МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y-2x\geq 0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$y^2-y\cdot(5x-1)+4x^2+2x-2=0$

$D=25x^2-10x+1-4\cdot(4x^2+2x-2)=$

$=9x^2-18x+9=(3x-3)^2$

$\cancel{2}+\frac{2\sqrt6}{3}\quad -\cancel{2}-\frac{2\sqrt6}{6}$

$y_1=\frac{5x-1+3x-3}{}$

$\frac{1}{\sqrt6}=$

$2-\frac{2\sqrt6}{3}-1+\frac{\sqrt6}{6}=1-\frac{4\sqrt6}{6}+\frac{\sqrt6}{6}=1-\frac{3\sqrt6}{6}=1-\frac{\sqrt6}{2}=$

$=\frac{2-\sqrt6}{2}$

$a=a$

$b=an$

$c=an^2$

$ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot(an^3)^2+2\cdot a\cdot n\cdot a\cdot n^3+an^2=0$

$a^3n^6+2a^2n^4+an^2=0$

$an^2\cdot(a^2n^4+2an^2+1)=0$

$an^2\cdot((an^2+1)^2)=0$

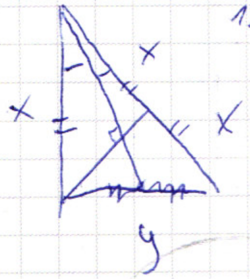
$an^2=-1$

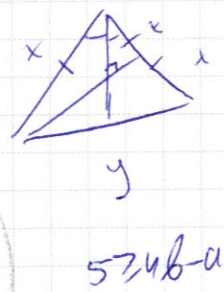
$2a-8b\leq 5$

$3a+2b\leq 7$

$12a+8b\leq 28$

$14a\leq$





$3x<1200$

$y<1200$

$3x+y=1200$

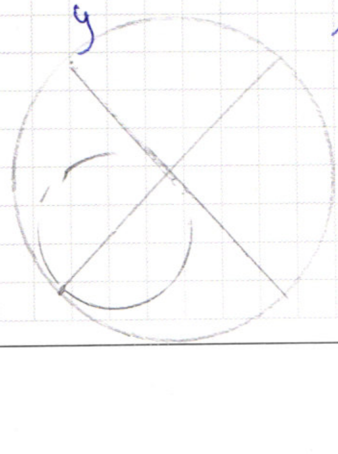
$y=1200-3x>0$

$1,\ 399$

$1200>3x$

$400>x$

$x<400$



$5\geq 4b-a$

$3a+2b\geq 4$

$6a+4b\geq 8$

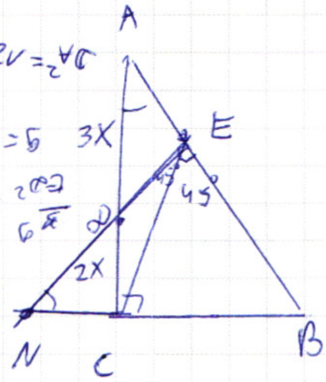
$6a+5\geq 8-a$

$7a\geq 13$

$48 \cdot BN = 9$

$\frac{DE}{AE}$

$\frac{DC}{DE} = \frac{NC}{AE} = \frac{ND}{AD}$



$\frac{BE}{AE} \cdot \frac{3X}{2X} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$

$\frac{BE}{AE} \cdot \frac{NC}{NB} = \frac{2}{3}$

$AE = \frac{2NB}{3NC \cdot BE}$

$\frac{2X}{DE} = \frac{ND}{3X}$

$6X^2 = ND \cdot DE$

$DE = \frac{6X^2}{ND}$

$\frac{BC}{AC}$

$\frac{BE}{CB} = \frac{NE}{AC} = \frac{NB}{AB}$

$BE \cdot AB = \cancel{NE}\,NB \cdot CB$

$\frac{NB}{BC} = \frac{AB}{CB}$

$\frac{2}{3} \frac{AB}{CB \cdot BE}$

$\frac{NC}{AC} = \frac{ND}{AD}$

$NC \cdot 3X =$

$ND \cdot$

$\frac{NC}{NE} = \frac{CB}{EB}$

$NC \cdot EB = CB \cdot NE$

$CB = \frac{NC \cdot EB}{NE} = \frac{\frac{2}{3} AE \cdot NB}{NE}$

$\frac{NC}{AC} = \frac{2X}{DE}$

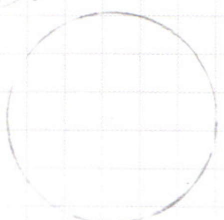
$AE = \frac{NC\,DE}{2X}$

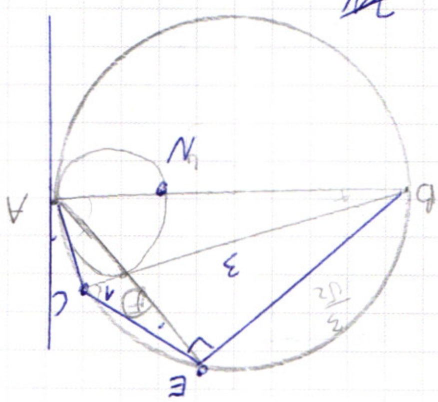
$\frac{NC \cdot DE \cdot NB}{NE} =$

$= \frac{ND \cdot NE \cdot DE}{\cancel{NE}}$

$NC \cdot NB = ND \cdot NE$

$\frac{ND}{NB}$ $\quad \frac{ND}{NB} \cdot BE$





$\frac{ND}{5X}$

$\frac{78}{5}\ 29$

29 $\quad 29$

$\frac{78}{232}$

$\frac{29}{522}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x^n \quad n\cdot x^{n-1} \quad f'(x) =$

$f'(x) = 4\cdot x - (a+1) = 0$ $\qquad x = -\frac{1}{4}$ $\qquad x = \frac{3}{2}$

$a+1 = 4x$ $\qquad a = -2$ $\qquad a = 5$

$\cancel{x = 2a+}$

$a = 4x - 1$

$\frac{a+1}{4}$

$x = -\frac{1}{4}$

$2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\cdot(a+1) - b - 1 \le 0$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} - b - 1 \le 0$

$\frac{1}{4}a - b \le 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$-\frac{1}{2} - 1$

$x = \frac{3}{2}$:

$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\cdot(a+1) - b - 1 \le 0$

$\cancel{\frac{9}{8}}$ $\frac{9 - 12\cdot(a+1)}{8} - b - 1 \le 0$

$\frac{-12a - 3}{8} - \frac{8b+8}{8} \le 0$

$\frac{-12a - 11 - 8b}{8} \le 0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

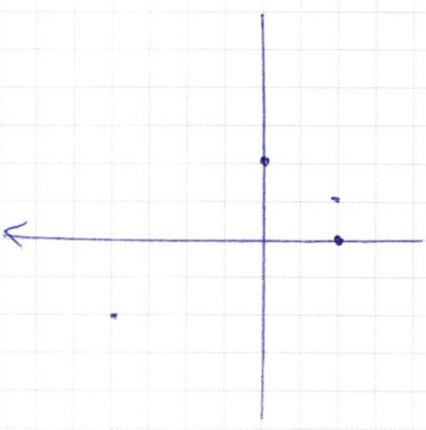
$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

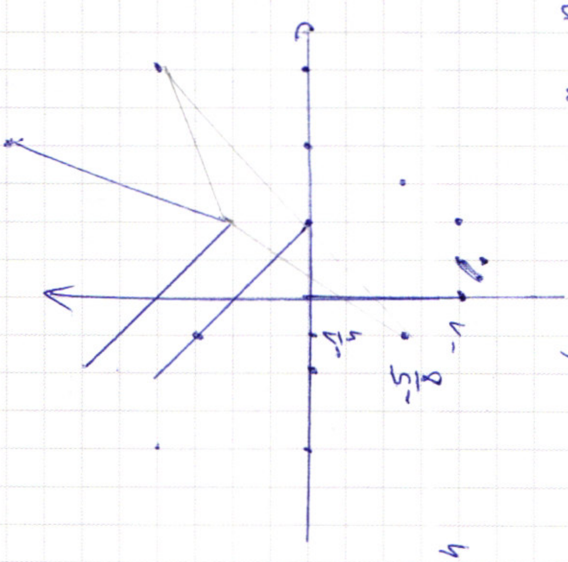
Если $x \ge \frac{1}{2}$

$3x - 1$

$x - 2x + 1 = 1 - x$

$ax_1 + b = y_1$





$\frac{9}{16} \cdot 2 = \frac{9}{8}$

$\frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3}{8} - 1$

$-\frac{5}{8}$

$ax + b \ge 2x^2 - x - 1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

$$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$$

$$y^2-y\cdot(5x-1)+4x^2+2x-2=0$$

$$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$$

$$=9x^2-18x+9=(3x-3)^2$$

$$y_1=\frac{5x-1+3x-3}{2}=\frac{8x-4}{2}=4x-2$$

$$y_2=\frac{5x-1-3x+3}{2}=\frac{2x+2}{2}=x+1$$

Подставим $y=4x-2$ во 2 ур-ие:

$$2x^2+(4x-2)^2-4x-4\cdot(4x-2)+3=0$$

$$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$$

$$18x^2-36x+15=0$$

$$6x^2-12x+5=0$$

$$D=144-120=24$$

$$x_1=\frac{12+\sqrt{24}}{12}=1+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}}{12}=1+\sqrt{\frac{2}{12}}=1+\sqrt{\frac{1}{6}}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Тогда $y=4\cdot\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)-2=2+\frac{4\sqrt{6}}{6}=\cancel{2+\frac{2\sqrt{6}}{3}}\ 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

№3 (продолжение)

$$x_2 = \frac{12-\sqrt{24}}{12} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Тогда $y = 4\cdot\left(1-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) - 2 = 2 - \frac{4\sqrt{6}}{6} = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Но $y - 2x \geq 0$

$$2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} - 2 + \frac{2\sqrt{6}}{6} \geq 0$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{6} - \frac{4\sqrt{6}}{6} \geq 0$$

$-\frac{2\sqrt{6}}{6} \geq 0$ – неверно.

Подставим $y = x+1$ во 2 ур-ие:

$$2x^2 + (x+1)^2 - 4x - 4\cdot(x+1) + 3 = 0$$

$$2x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 4x - 4 + 3 = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x\cdot(x-2) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Если $x=0$, то $y = 0+1 = 1$

Если $x=2$, то $y = 2+1 = 3$. Но $y - 2x \geq 0$

$3 - 4 \geq 0$

$-1 \geq 0$ – неверно

Ответ: $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6};\ 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $(0; 1)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $b = an$, $c = an^2$, а 4-ый член равен an^3, где n – знаменатель прогрессии.

Тогда по условию an^3 корень $ax^2+2bx+c=0$

$$a\cdot(an^3)^2+2\cdot an\cdot an^3+an^2=0$$

$$a^3\cdot n^6+2a^2n^4+an^2=0$$

$$an^2\cdot(a^2n^4+2an^2+1)=0$$

$$an^2\cdot(an^2+1)^2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} an^2=0 \\ an^2+1=0 \end{array}\right.$$

Если $an^2=0$, то все числа прогрессии равны 0, ~~этого~~ этот случай неудовлет.

Если $an^2+1=0$

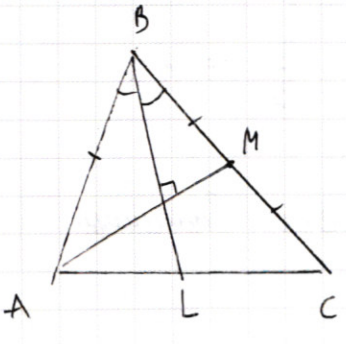
$$an^2=-1$$

То есть $c=-1$

Ответ: -1

№2

Пусть дан $\triangle ABC$. ~~Я~~ BL – биссектриса, AM – медиана и $BL\perp AM$ по условию.



Заметим, что $\triangle ABM$ – равнобедренный, т.к. в нём биссектриса является высотой. Тогда

$AB=BM=MC$. Пусть $AB=x$. Пусть $AC=y$

Тогда по условию $AB+AC+BC=1200$

$$x+y+2x=1200$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 2 (продолжение)

$3x + y = 1200$

$y = 1200 - 3x$. Тогда удовлетворяют все такие y, что $y \vdots 3$ и $0 < y < 1200$.

$1200 - 3x > 0$

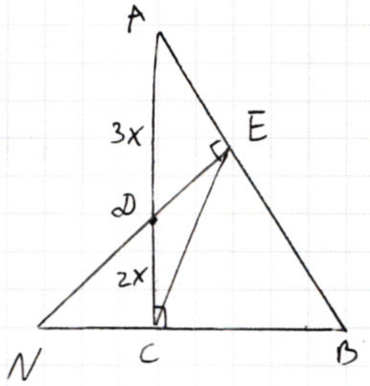
$x < 400$. и $x > 0$

~~Следовательно~~ То есть ~~вс~~ ~~вао~~ всего подходящих x 399. Тогда всего искомых Δ также 399.

Ответ: 399

№ 4

а) По условию $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, пусть тогда $AD = 3x$, $CD = 2x$.



Продолжим ED до пересечения (CB) в точке N.

$\angle CED = 45^\circ$, тогда $\angle CEB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

То есть EC – биссектриса в ΔNEB.

По св-ву биссек.:

$$\frac{NC}{NE} = \frac{BC}{BE}$$

$$BC = \frac{NC \cdot BE}{NE}$$

Для ΔABC и секущей EN по т. Менелая: $\frac{BE}{AE} \cdot \frac{AD}{DC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$

$$\frac{BE}{AE} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$$

$$NC \cdot BE = \frac{2}{3} \cdot AE \cdot NB$$

Тогда $BC = \frac{\frac{2}{3} AE \cdot NB}{NE} = \frac{2 \cdot AE \cdot NB}{NE}$

Заметим, что $\angle DCB + \angle DEB = 90^\circ + 90^\circ = 180$, тогда $DEBC$ – вписанный и тогда $NC \cdot NB = ND \cdot NE$, $\frac{NB}{NE} = \frac{ND}{NC}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

Тогда $BC = \dfrac{2\cdot AE\cdot NB}{NE} = \dfrac{2\cdot AE\cdot ND}{NC}$

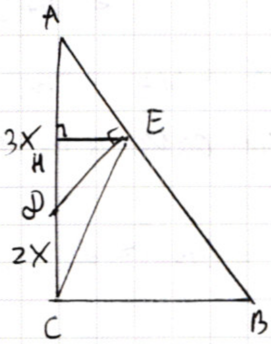
Заметим, что $\triangle NCD \sim \cancel{AE}\, \triangle AED$, т.к. $\angle AED = \angle \cancel{A}DCN = 90^\circ$ и $\angle ADE = \angle NDC$.

Тогда $\dfrac{AE}{NC} = \dfrac{AD}{ND}$

Тогда $BC = \dfrac{2\cdot AE\cdot ND}{NC} = \dfrac{2\cdot AD}{ND}\cdot ND = 2AD = 2\cdot 3x = 6x$

Тогда $tg\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{6x}{5x} = \dfrac{6}{5}$

б)



$AC = \sqrt{29}$, т.е. $5x = \sqrt{29}$

$x = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$

Проведём ~~EH I~~ $EH \perp AC$.

Для $\triangle ADE$ по т. Пифагора: $AD^2 = DE^2 + AE^2$

$AD^2 = (AE\cdot tg\angle BAC)^2 + AE^2$

$9x^2 = AE^2\cdot(1 + tg^2\angle BAC)$

$9x^2 = AE^2\cdot\left(1 + \dfrac{36}{25}\right)$

$9x^2 = AE^2\cdot\left(\dfrac{61}{25}\right)$

$AE = \sqrt{\dfrac{9x^2\cdot 25}{61}} = \dfrac{15x}{\sqrt{61}}$, тогда $DE = \dfrac{15x}{\sqrt{61}}\cdot\dfrac{6}{5} = \dfrac{18x}{\sqrt{61}}$

Тогда $EH = \dfrac{AE\cdot DE}{AD} = \dfrac{15x\sqrt{61}\cdot\dfrac{18x}{\sqrt{61}}}{3x} = 5\cancel{x}\cdot 18x = 90x$

~~Тогда $S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot EH = \frac{1}{2}$.~~

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4 (продолжение п. б)

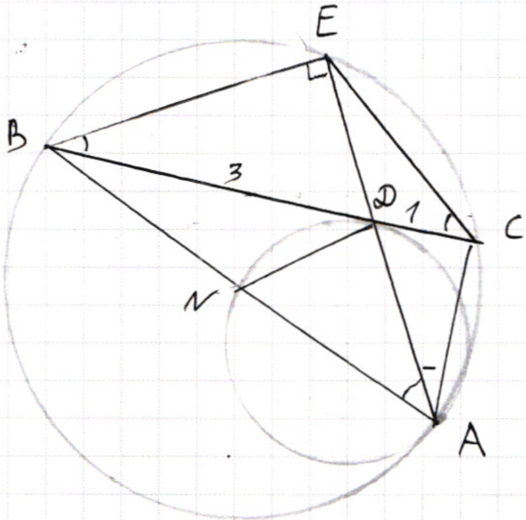
Тогда $S_{CED} = \frac{1}{2} CD \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 90x = 90x^2 = 90 \cdot \frac{29}{25} = \frac{18 \cdot 29}{5} = \frac{522}{5} =$

$= 104{,}4$

Ответ: а) $\frac{6}{5}$

б) $104{,}4$

№5



~~Вос Воспользуемся леммой Архимеда, которая утвержд~~

Воспользуемся известной леммой Архимеда, которая утверждает, что $\angle BAD = \angle DAC$

Тогда $\angle BAD = \angle DAC = \angle BCE = \angle EBC$ (опираются на одни и те же дуги)

Тогда $BE = EC$. Пусть $\angle EBC = \alpha$.

Для $\triangle DEC$ по теореме синусов:

$$\frac{ED}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin\angle DEC}$$

Но из $\triangle BED$: $\sin\alpha = \frac{ED}{BD} = \frac{ED}{3}$. Тогда $\frac{ED}{\sin\alpha} = 3 = \frac{DC}{\sin\angle DEC}$

$$\sin\angle DEC = \frac{DC}{3} = \frac{1}{3}$$

$\angle DEC = 180^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2\alpha$

$\cancel{\sin 2\alpha}$ $\cos 2\alpha = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{3}$

$1 - 2 \cdot \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$

$2\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

~~$\sin\alpha =$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

По т. синусов: для $\triangle EDC$ $\dfrac{DC}{\sin\angle DEC} = \dfrac{EC}{\sin(90^\circ+\alpha)}$

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{EC}{\cos\alpha}$$

$$3\cdot\cos\alpha = EC$$

$$3\cdot\sqrt{1-\frac{3}{9}} = EC$$

$$3\cdot\sqrt{\frac{6}{9}} = EC$$

$$EC = \sqrt{6}$$

~~По т. синусов для $\triangle EAC$: $\frac{EC}{\sin\alpha}$~~ Радиус большей окружности $R = \dfrac{EC}{2\cdot\sin\alpha} =$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$. (Из т. синусов для $\triangle EAC$)

$ED = \dfrac{DC}{\sin\angle DEC}\cdot\sin\alpha = \dfrac{1}{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Т.к. D внутри окр. R, то $BD\cdot DC = ED\cdot DA$

$$3\cdot 1 = \sqrt{3}\cdot DA$$

$$DA = \frac{3}{\sqrt{3}} = \cancel{3\sqrt{3}}\ \sqrt{3}$$

Тогда $EA = ED + DA = 2\sqrt{3}$

Площадь $\triangle BACE$ $\cancel{S} = \dfrac{BC\cdot EA}{2}\cdot\sin\angle EDC = \dfrac{4\cdot 2\sqrt{3}}{2}\cdot\sin(90^\circ+\alpha) = 4\sqrt{3}\cdot\cos\alpha =$

$= 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{6}{9}} = 4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \cancel{4\sqrt{2}}\ \boxed{4\sqrt{2}}$

Пусть AB пересекается с w ещё в точке N. Тогда $BD^2 = BN\cdot AB$

$$9 = BN\cdot AB$$

№5 (продолжение 2)

$9 = BN \cdot AB$ ~~...~~

$9 = BN \cdot 2 \cdot R\Lambda$

$9 = BN \cdot 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$BN = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$AN = AB - BN = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{6-3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

По т. косинусов для ΔNDA: $ND^2 = AN^2 + AD^2 - 2 \cdot AN \cdot AD \cdot \cos \alpha =$

$= \frac{9}{2} + 3 - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{15}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{15}{2} - 6 =$

$= \frac{3}{2}$

$ND = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Радиус ~~окр~~ окружности w равен $\frac{ND}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

Ответ: радиус $\Lambda = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, радиус $w = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, площадь $BACE = 4\sqrt{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|, \quad x\in[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$2x^2-x-1 \le ax+b$

$2x^2-x\cdot(1+a)-b-1\le 0$

~~Т.к. коэфф. перед x^2 >0 (2>0), то~~

~~Если 2a±1~~ Если $x=-\frac{1}{4}$: $2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot(a+1)-b-1\le 0$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}-b-1\le 0$

$\frac{1}{4}a-b \le 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

$\frac{1}{4}a-b\le\frac{5}{8}$

$2a-8b\le 5 \quad (1)$

Если $x=\frac{3}{2}$: $2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\cdot(a+1)-b-1\le 0$

~~$\frac{9}{2}$~~ $\frac{9-3\cdot(a+1)-2b-2}{2}\le 0$

$\frac{4-3a-2b}{2}\le 0$

$4-3a-2b\le 0$

$3a+2b\ge 4 \quad \Big| \cdot\frac{2}{3} \quad (2)$

$2a+\frac{4}{3}b\ge\frac{8}{3}$

Сложим 2 нер-ва: (1) и (2) $2a-8b+\frac{8}{3}\le 5+2a+\frac{4}{3}b$

$\frac{4}{3}b+8b\ge -5$

$\frac{28}{3}b\ge -5 \iff b\ge \frac{-15}{28}$

№6 (продолж.)

~~$7a \quad 3a+2b \geq 4 \quad | \cdot (-4)$~~

~~$-12a-8b \leq -16$~~

~~Сложим нер-ва:~~

$$x+|2x-1| \geq ax+b$$

Если $x=\frac{3}{2}$: $\frac{3}{2}+2 \geq \frac{3}{2}a+b$

$$\frac{7}{2} \geq \frac{3}{2}a+b$$

$$7 \geq 3a+2b \qquad (3)$$

Если $x=-\frac{1}{4}$: $\frac{-1}{4}+\frac{3}{2} \geq \frac{-a}{4}+b$

$$\frac{5}{4} \geq \frac{-a}{4}+b$$

$$5 \geq 4b-a \qquad (4)$$

$$15 \geq 12b-3a$$

Сложим (3) и (4): $22 \geq 14b$

$$b \leq \frac{22}{14}=\frac{11}{7}$$

Имеем: $\boxed{-\frac{15}{28} \leq b \leq \frac{11}{7}}$

$3a+2b \leq 7$

и $12a+8b \leq 28$

Тогда $(12a+8b)+(2a-8b) \leq 28+5$

$$14a \leq 33$$

$$a \leq \frac{33}{14}$$

$5 \geq 4b-a$

и $3a+2b \geq 4$

$6a+4b \geq 8$

Сложим: $6a+5 \geq 8-a$

$$7a \geq 3$$

$$a \geq \frac{3}{7}$$ Имеем: $\boxed{\frac{3}{7} \leq a \leq \frac{33}{14}}$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)