МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

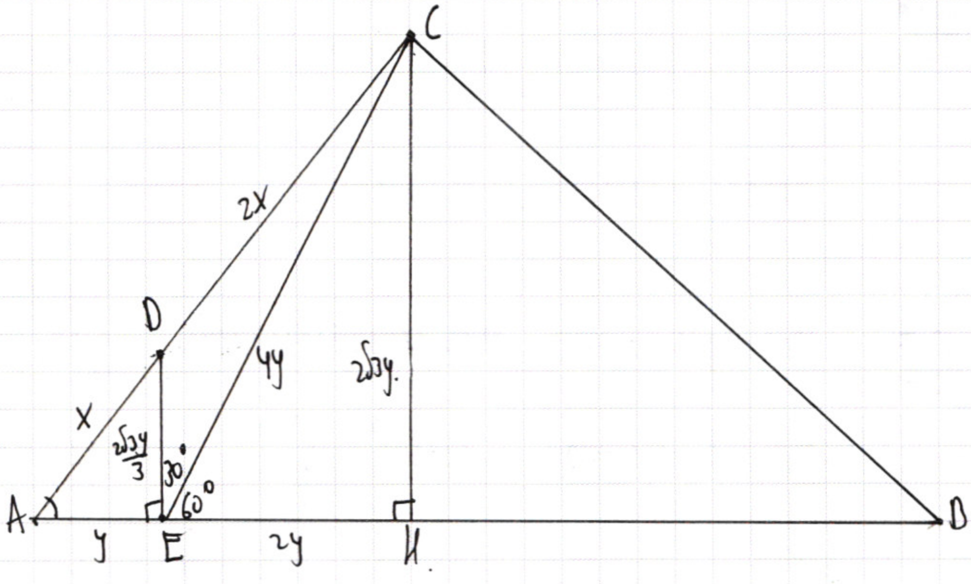
1. Пусть $\underset{a\neq 0}{a=t}$, коэффициент геометрической прогрессии равен q. Тогда $b=qa=qt$, $c=qb=q^2t$. Тогда 4-ый член равен $qc=q^3t$. По условию q^3t является корнем уравнение $ax^2-2bx+c=0$. $D=4b^2-4ac$. $D=4(qt)^2-4\cdot t\cdot q^2t=$ $=4q^2t^2-4q^2t^2=0$. $x_{1,2}=\frac{2b\pm 0}{2a}=\frac{b}{a}$; $\frac{b}{a}=q^3t$. $\frac{qt}{t}=q^3t$.

По условию $t\neq 0$, тогда $q=q^3t$; $t=\frac{q}{q^3}$. $q\neq 0 \Rightarrow t=\frac{1}{q^2}$.

Тогда $a=t=\frac{1}{q^2}$, $b=\frac{1}{q}$, $c=1$. c – это третий член прогрессии.

Ответ: 1.

4.



Дано:

$\angle C = 90°$

$D \in AC$;

$E \in AB$:

$AD : AC = 1 : 3$

$DE \perp AB$.

$\angle CED = 30°$

а) $tg\,\angle BAC$ - ?

1. Пусть $AD = x$, тогда $AC = 3x$, тогда $DC = 2x$. Опустим из т. C высоту на AB. H-осн. высоты $DE \perp AB$ и $CH \perp AB$, тогда по т. Фалеса $\frac{AD}{AE} = \frac{DC}{EH}$ или

$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} = \frac{1}{2}$. $AE = y$, тогда $EH = 2y$. $\angle DEH = 90°$, $\angle DEC = 30° \Rightarrow \angle CEH = 60°$.

Тогда $EH = EC \cos 60° = \frac{1}{2} EC \Rightarrow EC = 4y \Rightarrow CH = \sqrt{(4y)^2 - (2y)^2} = 2\sqrt{3}y$

$\Delta ADE \sim \Delta ACH$ по 2 углам ($\angle A$ - общий, $\angle AED = \angle AHC = 90°$) $\Rightarrow \frac{CH}{DE} = \frac{AC}{AD}$;

$\frac{CH}{DE} = \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow DE = \frac{1}{3} CH = \frac{1}{3} 2\sqrt{3}y = \frac{2\sqrt{3}y}{3}$. $tg\,\angle BAC = tg\,\angle EAD =$

$= \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{2\sqrt{3}y}{3}}{y} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ б) $AC = \sqrt{7}$. S_{CED} - ? Найдём x из ΔACH:

$(3y)^2 + (2\sqrt{3}y)^2 = (3x)^2$; $9y^2 + 12y^2 = 9x^2$; $21y^2 = 9x^2$. $x^2 = \frac{21y^2}{9}$; $x = \frac{\sqrt{21}y}{3}$; $AC = \sqrt{7}$;

$3x = \sqrt{7}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Тогда $\frac{\sqrt{21}y}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$. $y = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Продолжение. $D \in AC$, $E \in AB$ и $DE \parallel CK$. $\Rightarrow \triangle DEC$ внутри $\triangle ACK$. Тогда $S_{CED} = S_{ACK} - S_{AED} - S_{ECK}$. $S_{ACK} = \frac{3y \cdot 2\sqrt{3}y}{2} = 3\sqrt{3}y^2$.

$S_{AED} = \frac{y \cdot \frac{2\sqrt{3}y}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}y^2$. $S_{EKC} = \frac{2y \cdot 2\sqrt{3}y}{2} = 2\sqrt{3}y^2$. $S_{CED} = 3\sqrt{3}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}y^2 - 2\sqrt{3}y^2 =$

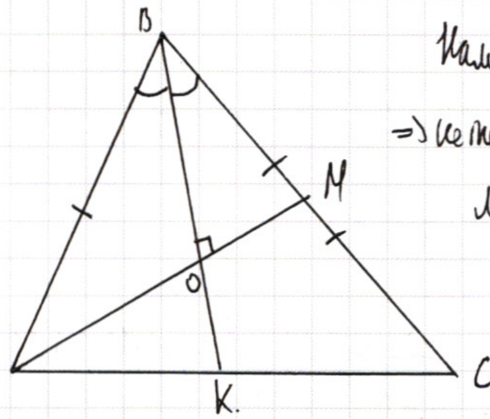
$= \sqrt{3}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}y^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2$; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, как мы нашли. Тогда $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2 =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

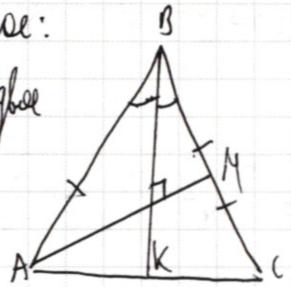
2.



Нам не важно, какие именно стороны какого значения. $\Rightarrow$ не теряя общности пусть бис-са из т. B, медиана из т. A. $BK \cap AM = O$; $\angle BOM = 90°$. Тогда в $\triangle ABM$ BO - бис-са и высота $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ABM$ - равнобедр. с осн. AM. $\Rightarrow AB = BM$. Т.е в треуг. $AB = BM \Rightarrow BC = 2AB$.

Сторона, к которой проведена медиана, должна быть вдвое больше третьей стороны, из которой ничего не проведено. Верно и обратное:

Если одна сторона вдвое больше другой, то медиана проведенная к стороне, которая вдвое больше, перпендикулярна бис-се третьей стороны: $AM \perp BK$.



Пусть $AB = x$, $BC = 2x$, $AC = 900 - 3x$, $x \in \mathbb{N}$.

По нер. треуг. $\begin{cases} AB + BC > AC & ① \\ AC + AB > BC & ② \\ AC + BC > AB & ③ \end{cases}$

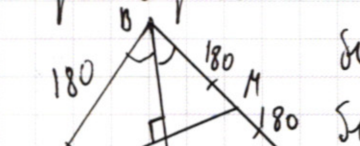
Из 2 усл. автоматически следует 3 усл.:

$AC + AB > BC \Rightarrow AC + BC > 2BC - AB > 2BC - BC = BC > AB$.

① $AB + BC > AC \Rightarrow x + 2x > 900 - 3x$; $6x > 900$; $x > 150$.

② $AC + AB > BC \Rightarrow 900 - 3x + x > 2x$; $4x < 900$; $x < 225$.

Рассмотрим случай $x = 180$



бис-са $BK \perp AM$ медиане
бис-са $AM \perp BK$ медиане $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ две бис-сы $\perp$ двум медианам

$\Rightarrow x = 180$ - не подходит. При других $150 < x < 225$, $x \neq 180$

Т.е если 1 сторона вдвое больше другой, то одна бис-са будет перпендикулярна одной медиане, при условии, что третья сторона им не равна.

Равенство будет если:

$AB = BC$: $x = 2x$, $x = 0$ невозможно

$AB = AC$: $x = 900 - 3x$, $x = 225$ невозможно

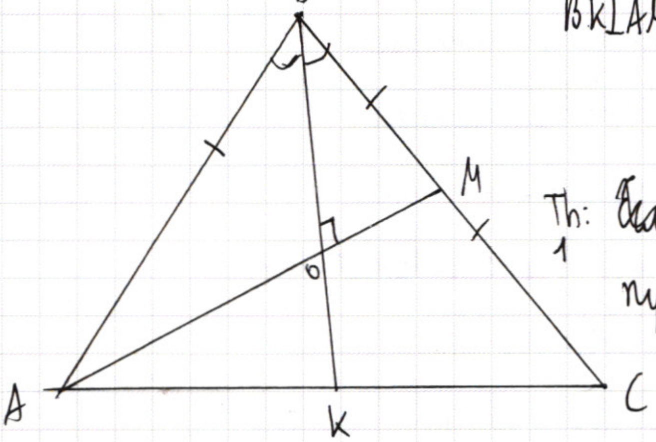
$BC = AC$: $2x = 900 - 3x$. $x = 180$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

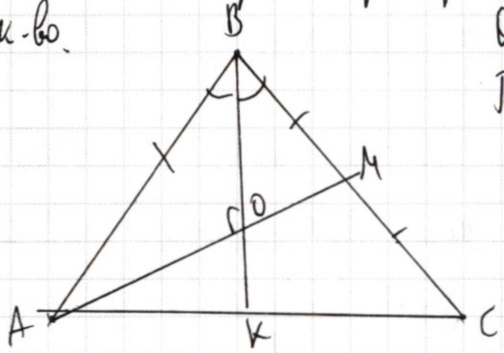
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. 1) Одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан:

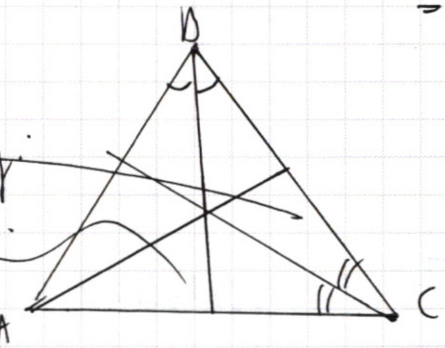


$BK \perp AM$, BK-бис-са. AM-мед. $\triangle ABM$:
$AM \cap BK = O$
BO - высота и бис-са $\Rightarrow \triangle ABM$ - равнобедр. с осн. AM. $\Rightarrow AB = BM$

Th: ~~Если~~ Если в треуг. сторона „1" вдвое меньше стороны „2", то медиана, опущенная на сторону „2" перпендик. бис-се, опущенной на стор. „3". Док-во.



Опустим медиану AM:
По усл. $BM = MC = AB$
Опустим бис-су BK
$AB = BM \Rightarrow \triangle ABM$-р/б с осн. AM.
$AM \cap BK = O$.
BO - бис-са $\Rightarrow BO$ еще и высота $\Rightarrow BK \perp AM$. Доказано



2) ~~Две бис-сы перп. одной мед.~~
~~одна бис-са перп. двум мед.~~
~~две бис-сы перп. двум мед.~~

$\Rightarrow$ ~~Хотя бы одна бис-са $\perp$ одной мед.~~ $\Rightarrow BC = 2AB$ и еще ~~каки~~ AC

г) больше 1 бис-сы перп. 1 мед. или 1 ~~мед~~ бис-са перп. > 1 ~~бис~~ медианы или > 1 бис перп > 1 мед.
Тогда хотя бы 1 бис-са ⊥ 1 мед => по Th 1 $BC=2AB$. Иначе AC вдвое больше или меньше какой-то стороны. Тогда либо $AC=\frac{1}{2}AB$, либо $AC=2AB$, либо $AC=2BC$, либо $AC=\frac{1}{2}BC$.

а) ~~AB=x, BC=2x, AC~~ $AC=\frac{1}{2}AB$: Пусть $AB=x$, $BC=2x$, $AC=\frac{1}{2}x$. $2x+x+\frac{1}{2}x=900$

$\frac{7}{2}x=900$

$7x=1800$

$x=\frac{1800}{7}$ - не целое.

б) $AC=2AB$: $AB=x$, $BC=2x$, $AC=2x$: $5x=900$ $x=180$ - подходит.

в) $AC=2BC$: $AB=x$, $BC=2x$, $AC=4x$ $7x=900$ $x=\frac{900}{7}$ - не целое.

г) $AC=\frac{1}{2}BC$: $AB=x$, $AC=x$, $BC=2x$. $4x=900$ $x=225$ - подходит.

Т.е для $x=180$ и $x=225$ условие, что 1 мед ⊥ 1 бис-а не выполняется.

з) Неравенство треуг: $AB=x$, $BC=2x$, $AC=900-3x$.

$$\begin{cases} AB+BC>AC \\ AC+AB>BC \\ AC+BC>AB \end{cases} \begin{cases} x+2x>900-3x \\ 900-3x+x>2x \\ 900-3x+2x>x \end{cases} \begin{cases} 6x>900 \\ 4x<900 \\ 2x<900 \end{cases} \begin{cases} x>150 \\ x<225 \\ x<450 \end{cases} \Rightarrow 150<x<225$$

=> при $150<x<225$, $x\neq180$, $x\neq225$ и $x\in\mathbb{N}$ такой треуг. существует.
Причем для каждого x такой треуг. будет строго единственным, т.к. медиана и бис-са по Th 1 будут исходить из фиксированных вершин.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=151=150+1 \\ \vdots \\ x_{74}=224=150+74 \end{array}\right\} \text{74 треуг.}$$

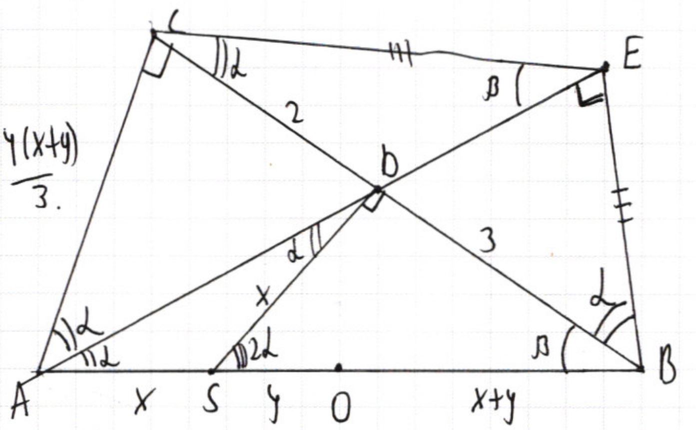
Но $x=180$ - не подходит =>

=> 73 треуг.

Ответ: 73 треугольника.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



Дано:
Ω и ω кас. в т. A.
AB — диаметр Ω
BC кас. ω в т. D.
$AD \cap \Omega = E$
$CD = 2$ $BD = 3$
S_{DACE} - ?

1. O — центр Ω. AB — диам. $\Rightarrow AO = OB$, $O \in AB$.

S — центр ω. Т.к. A — общая т. касания, то AS и AO будут иметь угол 90° с касательной $\Rightarrow S \in AB$, т.к. кас. внутр. образом. Пусть $AS = x$, $SO = y$, тогда $OB = x+y$.

$CB \cap AE = D$. CB — кас. к $\omega \Rightarrow \angle SDB = 90^\circ$. $SA = SD = x$ как радиусы

$ABCE$ — вписанный. $\angle ABC = \angle AEC$ как вписанные и оп. на дугу AC. $= \beta$

$\angle EAB = \angle BCE$ как впис. и оп. на одну дугу BE и равны α. $\angle SDA = \angle SAD = \alpha$ как углы при осн. р/б треуг.

$\angle DSB = 2\alpha$, т.к. $= \angle DAS + \angle SDA = \alpha + \alpha$. $\angle AEB = 90^\circ$, как угол. оп. на диаметр

$\triangle SDB$: $\angle DSB + \angle DBS + \angle SDB = 180^\circ$; $2\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$; $2\alpha + \beta = 90^\circ$.

$\triangle CEB$: $\angle CBE = 180^\circ - \alpha - \beta - 90^\circ = 90^\circ - \alpha - \beta = (2\alpha + \beta) - \alpha - \beta = \alpha$.

$\angle CAE = \angle CBE$ как впис. и оп. на дугу $CE = \alpha$.

$\triangle CAB$: AD — бис-са $\Rightarrow \dfrac{CD}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$ по св-ву бис-сы: $\dfrac{2}{3} = \dfrac{AC}{2(x+y)}$; $AC = \dfrac{4(x+y)}{3}$.

$\angle ACB = 90^\circ$ как оп. на диаметр AB. ~~$\triangle ACB$~~:

$\triangle ACB \sim \triangle SDB$ по 2 углам: $\angle ACB = \angle SDB = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle SBC = \beta$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{DB}{CB} = \dfrac{SB}{AB}$; $\dfrac{3}{5} = \dfrac{x+2y}{2x+2y}$; $5x + 10y = 6x + 6y$; $4y = x$.

5. Продолжение: $x=4y$. ΔSDB: $DB=3$; $SD=x=4y$, $SB=x+2y=$
$=6y$.

$\angle SDB=90^\circ$.

$\Rightarrow SD^2+DB^2=SB^2$; $(4y)^2+3^2=(6y)^2$; $16y^2+9=36y^2$; $20y^2=9$; $y^2=\frac{9}{20}$.

$y=\frac{3}{\sqrt{20}}$

$x=4y=\frac{12}{\sqrt{20}}$.

$AS=x=$ рад. окр $\omega=\frac{12}{\sqrt{20}}=\frac{6}{\sqrt5}=\frac{6\sqrt5}{5}$.

$AO=x+y=$ рад. окр. $\Omega=\frac{3}{\sqrt{20}}+\frac{12}{\sqrt{20}}=\frac{15}{\sqrt{20}}=\frac{15\sqrt{20}}{20}=\frac{3\sqrt{20}}{4}=\frac{6\sqrt5}{4}$

~~$S_{BACE}=S_{AOC}+S_{COE}+S_{EOB}$.~~ $S_{BACE}=S_{ACB}+S_{CEB}$.

~~$S_{AOC}=(x+y)(x+y)$~~:

$S_{ACB}=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{\frac{4(x+y)}{3}\cdot5}{2}=\frac{2(x+y)\cdot5}{3}=\frac{10}{3}(x+y)=$

$=\frac{10}{3}\cdot\frac{3\sqrt{20}}{4}=\frac{5\sqrt{20}}{2}$.

S_{CEB}: ΔCEB – р/б: $\angle ECD=\angle EBC \Rightarrow EC=EB$.

$\cos\alpha=\frac{\sqrt5}{\sqrt6}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt6}$, т.к. α – ост.

по т. sin. в ΔCEB $\frac{EB}{\sin\alpha}=2R$.

$EB=2R\sin\alpha=2\cdot OB\cdot\sin\alpha=2\cdot\frac{3\sqrt{20}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt6}=\frac{3\sqrt5}{\sqrt6}$.

$S_{CEB}=S_{ECD}+S_{EBD}=\frac12 EC\cdot CD\cdot\sin\alpha+\frac12 EB\cdot BD\cdot\sin\alpha$

$=\frac12 EC\sin\alpha(CD+BD)=\frac12 E\sin\alpha\cdot CB=$

$=\frac12\cdot5\cdot\frac{3\sqrt5}{\sqrt6}\cdot\frac{1}{\sqrt6}=\frac{15\sqrt5}{12}=\frac{5\sqrt5}{4}$.

$S_{BACE}=\frac{5\sqrt{20}}{2}+\frac{5\sqrt5}{4}=\frac{10\sqrt{20}}{4}+\frac{5\sqrt5}{4}=\frac{20\sqrt5+5\sqrt5}{4}=\frac{25\sqrt5}{4}$.

Ответ: $r(\omega)=\frac{6\sqrt5}{5}$; $r(\Omega)=\frac{6\sqrt5}{4}$

$S_{BACE}=\frac{25\sqrt5}{4}$.

Найдём B у ΔSDB:

$\sin B=\frac{x}{x+2y}=\frac{4y}{6y}=\frac23$.

В исходном треуг. ($<90^\circ\Rightarrow$)

$\Rightarrow B$ – острый.

ΔCEB: ~~по т. синусов~~

~~$\frac{EB}{\sin CEB}=\frac{EB}{\sin\alpha}$;~~

~~$\frac{5}{\sin(90^\circ+B)}=\frac{EB}{\sin\alpha}$~~

$B=90^\circ-2\alpha$.

$\sin(90^\circ-2\alpha)=\frac23$; $\cos2\alpha=\frac23$

$2\cos^2\alpha-1=\frac23$.

$2\cos^2\alpha=\frac53$.

$\cos^2\alpha=\frac56$.

α – острый $\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt5}{\sqrt6}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$ для всех $x\in[-\frac{1}{2};1]$.

$\Rightarrow \begin{cases} 8x-6|2x-1|\le -8x^2+6x+7, \\ -\frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

Проверим, когда при каких x это вообще возможно:

$\cancel{x<\frac{1}{2}}$:

$\begin{cases} 2x-1<0: \\ 8x+6(2x-1)\le -8x^2+6x+7 \\ -\frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

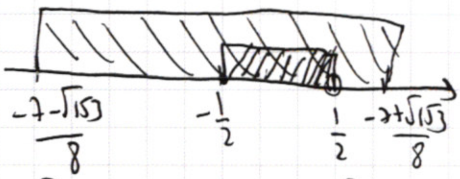
$\begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ 8x+12x-6\le -8x^2+6x+7 \\ -\frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \\ 8x^2-6x-7+20x-6\le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \\ 8x^2+14x-13\le 0. \end{cases}$

$D=196+4\cdot 8\cdot 13=196+32\cdot 13=612$

$x_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{612}}{16}=\frac{-7\pm\sqrt{153}}{8}.$



$\frac{-7-\sqrt{153}}{8}<-\frac{1}{2}$:

$-7-\sqrt{153}<-4$

$7+\sqrt{153}>4.$

$\frac{-7+\sqrt{153}}{8}>\frac{1}{2}$:

$\sqrt{153}-7>4$

$\sqrt{153}>11$

$153>121.$

$\begin{cases} 2x-1\ge 0: \\ 8x-6(2x-1)\le -8x^2+6x+7 \\ -\frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

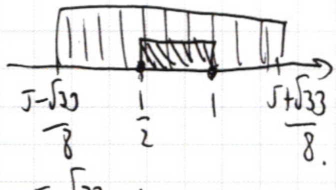
$\begin{cases} x\ge\frac{1}{2} \\ 8x-12x+6\le -8x^2+6x+7 \\ -\frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le 1 \\ 8x^2-6x-7-4x+6\le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le 1 \\ 8x^2-10x-1\le 0. \end{cases}$

$D=100+32=132$

$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{132}}{16}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{8}.$



$\frac{5-\sqrt{33}}{8}<\frac{1}{2}$:

$5-\sqrt{33}<0<\frac{1}{2}.$

$\frac{5+\sqrt{33}}{8}>1$

$5+\sqrt{33}>8$

$\sqrt{33}>3$

$33>9.$

для всех $x\in[-\frac{1}{2};1]$ выполн.

$-8x^2+6x+7\ge 8x-6|2x-1|.$

c. Продолжение $\cancel{-8x^2+6x+7 \geq ax+b}$. $x \in [-\frac{1}{2};1]$.

$\cancel{-8x^2+(6-a)x+7-b \geq 0}$.

$\cancel{8x^2+(a-6)x+b-7 \leq 0}$

$\cancel{D=a^2-12a+36-4\cdot 8(b-7)=a^2-12a+36-32b+224=}$

$\cancel{=a^2-12a-32b+260}$.

$\cancel{x_{1,2}=\frac{(6-a)\pm\sqrt{a^2-12a-32b+260}}{16}}$.

$8x-6|2x-1| \leq ax+b$.

$x \geq \frac{1}{2}$:

$8x-6(2x-1) \leq ax+b$

$8x-12x+6 \leq ax+b$

$-4x+6 \leq ax+b$

$ax+b+4x-6 \geq 0$

$(a+4)x \geq 6-b$.

$x \geq \frac{6-b}{a+4}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}; \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

x^2+2y

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2=18$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

Пусть $x-6=a$

$y-1=b$

$x-6y=a-6b$

Тогда

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ у 1 ур-ие

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

Из 1 ур-ие получаем $x-6y\geq 0$.

Тогда ~~возведем 1 ур-ие в квадрат.~~

~~$(x-6y)^2=$~~

$xy-6y-x+6\geq 0$.

$(x-6)y-(x-6)\geq 0$

$(x-6)(y-1)\geq 0$.

Тогда

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 6 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 6 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

$x-6=a,\ y-1=b.$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2=18 \\ a-6b\geq 0. \end{cases} \Rightarrow$

1) $b=0$:

$a^2=0\quad a=0$

$0+2\cdot 0=18$ - неверно

2) $b\neq 0$:

$\frac{a^2}{b^2}-13\frac{a}{b}+36=0. \qquad \frac{a}{b}=t.$

$t^2-13t+36=0$

$D=169-144=25$

$t_{1,2}=\frac{13\pm 5}{2}$

$t_1=4 \qquad t_1: a=4b$

$t_2=9. \qquad t_2: a=9b.$

$a=4b$:

$16b^2+2b^2=18$

$b^2=1.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \quad a\geq 6b \text{ - неверно} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \quad a\geq 6b \text{ - верно} \end{array}\right.$

$\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2. \end{cases}$

$a=9b$:

$81b^2+2b^2=18$

$83b^2=18$

$\begin{cases} b=\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \quad a\geq 6b$ - верно

$\begin{cases} b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \quad a\geq 6b$ - ~~верно~~ неверно

$\cancel{\begin{cases} b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=-4\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{18}{83}} \\ x=6-4\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}}$

$\begin{cases} b=\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} y=1-\sqrt{\frac{18}{83}} \\ x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{array}$

$y=1-3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$x=6-27\sqrt{\frac{2}{83}}$

~~Ответ: $\{(2;0),\ (6-9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1-\sqrt{\frac{18}{83}})\}$.~~

Ответ: $\{(2;0),\ (6-27\sqrt{\frac{2}{83}};\ 1-3\sqrt{\frac{2}{83}})\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18.$

$x-6y>0.$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0.$

$\cancel{(x^2-2xy+y^2)-11xy+6y+x-6=0.}$

$x^2-13xy+36y^2+(x-6y)+12y-6=0$

$-(x^2+13xy+42{,}25y^2)$

$\cancel{(x^2-13xy+42{,}25y^2)+(x-6y)-6{,}25y^2+12y-6=0}$

$-6{,}25y^2+12y-6.$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

$\cancel{x^2+0xy+2y^2-4y-12x+20=0}$

$y=\frac{-12}{-12{,}5}=\frac{12}{12{,}5}.$

$6{,}25y^2-12y+6.>0$

$y=\frac{12}{12{,}5}$

$(x-6y)^2-xy+6y+x-6=0.$

$\cancel{x^2-12xy+36y^2}$

$x>6y.$

$(x-6y)^2+(x-6y)-xy+12y-6=0.$

$18>(6y-6)^2+2(y-1)^2$

$18>38(y-1)^2.$

$(y-1)^2<\frac{18}{38}=\frac{9}{19}$

$-\frac{3}{\sqrt{19}}<y-1<\frac{3}{\sqrt{19}}$

$1-\frac{3}{\sqrt{19}}<y<1+\frac{3}{\sqrt{19}}$

$y^2-2y+1>0.$

$6y^2-12y+6>0$

$xy-12y+6>0$

$12y-xy-6<0$

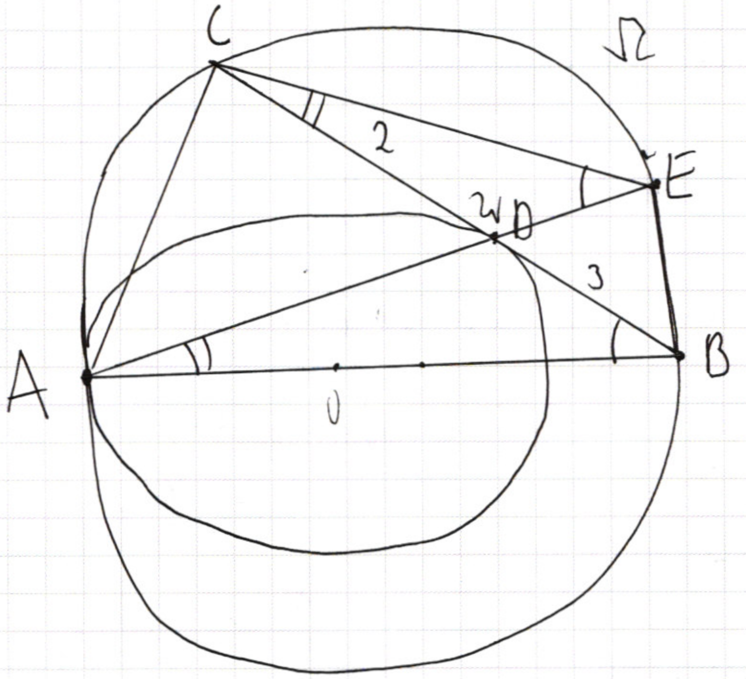
$12y-xy-6$

$\Rightarrow xy-12y+6>6y^2-12y+6>$

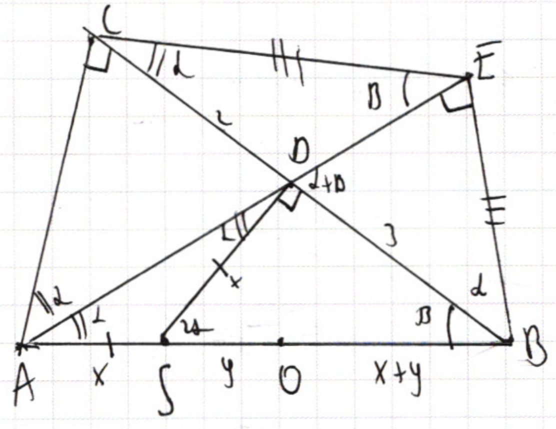
$x>6y$

$xy-6y-x+6>0$ $(x-6y)-$ $-xy+6y+x-6<0$ $(x-6y)+12y-xy-6<0$

5.



AB=D



$$\frac{CD}{AD}=\frac{DE}{DD}=\frac{CE}{2(x+y)}$$

$$\frac{2}{AD}=\frac{DE}{3}=\frac{CE}{2(x+y)}$$

$AD\cdot DE=6.$

$$3^2+x^2=(x+2y)^2$$

$$9+x^2=x^2+4yx+4y^2$$

$$4y^2+4yx=9.$$

$CD^2+DS^2=CS^2$

$2^2+x^2=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$; ②

① $\sqrt{y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(y-1)(x-6)}=x-6y.$

$x-6y>0$.

$(y-1)(x-6)=(x-6y)^2$.

② $x^2-12x+36+2y^2-4y+2=18$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$ $\quad (x-6)^2=18-2(y-1)^2$ $\quad xy-6y-x+6=x^2-12xy+36y^2$

$\cancel{(x-6)^2=18-2(y-1)^2}$ $\quad 18-2\cdot\frac{9}{19}<(x-6)^2<18+2\cdot\frac{9}{19}$ $\quad x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0.$

$18-\frac{18}{19}<(x-6)^2<18+\frac{18}{19}$

$\cancel{(x-6)^2=18-2}$ $\quad \frac{326}{19}<(x-6)^2<\frac{362}{19}$ $\quad x^2-(13y+1)x+36y^2+6y-6=0$

$\frac{\sqrt{326}}{\sqrt{19}}<x-6<\frac{\sqrt{362}}{\sqrt{19}}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2>(6y-6)^2+2(y-1)^2=$ $\quad D=(13y+1)^2-4(36y^2+6y-6)=$

$x<\frac{\sqrt{362}}{\sqrt{19}}+6.$

$=6^2(y-1)^2+2(y-1)^2=38(y-1)^2$ $\quad =169y^2+26y+1-144y^2-24y+24$

$=25y^2+2y+25=$

$18>38(y-1)^2$ $\quad <6.1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{19}}.$

$=(y^2+2y+1)+24y^2+24.$

$\frac{18}{38}>(y-1)^2.$

$x_{1,2}=\frac{13y-1\pm\sqrt{25y^2+2y+25}}{2}$

$(y-1)^2<\frac{9}{19}$

$6y$

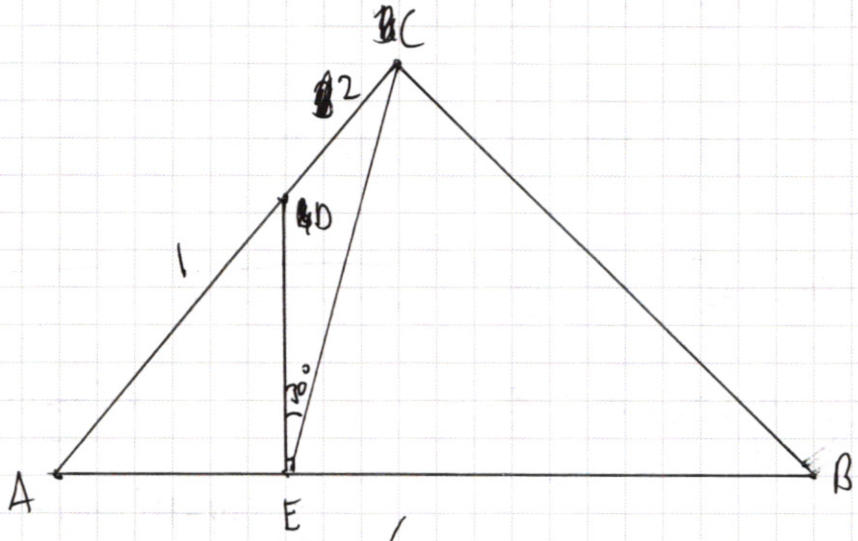
$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

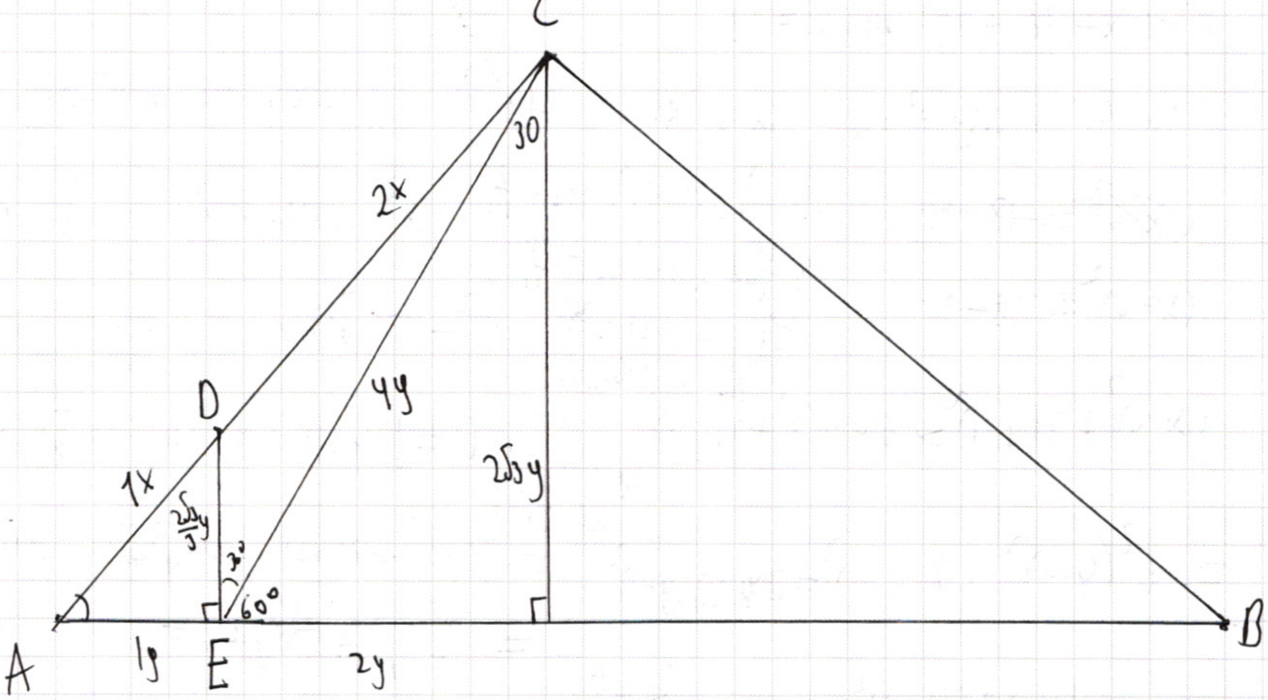
$(x^2-12xy+36y^2)-34y^2+12xy-12x-4y+20.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

4.





2.

$tg = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7.$

$x > \frac{1}{2}$:

$8x-6(2x-1) \le -8x^2+6x+7.$

$8x-12x+6 \le -8x^2+6x+7$

$-4x+6 \le -8x^2+6x+7.$

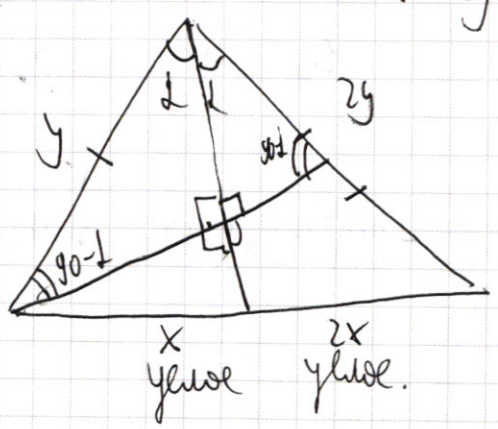
$-4x+6+8x^2-6x-7 \le 0$

$8x^2-10x-1 \le 0.$

$D = 100+32 = 132$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{132}}{16}$

900-3y.



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)