МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Пусть $a = b_1$, $b = b_1 \cdot q$, $c = b_1 \cdot q^2$, где b_1 – первый член ГП, q – её знамен.
тогда $d = b_1 \cdot q^3$ – четвертых член ГП

для $ax^2 + 2bx + c = 0$: $\cancel{x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}}$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b_1 \cdot q)^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_1 \cdot q^2 = 0$

тогда $x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{2b_1 \cdot q}{2 \cdot b_1} = -q$

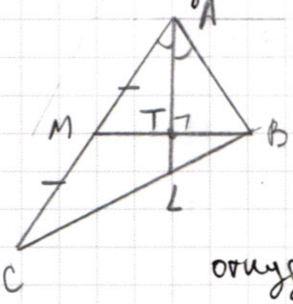
отсюда т.к $d = x$, то $b_1 \cdot q^3 = -q$

$b_1 \cdot q^2 = -1$ – третий член ГП

Ответ: -1

~~№2 Пусть дан $\triangle ABC$, BH – его высота, AL – медиана, причем $BH \perp AL$ и $P_{\triangle ABC} = 1200$~~

№2 Пусть дан $\triangle ABC$, AL – его бис-са, BM – медиана
тогда по условию $P_{\triangle ABC} = 1200$, $AL \perp BM$



1) пусть $AL \cap BM = T$
тогда AT – бис-са и высота в $\triangle MAB$
отсюда $\triangle MAB$ – р/б, т.е $MA = AB$

2) пусть $AB = x$, тогда $AC = AM + MC = 2x$

отсюда по нер-ву тр-ка: $2x - x < BC < 2x + x$
$x < BC < 3x$

3) $P_{ABC} = AB + AC + BC = 3x + BC = 1200$

тогда т.к $BC < 3x$, то $3x > 600$, т.е $x > 200$, а значит $BC > 201$
(из $x < BC$)

отсюда $3x < 1200 - 201 = 999$, $x < 333$

имеем; $x \in (333; 600)$, т.е может принимать 266 различных значений, причем для данного значения x сущ-ет единств. тр-ник

Ответ: 266

$\boxed{№3}$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (v) \\ 2x^2+2y^2-4x-4y+3=0 & (w) \end{cases}$

(v) $\sqrt{xy-2x-y+2}=y-2x$

$\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}=y-2x$

$\sqrt{(y-2)(x-1)}=y-2x$

$(y-2)(x-1)=(y-2x)^2$

(w) $2x^2+2y^2-4x-4y+3=0$

$(y-2)^2+(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2-3=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2-3=0$

пусть $x-1=t$, $y-2=p$

тогда ~~p~~ $y-2x=p+2-2(t+1)=p-2t$

отсюда $\begin{cases} pt=(p-2t)^2 & (*) \\ p^2+2t^2-3=0 & (**) \end{cases}$

$(*)$ $pt=p^2-4pt+4t^2$

$p^2-5pt+4t^2=0$

$D=25t^2-4\cdot4t^2=9t^2$

отсюда $p=\frac{5t\pm\sqrt{9t^2}}{2}$ $\left[\begin{array}{l} p=4t \\ p=t \end{array}\right.$

пусть $p=4t$, тогда из $(**)$: $16t^2+2t^2-3=0$

$18t^2=3$

$t=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, отсюда $p=\pm\frac{4}{\sqrt{6}}$

пусть $p=t$, тогда из $(**)$: $t^2+2t^2-3=0$

$3t^2=3$

$t=\pm1$, отсюда $p=\pm1$

имеем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ p=\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ \begin{cases} t=-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ p=-\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ \begin{cases} t=1 \\ p=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-1 \\ p=-1 \end{cases} \end{array}\right.$ $x=t+1$, $y=p+2$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}} \\ y=\frac{4+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ y=\frac{-4+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

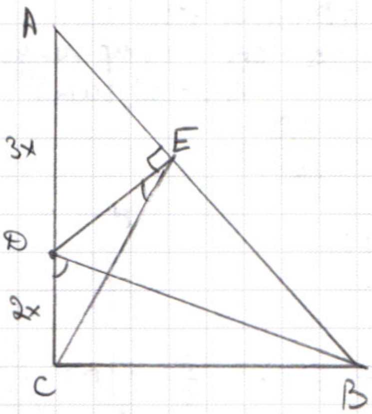
Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}};\ \frac{4+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}};\ \frac{-4+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)$; $(2;3)$; $(0;1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) $tg\angle BAC = ?$
б) $AC=\sqrt{28}$, $S_{CED}=?$

Решение: ~~1) т.к. $\angle BEC = \angle DEB - \angle DEC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$~~

а) т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
то $DEBC$ - вписс.-приуголн

откуда $\angle CDB = \angle CEB = \frac{1}{2} \cup CB$

т.к. $\angle CEB = \angle DEB - \angle DEC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$
то $\angle CDB = 45^\circ$

тогда $\triangle CDB$ - пр-мп-р/б
откуда $DC = CB$

$tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{5}$ - по усл

б) ~~т.к.~~ 1) пусть $DC=2x$, тогда $AD=3x$, $AC=5x$
т.к. $\triangle ACB \sim \triangle AED$, то $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$

по т.П для $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{AC^2+CB^2} = \sqrt{25x^2+4x^2} = x\sqrt{28}$

тогда $\frac{3x}{x\sqrt{28}} = \frac{DE}{2x}$, откуда $DE = \frac{6}{\sqrt{28}}x$

2) $\sin\angle CDE = \sin\angle EBC = \frac{AC}{AB} = \frac{5x}{x\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$

откуда $S_{CDE} = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot DE\cdot \sin\angle CDE = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{6}{\sqrt{28}}x\cdot\frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{30}{28}x^2$

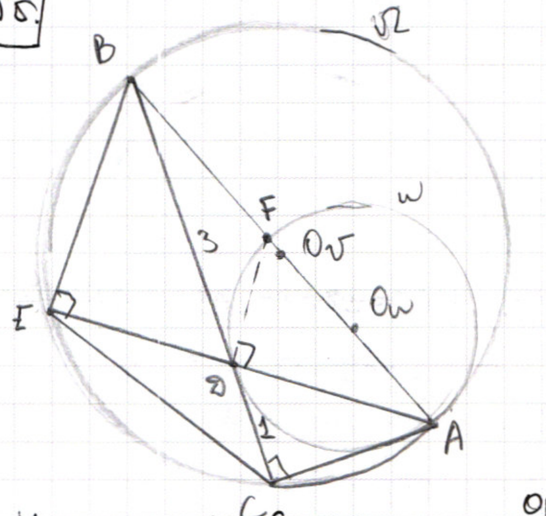
т.к. $AC=\sqrt{28}=5x$, то $x = \frac{\sqrt{28}}{5}$

откуда $S_{CDE} = \frac{30}{28}\cdot\frac{28}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5.



Найти: r, R, S_{BACE}

Решение: 1) по т. о кас и сек. для ω:

$BD^2 = BF \cdot BA$

$BF = 2R - 2r = 2(R-r)$

$BA = 2R$

тогда $4R(R-r) = 9 \Rightarrow R(R-r) = \frac{9}{4}$

2) а из $\Delta CBA \sim \Delta DBO_\omega$ (т.к.: $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ — опир на диам, AB — од. имн)

$\frac{BA}{BO_\omega} = \frac{BC}{DB}$; $\frac{2R}{2R-r} = \frac{4}{3}$

откуда $6R = 4(2R-r)$

$R = 2r$

3) имеем: $\begin{cases} R(R-r) = \frac{9}{4} \\ R = 2r \end{cases}$, откуда $2r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2\sqrt2} \\ R = \frac{3}{\sqrt2} \end{cases}$

4) из $\Delta EBA \sim \Delta DFA$ ($\angle FDA = \angle BEA = 90^\circ$, $\angle A$ — общий):

$\frac{EA}{DA} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{EA}{DA} = \frac{R}{r}$

пусть $ED = x$, тогда из $\Delta EDB \sim \Delta CDA$: $\frac{BD}{AD} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow AD \cdot ED = 3$

тогда $AD = \frac{3}{x}$

значит, $\frac{EA}{DA} = \frac{x^2+3}{3}$

откуда $\frac{x^2+3}{3} = \frac{R}{r} = 2 \Rightarrow x^2 + 3 = 6$

$x^2 = 3, \quad x = \sqrt3$

5) из $\Delta EDC \sim \Delta BDA$:

$\frac{ED}{BD} = \frac{EC}{AB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{x}{3} \Rightarrow EC = \frac{AB \cdot x}{3} = \frac{2R \cdot \sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt3}{\sqrt2}$

~~откуда (EABD (6) P/DA = AB/EC)~~

6) $S = \frac{1}{2}(EC + AB) \cdot BC = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt3}{\sqrt2} + \frac{2 \cdot 3}{\sqrt2}\right) \cdot 4 = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{6+2\sqrt3}{\sqrt2}\right) \cdot \cancel{4}\, 2$

Ответ: $S = (6+2\sqrt3)\sqrt2$; $r = \frac{3}{2\sqrt2}$; $R = \frac{3}{\sqrt2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№1}$ $a=b_1,\ b=b_1\cdot q,\ c=b_1\cdot q^2,\ d=b_1\cdot q^3=q$

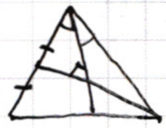
$ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} = \frac{b_1q\pm\sqrt{(b_1q)^2-b_1\cdot b_1\cdot q^2}}{b_1}=q$

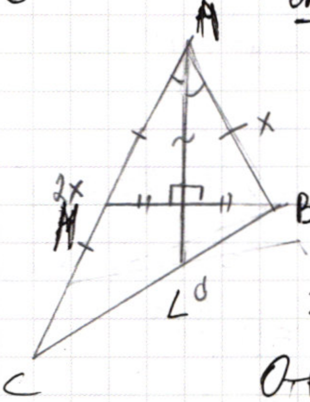
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b_1\cdot q^3=q \Rightarrow b_1\cdot q^2=1=c$

Ответ: 1

$\boxed{№2}$ $P=1200,\ \{a,b,c\}\in\mathbb{Z}$





первого тр-ка:

$d<3x \quad d>x$

$d+3x=1200$

~~1199~~ $3x>600$

$x>200 \Rightarrow d>201$

$\Rightarrow 3x<999$

$x<333$

$333<x<600$

$\begin{array}{r} 600 \\ -333 \\ \hline 267 \end{array}$

Ответ: $\boxed{266}$

~~№3~~ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (v) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (w) \end{cases}$

~~(v)~~ (w) $2x^2+y^2-2\cdot2x-2\cdot2y+3=(x-2)^2+(y-2)^2+x^2-5$

$=(2x-1)^2+(y-2)^2-2(x+1)$

$=(\sqrt2x-\sqrt2)^2+(y-2)^2-3=2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$2x^2-4x+2 \quad y^2-4y+4$

(v) $\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{2(1-x)-y(1-x)}=\sqrt{(2-y)(1-x)}=y-2x$

$(y-2)(x-1)=(y-2x)^2$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$\begin{cases} y\ge2 \\ x\ge1 \end{cases} \quad \begin{cases} y\le2 \\ x\le1 \end{cases}$

$[y\ge 2x]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\boxed{\text{№}3}$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \ (v) \end{cases}$

(v) $(y-2)^2+2x^2-4x-1=(y-2)^2+(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2-3=(y-2)^2+2(x-1)^2-3=0$

(w) $\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{(y-2)(x-1)}=y-2x$ $\quad [y\geq 2x]$

$(y-2)(x-1)=y^2-4xy+4x^2$

$(y-2)^2+2(x-1)^2-3=(y-2+\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}(y-2)(x-1)-3=0$

$y-2=\frac{(y-2x)^2}{x-1}$

$x-1=t, \ y-2=p$ $\Rightarrow x=t+1$, $\Rightarrow y=p+2$

$\begin{cases} p^2+2t^2-3=0 \ (v) \\ pt=(p-2t)^2 \end{cases}$

$pt=p^2-4pt+4t^2 \ \Big| \ p^2-5pt+4t^2=0$

$D=(5t)^2-4\cdot 4t^2=9t^2 \Rightarrow p=\frac{5t\pm 3t}{2}$ $\left[\begin{array}{l} p=4t \\ p=t \end{array}\right.$

пусть $p=4t$: $16t^2+2t^2-3=18t^2-3=0$

$18t^2=3 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{3}{18}}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow p=\pm\frac{4}{\sqrt{6}}$

пусть $p=t$: $3t^2-3=0$: $t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1 \Rightarrow p=\pm 1$

для $(p;t)$: $\left(\frac{4}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\left(-\frac{4}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $(1;1)$; $(-1;-1)$

Ответ: для $(x;y)$: $\left(\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}; \frac{4+2\sqrt{6}}{6}\right)$; $(-\div; -\div)$; $(2;3)$; $(-2;-3)$

$x=t+1$, $y=p+2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

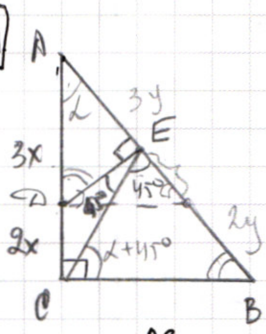
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№4}$

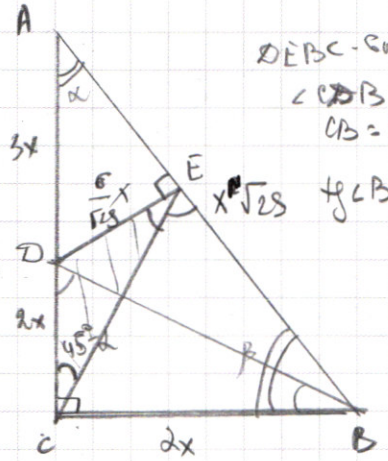


$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, $AC = 5x$, $BC = 2x$

$2x\,AE = DE \cdot 5x$

$AE = \frac{5}{2} DE$



$DEBC$ - вписан. - по призн.

$\angle CDB = 45^\circ$

$CB = CD = 2x$

$tg\angle BAC = \boxed{\frac{5}{2}}$

а) $tg\angle BAC = \frac{AC}{CB} = ?$

б) $AC = \sqrt{29}$, $S_{CED} = ?$

$S = \frac{1}{2} ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$

$AB = \sqrt{25x^2 + 4x^2} = x\sqrt{29}$

$\sin\beta = \frac{1}{x} = \sin\angle CDE$

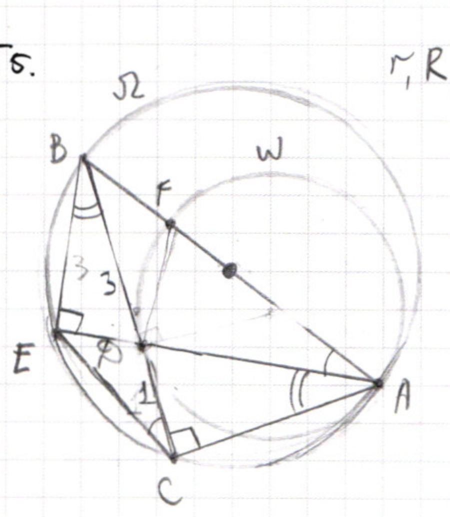
$\sin\beta = \sin(\pi - \beta)$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$; $\frac{3x}{x\sqrt{29}} = \frac{DE}{2x} \Rightarrow DE = \frac{6x^2}{x\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}}x$

$S_{CED} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE = \frac{2x \cdot \frac{6}{\sqrt{29}}x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{\sqrt{29}}x = \frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{6}{5} = \boxed{1,2}$

$5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

№5.



$r, R, S_{BACE} = ?$

$\triangle EBD \sim \triangle CAD$

$\frac{BD}{AD} = \frac{ED}{CD}$ $\frac{3}{AD} = \frac{ED}{1}$

$BF \cdot FA = 9$

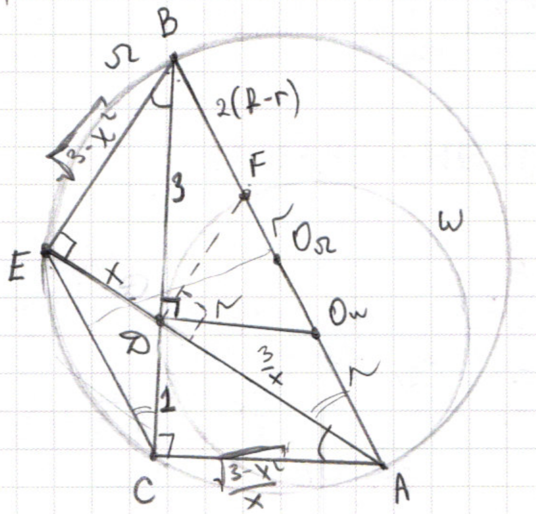
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5. $r_\omega, R_\Omega, S_{BACE}=?$



$S_{BACE}=?$

(v) $\Rightarrow x^2+3=6$

$x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$

(w) $\Rightarrow \frac{1}{2}(EC+AB)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{D}{D-h}=\frac{AB}{EC}=\sqrt{3}$, $D=2R$

$\left[S=\frac{1}{2}(EC+AB)\cdot h\right]=$ ---

$BD^2=BF\cdot BA=9$, $BF=2(R-r)$; $BA=2R \Rightarrow 4R(R-r)=9$

$BD\cdot DC=ED\cdot DA=3$

$\boxed{R(R-r)=\frac{9}{4}}$

из $\triangle BDO_\omega$ пр-ного: $(r+BF)^2=r^2+9$

$(2R-r)^2=r^2+9 \Rightarrow R(R-r)=\frac{9}{4}$

(v) $\triangle EBA \sim \triangle DFA$: $\frac{BA}{FA}=\frac{EA}{DA}=\frac{R}{r}=\frac{x^2+3}{3}=2$, $FA=3$

из $\triangle EDB \sim \triangle CDA$: $\frac{BD}{AD}=\frac{ED}{DC} \Rightarrow AD\cdot ED=3$, $DC=1$

пусть $ED=x$

тогда $AD=\frac{3}{x}$

тогда $EA=ED+AD=x+\frac{3}{x}=\frac{x^2+3}{x}$

$\frac{EA}{DA}=\frac{x^2+3}{3}$

(w) из $\triangle EDC \sim \triangle BDA$:

$\frac{ED}{BD}=\frac{EC}{AB}=\frac{DC}{DA}$, $ED=x$, $BD=3$, $DC=1$, $DA=\frac{3}{x}$

$\frac{EC}{AB}=\frac{x}{3} \Rightarrow EC=\frac{AB\cdot x}{3}=\frac{2R\cdot\sqrt{3}}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $R=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$AC=\sqrt{\frac{3}{x^2}-1}=\frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}$ $\quad BE=\sqrt{3-x^2}$

$\triangle CBA \sim \triangle DBO_\omega$: $\frac{AC}{O_\omega D}=\frac{BA}{BO_\omega}=\frac{BC}{DB} \Rightarrow 6R=4(2R-r)$, $O_\omega D=r$, $BA=2R$, $BO_\omega=2R-r$, $BC=4$, $DB=3$

$6R=8R-4r$

$2R=4r$

$\boxed{R=2r}$

тогда $R(R-r)=2r\cdot r=2r^2=\frac{9}{4} \Rightarrow r^2=\frac{9}{8} \Rightarrow \boxed{r=\frac{3}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \boxed{R=\frac{3}{\sqrt{2}}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1| \;\Big|\; x\in\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$, $(a;b)=?$ $\quad -\frac{3}{2} \le -x \le \frac{1}{4}$

$x^2+x^2-x-1 = x(x-1)+(x-1)(x+1) = (x-1)(2x+1)$

если : ~~...~~ $x=-\frac{1}{4} \Rightarrow 2x-1=-\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2} \Rightarrow 2x-1=2 \quad \Rightarrow |2x-1| = (0;2]$

пусть $-\frac{1}{4} \le x \le 0$: $1-x \Rightarrow$ ~~...~~ $1 \le |2x-1| \le \frac{5}{4}$

$0 \le x \le \frac{3}{2}$; $3x-1 \Rightarrow \quad -1 \le |2x-1| \le \frac{7}{2}$

$(x-1)(2x+1) \le ax+b \le 1-x$ / если $x\le 0$

$(x-1)(2x+1) \le ax+b \le 3x-1$ / если $x \ge 0$

$3x-1 = 3(x-1)+2 \qquad | 1-x = -1(x-1)$

$ax+b = a(x-1)+(a+b)$

$(x-1)(2x+1) \le a(x-1)+(a+b) \le -1(x-1) \;/ : (x-1) \ne 0$

$-\frac{1}{4} \le x \le 0$: $\left[2x+1 \ge a + \frac{a+b}{x-1} \ge -1 \right.$ $\qquad \frac{1}{2} \le 2x+1 \le 1$

$0 \le x \le \frac{3}{2}$: $\left[2x+1 \le a + \frac{a+b}{x-1} \le 3 + \frac{2}{x-1} \right.$ $\qquad \left(1 \le 3+\frac{2}{x-1} \le 7\right)$

$\frac{1}{2} \le 2x+1 \le 4 \qquad \left(1 \le 2x+1 \le 4\right)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)