b \le 5 \\ -10 \le b \le 3 \\ 3 \le b \le 14 \end{cases} \Rightarrow b = 3?$

$-\frac{1}{2}a + b = 2$

$a + b = 5$ $\Rightarrow a + b - a + 2b = 5 + 4$

$3b = 9 \Rightarrow b = 3$

$a = 5 - 3 = 2$

$\frac{1}{2}a + b \ge 4$

$2 \ge -\frac{1}{2}a + b$

$g(x) = 2x + 3$

$g(\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~1~~ 2 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7

№1. $k_n = x_1 \cdot q^{n-1}$

$a = k_1$ $b = k_1 q$ $c = k_1 q^2$ $d = k_1 q^3$ $k_1 = k$

$a(x-d)(x-d') = 0$ $ax^2 - 2bx + c = 0$ $c = ?$

$D = 4b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2} = b \pm \sqrt{b^2-ac}$

$x_3 = kq \pm \sqrt{k^2q^2 - k \cdot kq^2} = kq$

$kq^3 = kq \Rightarrow q^2 = 1 \Rightarrow a = b = c = d$ $q = \pm 1$

№3 $x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \rightarrow x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$

$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) + 20 - 38 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \Rightarrow x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\begin{array}{r} 225 \\ -169 \\ \hline 56 \end{array}$ $\begin{array}{r} 169 \\ \cdot 119 \\ \hline 1521 \\ 169 \\ 169 \\ \hline 111 \end{array}$

I. $x^2 - 12xy + 36 = xy - 6y - x + 6 \Rightarrow x^2 - 13xy + x + 6y + 30 = 0$

$x \geq 6y$; $(x-6)(y-1) \geq 0$

$D = (-13y+1)^2 - 4 \cdot (6y+30) = 169y^2 - 26y + 1 - 24y - 120 =$

$= 169y^2 - 50y - 119 =$

$D = 2500 - 4 \cdot 169 \cdot 119 = 2500 -$

$D = 144 - 8y^2 + 16y - 80 = -8(y^2 - 2y + 1) + 64 + 8 = -8(y-1)^2 + 72$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{8(9-(y-1)^2)}}{2} = \frac{13 \pm 2\sqrt{2(y+2)(-y+4)}}{2}$

$q = 1 \Rightarrow a = b = c = d$, $a(x^2 - 2x + 1) = 0$ $a(x-1)^2 = 0$

$q = -1 \Rightarrow a = c$, $b = d = -c$ $ax^2 + 2ax + a = 0 \Rightarrow a(x+1)^2 = 0$

$f(ab) = \left[\frac{ab}{2}\right]$ $f(ab) = f(a) + f(b) = \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] \Rightarrow \left[\frac{ab}{2}\right] = \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right]$

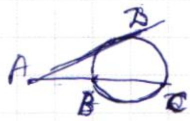
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \left[\frac{x}{2y}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{1}{2y}\right]$

☑ черновик ☐ чистовик

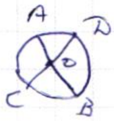
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

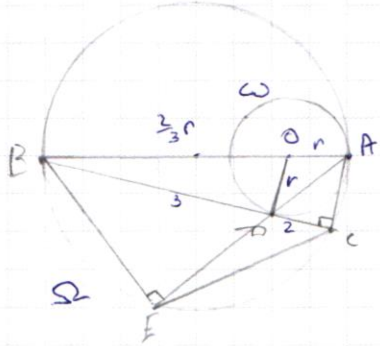
(Нумеровать только чистовики)



$AD^2 = AB \cdot AC$



$AO \cdot OB = CO \cdot OD$



$BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow AD \cdot DE = 6$

$OD \perp BC,\ AC \perp BC \Rightarrow OD \parallel AC$

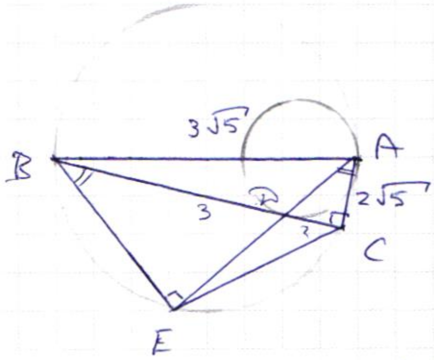
$\triangle BOD \sim \triangle BAC$

$\Rightarrow \frac{BO}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5BO = 3AB$

$5BO = 3BO + 3OA \Rightarrow 2BO = 3OA = 3r$

$\frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow OD = r = \frac{3}{5}AC$

$R = \frac{1}{2}AB \qquad r = \frac{3}{5}AC$



$x-6 = \sqrt{18-2(y-1)^2}$

$x-6y = \sqrt{(y-1)2(9-(y-1)^2)} = \sqrt{2(y-1)(9-y+1)(9+y-1)}$

$x-6y = \sqrt{2(y-1)(10-y)(8+y)}$

$x = \sqrt{2(y-1)(y+8)(10-y)} + 6y$

$y \in (-\infty; -8) \cup (1; 10]$

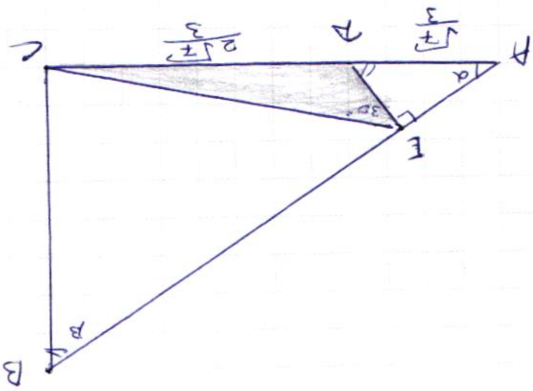
$y^2 = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$y^2 = xy - 6y - x + 6$

$y^2 - y(x-6) - (x-6) = 0$

$D = (x-6)^2 + 4(x-6) = (x-6)(x-2)$

$y = \frac{x-6 \pm \sqrt{(x-6)(x-2)}}{2}$



$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{ED}{AE}$

$3\sin\alpha = 2\sqrt{3}\cos\alpha \qquad ED = \frac{2\sqrt{3}AE}{3}$

$S = S_{AEC} - S_{AED}$

$\frac{S_{AEC}}{S_{AED}} = \frac{AE \cdot AC}{AE \cdot AD} = \frac{AC}{AD} = \frac{3x}{x} = 3$

$\Rightarrow S_{AEC} = 3S_{AED} \Leftarrow$

$\Rightarrow S = S_{AEC} - S_{AED} = 3S_{AED} - S_{AED} = 2S_{AED}$

$S_{AED} = \frac{1}{2}AE \cdot ED = \frac{1}{2}AE \cdot AD \cdot \sin\alpha$

$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}AE}{3}$

$\frac{ED}{AD} = \sin\alpha \rightarrow ED = AD\sin\alpha$

$AE^2 + ED^2 = AD^2 \rightarrow \frac{7}{9} = AE^2 + \frac{4 \cdot 3 AE^2}{9}$

$AE^2 + \frac{4}{3}AE^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{7}{3}AE^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)