МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; 1]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 2

$$\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 \end{cases} \Rightarrow \quad x-y=57-(-68)=125 \quad \Rightarrow \begin{cases} x+\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=57 \\ y+\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=-68 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x+y+2\sqrt[3]{125(x+y)}=-11$$; пусть $\sqrt[3]{(x+y)}=t$, тогда:

$t^3+10t+11=0$, заметим, что $t=-1$ является корнем

$\Downarrow$

$(t+1)(t^2-t+11)=0$; для $t^2-t+11=0$:

$D=1-44<0 \Rightarrow$ корней нет.

Значит $t=-1 \Rightarrow t^3=-1=x+y$:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=125 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x=124 \\ -2y=126 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=62 \\ y=-63 \end{matrix}$$

Ответ: в данной системе единственным решением является $x=62$; $y=-63$

1. $a_0 = a$ $\quad a>0;\ c<0$ $\quad ax^2+2bx+c=0$

$a_0+d=b$ $\quad 4b^2-4ac=$

$d=c-b$

$a+2d=c$ $\quad \frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$a+3d=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$2c-b=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$ $\quad b^2\geq ac$

$b^2\geq b^2-d^2=b^2-c^2+2cb-b^2=2cb-c^2$

$2ac-b=-b-\sqrt{b^2-ac}$

b

$b^2+2bd+d^2+3bd+3d^2=-b-\sqrt{b^2-ac}$

$4a^2c^2=b^2-ac$

$b^2+5bd+4d^2=-b-\sqrt{b^2-ac}$ d

2. $(b+2d)^2+bd=-b-d$

1200
240
24
1464

$a+3d=\frac{-b+d}{a}$

$b^2-ac=(b-d)(b+d)=d^2$

$\frac{-b-d}{b-d}=b+2d$ $\quad -(11^3+3\cdot11^2t+3\cdot11\cdot t^2+t^3)$

$11^3+3\cdot11^2+125$ $\quad 1331+488t+33t^2+t^3=0$

$-\frac{b+d}{b-d}=b+2d$

$t^3+33t^2+488t+1331$

121 × 3 = 363; 363 + 125 = 488

121 × 11 = 1331

$-b-d=b^2+2bd-bd-2d^2$

-3 $\quad -133$

$b^2+bd-2d^2+b+d=0$

$-27+33\cdot9-1464+1331$

$b^2+b(d+1)+d-2d^2=0$

270 $\quad$ 160

$d^2+2d+1-4d+8d^2=9d^2-2d+1=8d^2+(d-1)^2$

57 + 68 = 125 $\quad$ 11

2. $x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57$ $\quad x-y=57+68=125$

$y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68$ $\quad x+y=-11-2\sqrt[3]{x^2-y^2}$

$x+\sqrt[3]{125(x+y)}=57$ $\quad x+y+5\sqrt[3]{(x+y)}=-11$

$y+\sqrt[3]{125(x+y)}=-68$ $\quad 125t=(-11-t)^3=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

Пусть дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, где сумма остатков от деления этого числа на три последовательные степени числа 10 равна 12468, то эти степени не превосходят 10^5, ведь если бы мы делили шестизначное число на хотя бы 10^6, то всё число было бы остатком, а значит сумма остатков как минимум шестизначное число. Аналогично нельзя делить на 10 в степени <0. Значит число мы могли делить на 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000

Однако заметим, если $r(x)$ – остаток от деления нашего числа на x, то ясно, что $r(100000) \geq r(10000) \geq r(1000) \geq r(100) \geq r(10) > r(1)$

Если взять три последовательные степени, то у нас есть четыре варианта:

$\underbrace{r(10^5)+r(10^4)+r(10^3)}_{I}$; $\underbrace{r(10^4)+r(10^3)+r(10^2)}_{II}$; $\underbrace{r(10^3)+r(10^2)+r(10)}_{III}$; $\underbrace{r(10^2)+r(10)+r(1)}_{IV}$

При этом, $I > II > III > IV$.

Заметим что $II \leq 9999+999+99 < 11100 < 12468$

Значит такое число бы получилось только если делить на степени группы I.

$12468 = \overline{bcdef} + \overline{cdef} + \overline{def}$, a – любое число $\to$ для a 9 вариантов

$$\begin{array}{r} + \; b\,c\,d\,e\,f \\ c\,d\,e\,f \\ + \; d\,e\,f \\ \hline 1\,2\,4\,6\,8 \end{array}$$

$\Rightarrow 3f = \overline{\ldots 8}$ значит f только 6. $\Rightarrow 3f = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3e+1 = \overline{\ldots 6} \Rightarrow 3e = \overline{\ldots 5}$ значит e только $5 \Rightarrow 3e = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3d+1 = \overline{\ldots 4} \Rightarrow 3d = \overline{\ldots 3}$; Значит $d=1$

$2c = 2 \Rightarrow c = 1$, $b=1$. Значит начальное число, это

$\overline{a11156}$, для a – 9 вариантов. Значит и всего 9 таких чисел

Ответ: всего существует 9 таких шестизначных чисел.

2. $t^3+33t^2+488t+1331=0$

3.

$t=-4$

$\overline{abcdef}$

$-64+33\cdot16-488\cdot4+1331$

$+\frac{488}{4}$ $-685+$ $\frac{1}{10}$

10 100 1000 10000 100000

1952
-1371
621

$\times\frac{33}{16}$
198
33
528

$\overline{abcd}$ 9999+999+99
$\overline{efg}$
$\overline{hI}$ 10100 a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$x-y=125$

$\overline{abcdef}$ 11156 111111
1000000

$x+5\sqrt[3]{x+y}=58$

+ cdef = 12468
def

$y+5\sqrt[3]{x+y}=-68$

9. 3·6

$x+y+10\sqrt[3]{t}=-11$

35

$t+10\sqrt[3]{t}=-11$

9 → 11156

3 4
3·1− 6 7
9
2
5
8

$f^3+10f=-11$

$f^3+10f+11=0$

$f=-1$

$f^3+10f+11 \mid f-1$
f^3-f^2 f^2+f
f^2+10f
f^2-f^2
$11f+11$

$f^3+10f+11 \mid f+1$
f^3+f^2 f^2-f+11
$-f^2+10f$
$-f^2-f$
$11f+11$
$11f+11$

$(f+1)(f^2-f+11)=0$

$1+ \quad f^2-f+11$ $f=-1=\sqrt[3]{t} \Rightarrow t=-1$

$1-44<0$

$x+y=-1$
$x-y=125$
$\Rightarrow 2x=124$

$\boxed{\begin{array}{l}x=62\\ y=-63\end{array}}$

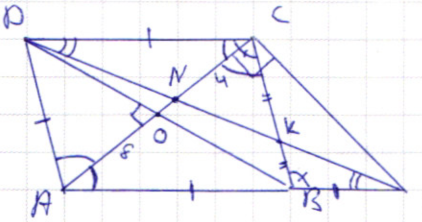
3. $6\cdot10^5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.



ABCD - параллелограмм

$\angle C$ - тупой $CN=4$ $tg\left(\frac{\angle ADC}{2}\right)=\frac{2}{5}$

$\angle ACE=90^\circ$ $AN=8$ $\{K\}=DE\cap CB$

O - центр ABCD.

Раз $DC\parallel AE$, то $\angle AED=\angle CDE$; $\angle DCA=\angle CAE \Rightarrow \triangle DNC\sim\triangle ENA$ (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{AN}{CN}=\frac{EN}{DN}=\frac{AE}{DC}=\frac{8}{4}=2 \Rightarrow \begin{cases} AE=2DC \\ AB=DC \end{cases}$, $AE=AB+BE$ $\Downarrow$ $BE=DC=AB$

Тогда раз $BE\parallel DC$, то $\angle BED=\angle CDE$; $\angle EBC=\angle DCB$; $BE=DC$

$\Rightarrow \triangle BEK=\triangle CDK$ (по двум углам и стороне между ними) $\Rightarrow BK=KC=\frac{CB}{2}$

Раз $\angle ACE=90^\circ$; B - середина AE $\Rightarrow$ CB - медиана, то $CB=\frac{AE}{2}=AB=BE$

Значит ABCD - ромб $\Rightarrow$ AC - биссектриса $\angle BAD$

Опустим из D перпендикуляр на AC; т.к. ABCD - ромб, то это тоже половина диагонали DB. Тогда DB - биссектриса $\angle D$.

Т.к. $AO=\frac{AC}{2}=\frac{AN+NC}{2}=6$ ($=OC$); $\frac{AO}{DO}=tg\angle ADO=tg\left(\frac{\angle ADC}{2}\right)=\frac{2}{5}$

$DO=\frac{5}{2}\cdot 6=15=OB$. $tg(\angle BAC)=tg(\angle OCD)=\frac{DO}{AO}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

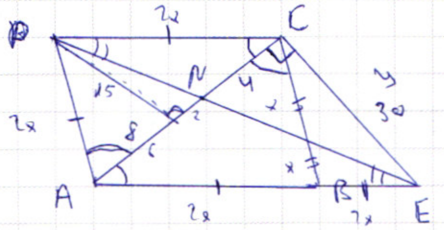
а) Ответ: $tg\angle BAC=\frac{5}{2}$

$DC^2=DO^2+OC^2=225+36=261 \Rightarrow DC=\sqrt{261}$, $AE=2\sqrt{261}$

$CE^2=AE^2-AC^2=4\cdot 261-12^2=4\cdot 9\cdot 29-12^2=12^2\cdot 28=24^2\cdot 7$

$CE=24\sqrt{7}$. $S_{ANE}=S_{ACE}-S_{NCE}=\frac{AC\cdot CE}{2}-\frac{NC\cdot CE}{2}=(12-4)\cdot 12\sqrt{7}=96\sqrt{7}$

б) Ответ: $S_{ENA}=96\sqrt{7}$



$tg\left(\frac{\angle ADC}{2}\right) = \frac{2}{5}$

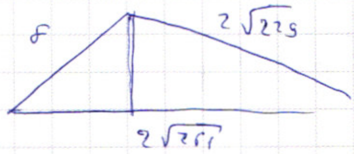
$tg\left(\frac{x}{2}\right)$

$tg\, x = \frac{\left(tg\frac{x}{2}\right)^2}{1-\left(tg\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1-2\sin^2\frac{x}{2}}$

а) $\frac{5}{2}$

$36+225 = 261$

б) $2\sqrt{229}$



$4x = 2\sqrt{261}$

$\frac{12\cdot xy}{2} - \frac{4\cdot xy}{2} = 4xy$

Ответ: $96\sqrt{7}$

$16x^2 - 12^2 = y^2$

$4\cdot 261 - 144$

$1044 - 144 = 900$

$900 + 144 =$

$1044 \cdot 4 = 4176$

$4176 - 144 = 4032$

4032 | 2
2016 | 2
1008 | 2
504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 7
3^2

$24\sqrt{7}$

$24\cdot 24\cdot 7 + 12^2$ ($12^2\cdot 4$)

$4\cdot 261$

$3^2\cdot 2^2\cdot 29$

$29 \cdot 9 = 261$

$tg\, x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$8\sqrt{5}$

$5x^2 + x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 = 10$

$6x^2 + 2x\sqrt{2} - 8 = 0$

$3x^2 + x\sqrt{2} - 4 = 0$

$2 + 48 = 50$

$\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{50}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

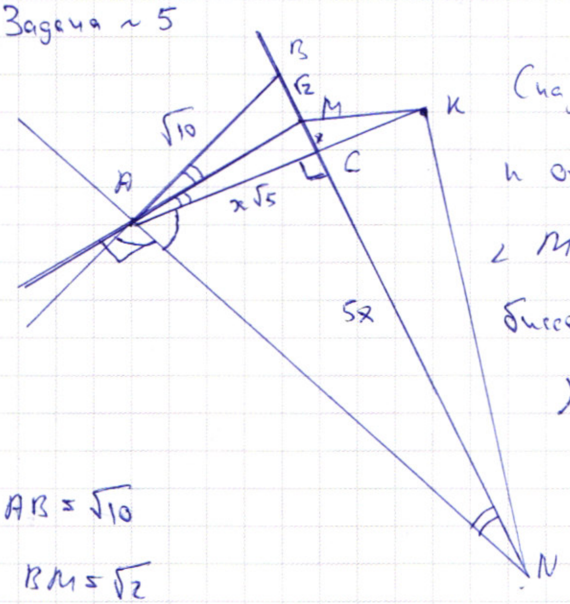
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 5



Сказано, что AB - касательная в точке A к окружности вокруг $\triangle AMN$, тогда $\angle MAB = \angle MNA$. Т.к. угол между внутр. и внеш. биссектрисами ~~внутрен~~ одного угла $= 90^\circ$, то

$) +)) = 90^\circ \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$. $\angle ACB = 90^\circ$

Тогда раз ANKM - вписанный четырехугольник, а $\angle MAN = 90^\circ$, то MN = диаметр

$AB = \sqrt{10}$

$BM = \sqrt{2}$

Заметим, что по правилу биссектрисы $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

Пусть $CM = x$, тогда $AC = x\sqrt{5}$. AC - высота в прямоугольном треугольнике

$AC^2 = MC \cdot CN \Rightarrow 5x^2 = x \cdot CN \Rightarrow CN = 5x$. $R = \frac{MN}{2} = \frac{MC+CN}{2} = 3x$

$S_{ANKM} = 2 S_{ANM}$ (симметрия относительно MN)

$AM^2 = x^2 + 5x^2 = 6x^2 \Rightarrow AM = x\sqrt{6}$; $AN^2 = 5x^2 + 25x^2 = 30x^2 \Rightarrow AN = x\sqrt{30}$

$S_{ANKM} = AM \cdot AN = 6x^2\sqrt{5}$

Найдем x: рассмотрим $\triangle CAB$: $CA^2 + CB^2 = AB^2$

$5x^2 + x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 = 10 \Rightarrow 3x^2 + x\sqrt{2} - 4 = 0$

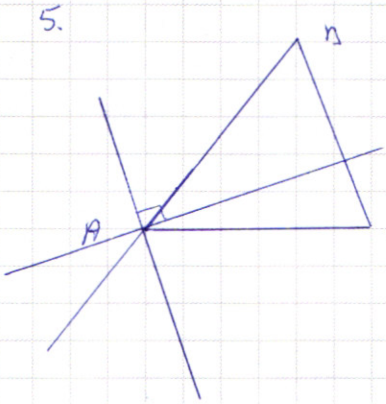
$D = 2 + 48 = 50$. $x_{12} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{50}}{6}$; т.к. $x > 0$, то $x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{50}}{6}$

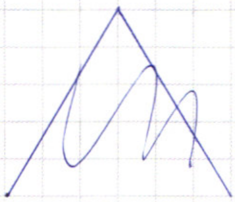
$x = \frac{\sqrt{2}(5-1)}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $R = 3x = 2\sqrt{2}$

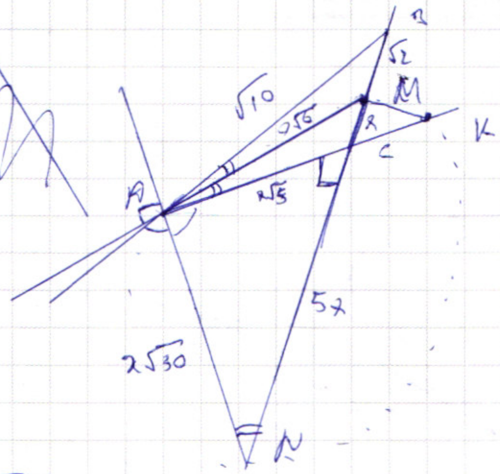
$S_{ANKM} = 6\sqrt{5} \cdot x^2 = \frac{6\sqrt{5}}{9} \cdot 8 = \frac{16\sqrt{5}}{3}$

Ответ: радиус равен $2\sqrt{2}$; $\angle ACB = 90^\circ$; $S_{ANKM} = \frac{16\sqrt{5}}{3}$

5.







$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{MC}$ $x\sqrt5 = \sqrt{x\cdot 5x}$ $n+m-2$

$x\cdot 5x$

$\sqrt6\, x$ $49\cdot 2$

$6x = d$

98   $n+m-2 = 1$

$3x = R$ ~~1427~~

$\frac{\sqrt{10}}{6x+\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{x\sqrt{30}}$

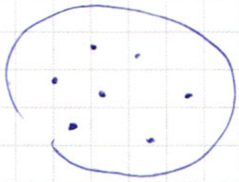
48   $x^2\cdot 6\sqrt5$ $n\cdot m\cdot(n+m-2) = 949$

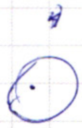
$10x\sqrt3 = 6\sqrt2\, x + 2$

~~$6x^2$~~   5 $7\cdot M$ 8

$x(10\sqrt3 - 6\sqrt2) = 2$

$x = \frac{2}{10\sqrt3 - 6\sqrt2} = \frac{1}{5\sqrt3 - 3\sqrt2}$





6. m . . .   n . . .

$\vdots 5;\ \cancel{\vdots 7}$ $\vdots 7;\ \cancel{\vdots 5}$

$7\cdot 1$ ~~$7\cdot 1\cdot 6$~~

$1\cdot 7$

. . .

$\frac{(m+n)!}{\cancel{(m+n-2)}!\,2!}(m+n-1) = m+n-1$

$C_{m+n}^{m}\cdot C_{m+n}^{n}\cdot C_{m+n}^{m+n-2} = 49$

$m\cdot n\cdot((m+n)-2)$ $C^1_{n+m} = \frac{m+n-2}{4}$

$m\cdot n\,(m+n-2) = 49$

7   2   7

$\frac{m\cdot n\cdot(m+n-2)}{2} = 49$ 9

$7\cdot 7\cdot 1$

~~$49\cdot 1\cdot 1$~~

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

Пусть у нас m - чисел кратных 7 и не кратных 5

n - чисел кратных 5 и не кратных 7, всего $n+m$ чисел

Т.к. все числа различные, то каждый элемент этих двух множеств строго задан и единственен. Тогда выберем нужные тройки.

Нужно число из n, число из m и любое из оставшихся.

Всего:

$$C_n^1 \cdot C_m^1 \cdot C_{n+m}^{n+m-2} = 49 \qquad C_{n+m}^{n+m-2} = \frac{(n+m)!}{(n+m-2)!\,2!} = \frac{(m+n)(n+m-1)}{2}$$

способы выбрать n из всех; способы выбрать m из всех; способы дополнить не оставшимся

Т.к. каждое $C_x^y \in \mathbb{N}$, то C_{n+m}^{n+m-2} может равняться 1, 7 или 49 как множитель 49. Заметим, что количество способов выбрать 1 число из оставшихся не равно 1. Тогда бы $\frac{(m+n)(n+m-1)}{2} = 1 \Rightarrow n+m=2$, а из двух чисел нельзя составить тройку. Также если $C_{n+m}^{n+m-2} = 49$, то $C_n^1 = C_m^1 = 1$, значит $n=m=1$, опять не получится взять тройку из двух шаров. Значит $C_{n+m}^{n+m-2} = 7$. Тогда из-за обозначения для групп мы можем поменять и варианты будут симметричные. Пусть $C_n^1 = 7$; $C_m^1 = 1$. Т.к. C_x^1 — количество элементов в x, то $C_x^1 = x$. Значит если $C_n^1 = 7$; $C_m^1 = 1$, то $m+n=8$

Случай $C_m^1 = 1$; $C_n^1 = 7$ аналогичный $m+n=8$

$m \cdot n \cdot (n+m-2) = 49$

$m \cdot n \cdot (n+m-2) = 49$

$1 \cdot 7 \cdot 49$

30

$n+m-2=1$

$n+m=3 \to 1$

$n+m-2=51$

$n+m=53$

$n=m=1$

$a = b-d$

b

$c = b+d$

$f = b+2d$

7 · 7

$a \cdot c = b^2 - d^2$

$4b^2 - 4ac$

$2\sqrt{b^2 - b^2 + d^2} = 2d$

$\frac{-2b \pm 2d}{2a}$

$\frac{-b+d}{b-d} = b+2d = -1$

a c d

d c a

$b+2d=-1$

a

$a+d$

$a+2d$

$a+3d=-1$

$d = \frac{-1-a}{3}$

3a

$3a - 1 - a = 2a - 1$

$b+2d=-1$

$b+2c-2b=-1$

$2c-b=-1$

$2c = b-1$

7 · 1 · 7

1.

$m \cdot n \cdot (m+n-2) = 49$

1 1 49

$m \cdot n \cdot (\ldots) = 49$

7 · 1

7 1

m n

7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Известно, что a, b, c — члены ~~ариф~~ арифмет. прогрессии. Так что $b=a+d$; $c=b+d=a+2d$. Раз $a>0$, а $c<0$, то $d<0$. Известно, что $f=b+2d$, а также f — меньший корень $ax^2+2bx+c=0$ — найдем меньший корень.

$$D = 4b^2 - 4ac = 4b^2 - 4(b-d)(b+d) = 4d^2$$

$x_{1,2} = \frac{-2b \pm 2d}{2a} = \frac{-b \pm d}{a}$ раз $d<0$, то меньший корень это $\frac{-b+d}{a} = f$. $a=b-d \Rightarrow f = \frac{-b+d}{b-d} = -1$

Ответ: четвертый член прогрессии равен -1.

Задача №6.

Пусть n — кол-во чисел кратных 5 ~~и не кратных 7~~, m — кол-во чисел кратных 7 и не кратных 5. Тогда кол-во способов выбрать такую тройку это: $m \cdot n \cdot (m+n-2) = 49$. Заметим, что

число ⋮7 число ⋮5 итогое другое число на доске

раз $m, n \in \mathbb{N}$, то $(m+n-2)$ = делитель 49 — 1, 7 или 49. Если $m+n-2=1$, то всего 3 числа на доске и тройка лишь одна. Если $m+n-2=49$, то $n=1$ и $m=1$ => всего 2 числа на доске. Значит $m+n-2=7$, т.к. случаи $m=7; n=1$ и $m=1; n=7$ симметричны, ~~нам~~ нам необходима лишь сумма $m+n=8$, однако мы уже поняли, что $m+n-2=7 \Rightarrow m+n=9$. Противоречие: значит нет такого разбиения, чтобы число сочетаний было равно 49. Ответ: ~~Данное условие невозможно.~~

m n

m+n – всех

m·n.

1 2 49

1 2

a b c d

a b c
a c d
a b d
b c d

1-14 7

14

1 14 7

2 7 7

1 7 14

$m = 9 - n$

$9n - n^2 = 14$

5

5^3 $5^?$

5^4 5^5 5^6

5^7

7

7^2

7 · 2 · 7

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

Пусть у нас m - ~~число~~ кол-во кратных 7 и не кратных 5;

n - кол-во кратных 5 и не кратных 7, всего $n+m$ чисел

Тогда кол-во способов выбрать такие тройки это:

$\frac{m \cdot n \cdot (m+n-2)}{2} = 49$; $m, n \in \mathbb{N} \rightarrow m, n, (m+n-2)$ - делители 98

$m \cdot n \cdot (m+n-2) = 98 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2$ делители 98: 1, 2, 7, 14, 49, 98

пусть $m+n-2 = 1$, тогда $m+n=3$ => всего 3 числа на доске => 1 вариант тройки

$m+n-2=2$ => $m+n=4$ => всего 4 числа => 4 варианта тройки

$m+n-2=98$ => $m=n=1$ => на доске 2 числа; невозможно

$m+n-2=49$ => $\left[\begin{array}{l} m=2;\ n=1 \\ n=2;\ n=2 \end{array}\right.$ => на доске 3 числа => 1 вариант тройки

Осталось два варианта:

если: $n+m-2=14$, то $\left[\begin{array}{l} m=1;\ n=7 \\ n=7;\ m=1 \end{array}\right.$ => всего $m+n=8$, однако

$n+m-2=14 \Rightarrow m+n=16$

противоречие

Значит $n+m-2=7$:

$\begin{cases} m+n=9 \\ m \cdot n = 14 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $m=7;\ n=2$ или $m=2;\ n=7$

Случаи симметричны.

Значит ~~методом~~ перебора значений ~~и~~ $n+m-2$, мы нашли единственный вариант, при котором $n+m=9$. Значит всего 9 чисел.

Ответ: всего было выписано 9 чисел.