МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a – первый член геом. прогрессии

$\exists$ q – частное этой прогрессии

$b = aq$

$c = aq^2$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 4((aq)^2 - a \cdot aq^2) = 0$

$x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{aq}{a} = -q$

С другой стороны x – четвертый член прогрессии,

т.е. $x = aq^3$

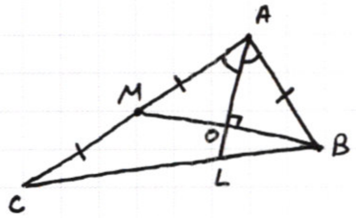
$aq^3 = -q$

$aq^2 = -1$

Но $aq^2 = c$ – третий член прогрессии, т.е. $c = -1$

Ответ: $c = -1$.

№2.



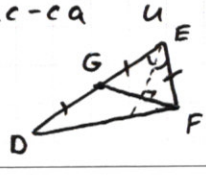
• Заметим, что биссектриса и медиана, которые перпендикулярны, не могут выходить из одной вершины, т.к. тогда угол при этой вершине точно $> 180°$.

• $\forall$ $\triangle ABC$, где бис-са $AL \perp$ медиане BM.

$\exists$ $AL \cap BM = O$

$\triangle ABM$ – р/б, т.к. AO – бис-са и высота $\Rightarrow AM = AB = CM$.

• Заметим, что для любого треугольника, у которого одна сторона в 2 раза больше другой, найдется такая бис-са и медиана, что они будут перпендикулярны:



$\exists$ $DE = 2EF$

G – сер. $DE \Rightarrow GF$ – медиана

$\triangle GEF$ – р/б $\Rightarrow$ бис-са $\angle GEF$ – высота треугольника $\triangle GEF \Rightarrow$ бис-са $\angle DEF \perp$ медиане GF.

- То есть т.к. для любого треугольника это будет верно, то на длины сторон накладываются только 3 ограничения:
  1) одна из сторон в 2 раза больше другой
  2) неравенство треугольника
  3) длины целые (по усл.)

I длина одной стороны — x

длина второй — $2x$

длина третьей — y

$P = 3x+y$

$3x+y=1200$

По н. треугольника: $\begin{cases} y < 2x+x \\ 2x+y > x \\ y+x > 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<3x \\ y>x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x<y<3x}$

Тогда $4x < 3x+y < 6x$

$4x < 1200 < 6x$

$200 < x < 300$

$-900 < -3x < -600$

$300 < 1200-3x < 600$

$\boxed{300 < y < 600}$

Кроме того заметим, что $1200 \vdots 3$ и $3x \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3$

То есть ответом будет — кол-во целых чисел, кратных трем и лежащих в пределах от 300 до 600.

$600-300=300$

$300 \div 3 = 100$

Границы не включаются, то есть ответ 99.

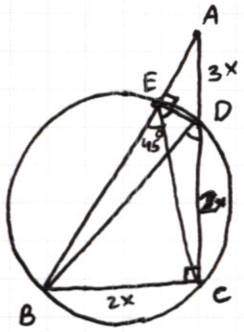
Ответ: 99

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



• т.к. $\angle DCB = 90^\circ$, $\angle DEB = 90^\circ$, то $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ$

т.е. четырехугольник BCDE – вписанный.

Тогда $\angle BEC = \angle BDC = 45^\circ$

$\angle DBC = 90^\circ - \angle BDC = 45^\circ \Rightarrow$

$\angle DBC = \angle BDC = 45^\circ \Rightarrow \triangle BDC$ – р/б $\Rightarrow$

~~BD~~ $BC = DC$

Пусть $AD = 3x \Rightarrow DC = 5x - 3x = 2x \Rightarrow BC = 2x$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

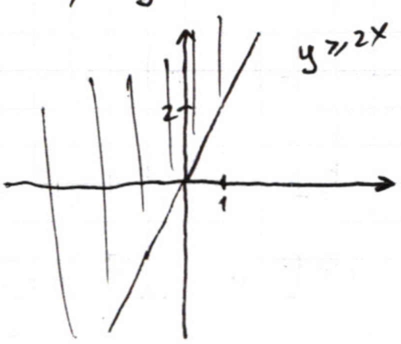
(1) $\begin{cases} y \geq 2x \\ y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

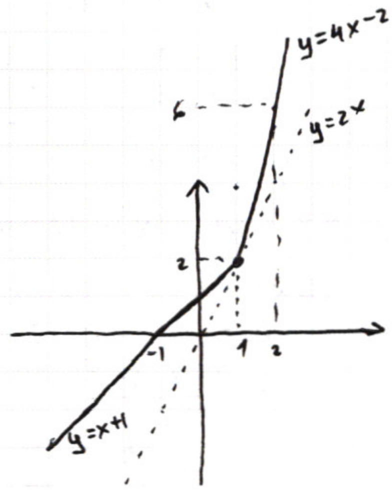
$y^2 - 4xy + 2y - y + 4x^2 - xy - 2x + 4x - 2 = 0$

$y(y - 4x + 2) - x(y - 4x + 2) - y + 4x - 2 = 0$

$(y - x - 1)(y - 4x + 2) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = 4x - 2 \end{array}\right. \\ y \geq 2x \end{array}\right.$



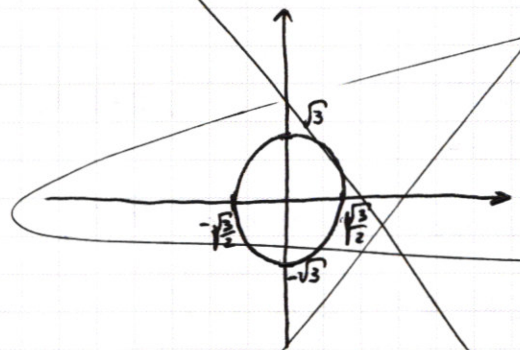


② $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

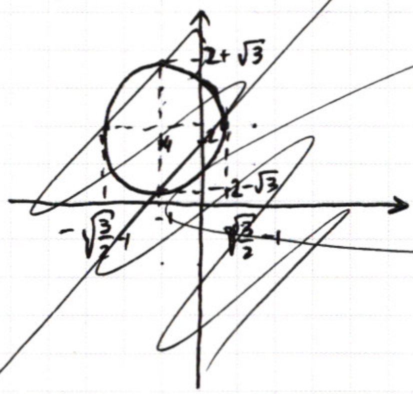
$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-2-4+3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

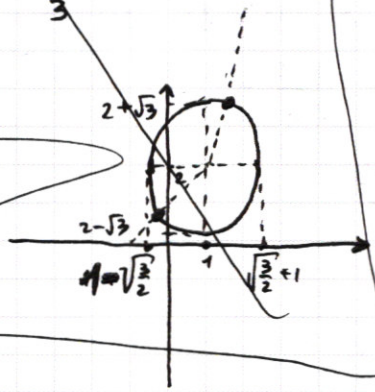
$\frac{(x-1)^2}{\frac{3}{2}}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$ — эллипс



$\frac{x^2}{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{3}=1$



$\frac{(x-1)^2}{\frac{3}{2}}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$



$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$ $\quad\exists\; y=x+1$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.$ $\quad y\geqslant 2x \quad$ $1\overset{?}{\geqslant}2\cdot0$ — да; $3\overset{?}{\geqslant}2\cdot2$ — нет $\Rightarrow x=0$

$\exists\; y=4x-2$

$2x^2+\cancel{y^2}\,16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$D=36^2-4\cdot18\cdot15=3^4\cdot2^4-3^3\cdot2^3\cdot5=3^3\cdot2^3=6^3$

$x=\frac{36\pm6\sqrt{6}}{36}$

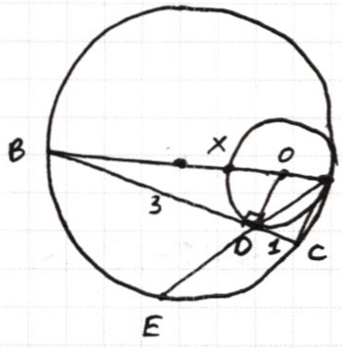
$x=1\pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow y=4\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}-2 \Rightarrow y=2\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}$ $\quad 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}>2+\frac{\sqrt{6}}{3}$

$y\geqslant2x\Rightarrow y\geqslant 2\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad 2-\frac{2}{3}\sqrt{6}<2-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ответ: 0; $2+\frac{\sqrt{6}}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



• Заметим, что центры касающихся окружностей лежат на одной прямой с точкой касания.

т.е. ∃ O - ценр окр. $\omega \Rightarrow O \in AB$

• BD - касательная к ω $\Rightarrow OD \perp BC$, т.к. OD - радиус ω.

• По т. об отрезках касательной и секущей

$BD^2 = BX \cdot AB$, где X - т. пересечения окружности ω и AB.

∃ $BX = x$, а $AX = y \Rightarrow OD = OX = \frac{y}{2}$ (радиус)

$BD^2 = BX \cdot AB = x(x+y) \Rightarrow x(x+y) = 9$

$BD^2 = 3^2 = 9$

~~$\triangle OBD$ - прямоугольный $\Rightarrow BD^2 = BO^2 - OD^2 = (BX+XO)^2 - OD^2 = (x+\frac{y}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2 = x^2+xy+\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = x^2+xy$~~

~~$BD^2 = x^2+xy$, $9 = 9$, $x^2+9=9$~~

$\triangle ABC$ - прямоугольный, т.к. AB - диаметр окружности. $\Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle OBD \Rightarrow$

$\frac{OB}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+\frac{y}{2}}{x+y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x+2y = 3x+3y \Rightarrow x = y$

$x(x+y) = 9 \Rightarrow$

$x^2+xy = 9 \Rightarrow 2x^2 = 9 \Rightarrow x = y = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Радиус окружн. Ω — это $\frac{AB}{2} = \frac{x+y}{2} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Радиус окружн. ω — $\frac{y}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

$S_{ABEC} = \cancel{S_{\triangle ACD} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle OBD} + S_{\triangle BCE}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCE}$

$\cdot\ OD \parallel AC \Rightarrow \angle CAD = \angle ADO$, $\angle CAE = \angle CBE \Rightarrow \angle ODA = \angle CBE$

$\uparrow$

т. к. $\angle ACB = \angle ODB = 90^\circ$

$\angle BCE = \angle BAE \Rightarrow \triangle BCE \sim \triangle AOD$ по двум углам.

$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACD} - S_{\triangle OBD} \Rightarrow$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (3+1) = 2\,AC$

$AC^2 = \cancel{BC^2}\ AB^2 - BC^2 = (3\sqrt{2})^2 - (1+3)^2 = 18 - 16 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}$ $\qquad \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow OD = 3\,AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\triangle ODB} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{2}}{8}$

$S_{\triangle AOD} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{9}{8}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

$\triangle AOD \sim \triangle BCE \Rightarrow$

$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BCE}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2$ $\qquad AD^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$

(из т. Пифагора в $\triangle ACD$)

$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BCE}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow$

$S_{\triangle BCE} = \frac{16}{3} S_{\triangle AOD} = \frac{16}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCE} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $r_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$r_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$y = 2x^2 - x - 1$ – парабола

Вершина: $\left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

$2>0 \Rightarrow$ ветви направл. вверх

$D = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{1 \pm 3}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

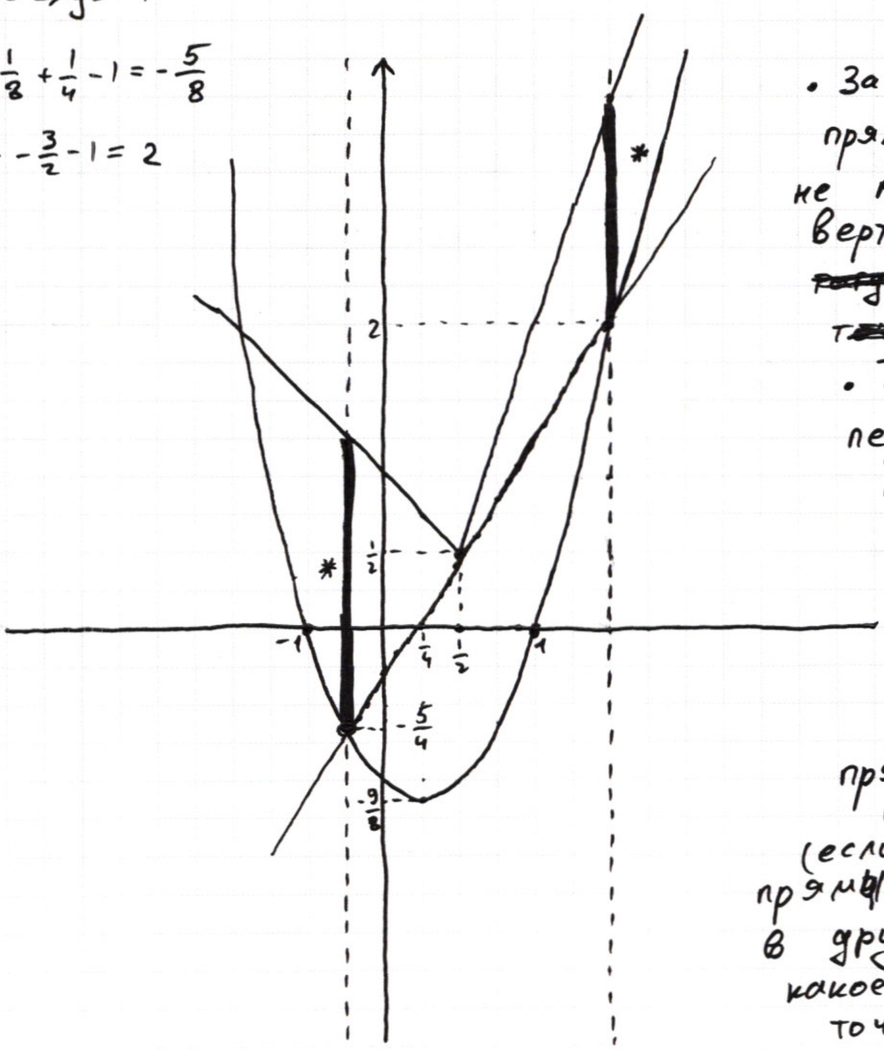
$x + |2x-1| = y$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x-1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1-x \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$

$y = ax + b$ — прямая



• Заметим, что прямая $ax+b=y$ не может быть вертикальной,

• Тогда она точно пересекает прямые $x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{2}$

• на графике * обозначены участки, которые прямая точно пересекает (если она пересечет прямые $x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{2}$ в других местах, то какое-то из неравенств точно нарушится).

• Заметим, что точки ~~$\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$~~ $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};2\right)$; $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$ лежат на одной прямой: $\boxed{y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

• Если прямая $ax+b=y$ пересечет прямую $x=-\frac{1}{4}$ в точке, ордината которой больше $\left(-\frac{5}{8}\right)$, то она должна пройти не выше ~~ниже~~, чем точка $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, чтобы не пересечь график $x+|2x-1|=y$ $\Rightarrow$ коэффициент наклона этой прямой >0, но $<\frac{3}{2}$ (меньше, чем у прямой $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$)

Но тогда она пересечет прямую $x=\frac{3}{2}$ в точке, которая ниже точки $\left(\frac{3}{2};2\right)$, т.е. не попадет в отмеченный * участок.

Т.е. единственная возможная прямая — $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=y$

Тогда $a=\frac{3}{2}$, а $b=-\frac{1}{4}$

Ответ: $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

- Заметим, что $f(z)$, где $z \in N$ точно будет неотрицательным, т.к. число z представимо в виде произведения простых множителей, которые положительны, тогда $f(p) > 0$.

- $f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4}) = 1 + (f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 1 + 2f(\frac{1}{2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -1$

$f(\frac{1}{t}) = \underset{>0}{f(t)} + f(\frac{1}{t^2}) = f(t) + 2f(\frac{1}{t}) \Rightarrow f(\frac{1}{t}) = -f(t) < 0$

$t > 0$
$t \in N$

$f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b}) = f(a) - f(b)$, a и $b > 0$, $a, b \in N$

Если $a < b$, то и $f(a) < f(b)$.

т.к. $[p/2]$ возрастает.

тогда подходят все варианты при которых $x < y$.

$x = 1 \Rightarrow y \in (2; 21)$ — 20 вар.
$x = 2 \Rightarrow y \in (3; 21)$ — 19 вар.
$\vdots$
$x = 20 \Rightarrow y = 21$ — 1 вар.

Всего вариантов $(1 + \ldots + 20) = 21 \cdot 10 = 210$

Ответ: 210 вариантов

$f(ab) = f(a) + f(b) =$

$f\left(\frac{1}{}\right.$

$f(p) = [p/2]$

f

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2})$

$\frac{x}{9} =$

$f(1) =$

$f(\frac{1}{1}) =$

$f(2) = 2$

$\frac{1}{2} = 0$

$f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t) -$

$f(\frac{2}{3}) = f(2) + f(\frac{1}{3})$

$f(x) + f(\frac{1}{y})$

$\frac{7}{21}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$

$\frac{x}{y} = \frac{21}{7} = 3$ 1

9

3 $\frac{1}{9}$

$\frac{2}{5}$

-1

1

$\frac{1}{3}$ $2 + \frac{1}{6}$

$f(\frac{1}{3}) = f(3) + f(\frac{1}{9})$

1 1

$2 f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{3}{4}) = f(\frac{1}{})$

$\frac{1}{3}$

$\left(\frac{a}{b}\right)$

$f(\frac{1}{3}) = f(3) + f(\frac{1}{9})$ $f(\frac{1}{2})$

$f(a) + f(\frac{1}{b}) =$

1 2 3 4

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2}) = 0 + f(\frac{1}{2}) = 1 + f(2) + f(\frac{1}{4}) = 2 + f(\frac{1}{4}) = f(a) + f(b) + 2f(\frac{1}{b}) + \cancel{f(\frac{1}{b})}$

1 2

$f(1) = f(-2) + f(-\frac{1}{2}) = -1 + f(-\frac{1}{2}) =$

$= f(a) + f(b) + 2f(\frac{1}{b})$

-3

$f(\frac{1}{2})$ $f(2)$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$= -1 + f(-2) + f(\frac{1}{4}) =$

$-3 + f(\frac{1}{4}) =$

$f(a) - f(b)$

$f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4}) = 0 + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$ -3

$f(\frac{1}{2}) = -1$

$2f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

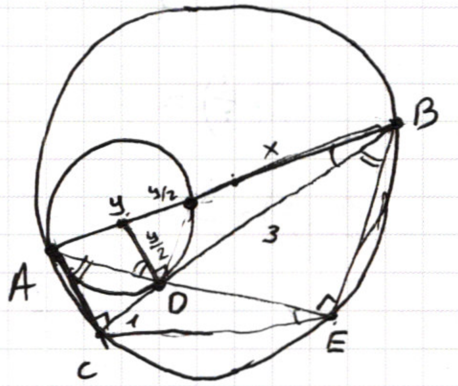
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

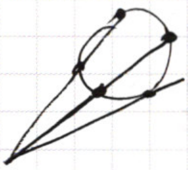
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$9 = x(x+y)$$

$$9 = \frac{y^2}{4} + x^2 - xy - \frac{y^2}{4}$$

$$\frac{\left(x+\frac{y}{2}\right)}{x+y} = \frac{3}{4}$$

$9 = x^2 - 9$

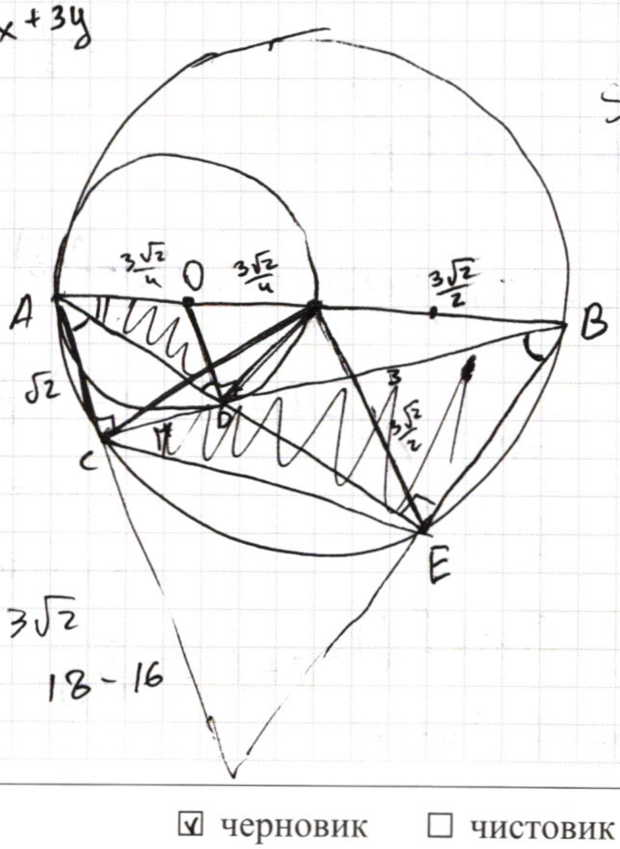
$x^2 = 18$

$x =$

$4x + 2y = 3x + 3y$

$x = y$

$S = 2ab \cdot \sin \alpha$



$2\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}$

$18 - 16$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$ $\boxed{b^2-ac\geq 0}$

$x=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}}$

a
$b=aq$
$c=aq^2$
$x=aq^3$

a^2q^2

$aq^3=\frac{-aq\pm\sqrt{a^2q^2-a^2q^2}}{a}$

$aq^3=-q$

$c=aq^2=-1$

15 18

21

12

$21-12=9$

3

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$y-2x\geq0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-2y+2$

$y^2-5xy+4x^2+2x+2y-2=0$

$y(y-x+2)$

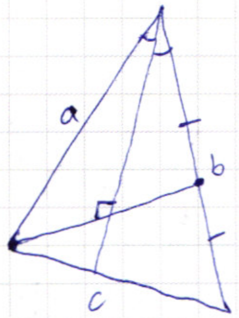
$+4x(x-y+2)$

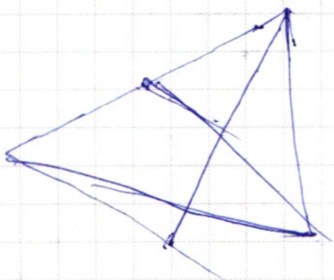
$(y-x+2)(y-4x)$

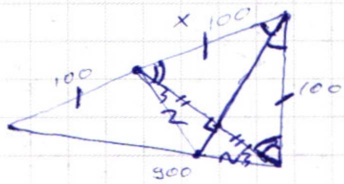
$9-6$

6 6 9

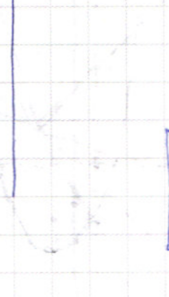
$a+b+c=1200$







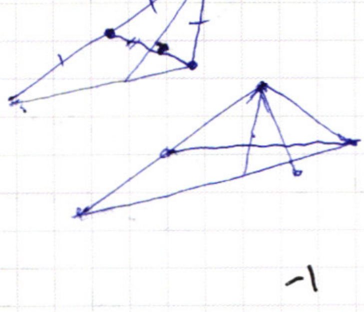
$a+3x=1200$



$a+3x=1200$

$\boxed{\begin{matrix} a\neq0 \\ a:3 \\ a<1200 \end{matrix}}$

$x<a<3x$



$a<3x$

$2x<a+x$

$a>x$

$x<2x+a$

$300\leq a<600$

$\frac{8}{3}+1$

-1

$\frac{4}{\frac{3}{2}}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$6x>a+3x>4x$

$6x>1200>4x$

$200<x<300$

$600<3x<900$

$-900<-3x<-600$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+y^2-2\cdot y\cdot 2+4-4+3=0$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2-\sqrt{2}-1=0$

$2x+y^2-4x-4y+3=0$

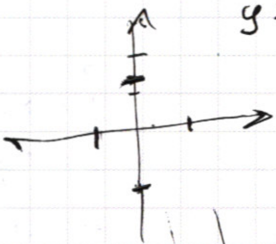
$2x+(x+1)^2-4$

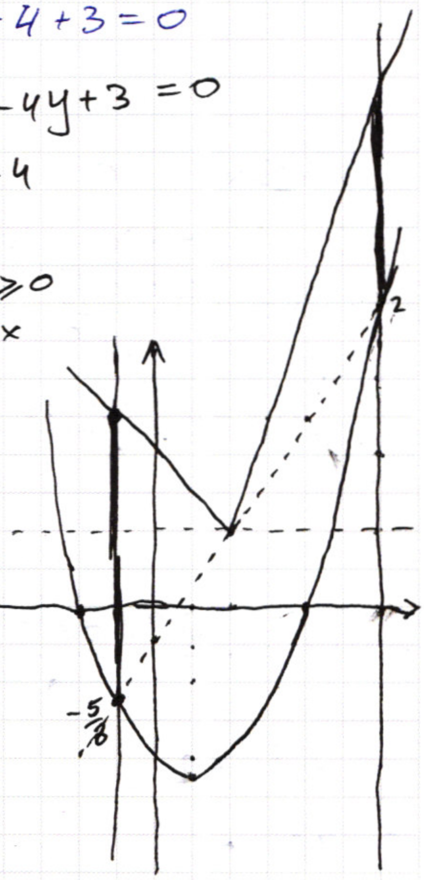
$2(x-1)^2+(y-2)^2=\sqrt{2}+1$

$y-2x\geqslant 0$

$y\geqslant 2x$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2}}+\frac{(y-2)^2}{\sqrt{\sqrt{2}+1}^2}=1}$$



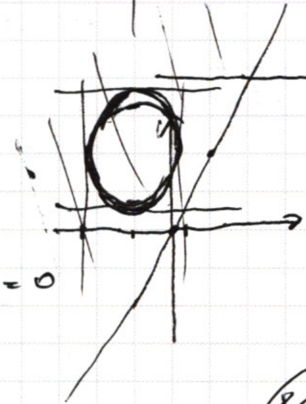


$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$y^2-xy+y+4x^2-4xy+2x-2=0$

$y(y-x+1)+4x(x-y+1)+6x-2=0$



$2x^2+y^2-4x-4y+3=x+1$

$\boxed{2x^2+y^2-5x-4y+2=0}$

$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+|2x-1|$

$y(y-4$

$2\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}\right.$

$2x^2-x-1\leq x+|2x-1|$

$2x^2-2x-1\leq|2x-1|$

$\left[\begin{array}{l}2x-1\geqslant 2x^2-2x-1\\ 2x-1\leq 2x+1-2x^2\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}2x^2-4x\leq 0\\ 2x^2-2\leq 0\end{array}\right.$

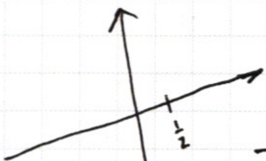
$\left\{\begin{array}{l}x(x-2)\leq 0\\ (x-1)(x+1)\leq 0\end{array}\right.$

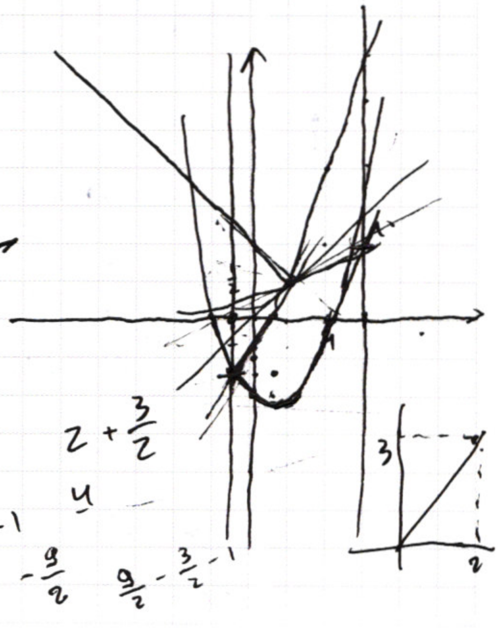
$x\in[-1;2]$

$-\frac{1}{2}-1$

$-\frac{3}{2}$

$\frac{6}{4}-\frac{1}{4}=$





$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

$ax+b\geqslant 2x^2-x-1$

$2x^2-x(a+1)-(1+b)\leq 0$

$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}-1$

$y=$

$2x-1\geqslant 0$

$x\geqslant\frac{1}{2}$

$-\frac{5}{8}$

$2+\frac{3}{2}$

4

$2a=3$

$k=\frac{3}{2}$

$3x-1$

$1-x$

$2x^2-x-1$

$D=1+8=9$

$x=\frac{1\pm 3}{4}$

$x=1$

$x=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-1$

$-\frac{9}{8}$

$\frac{9}{8}-\frac{3}{2}-1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

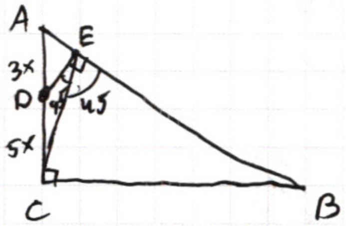
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

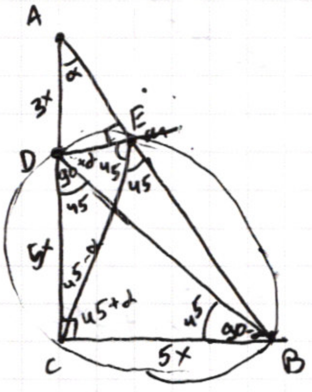
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

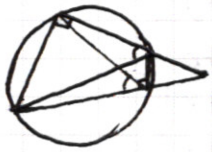
ШИФР

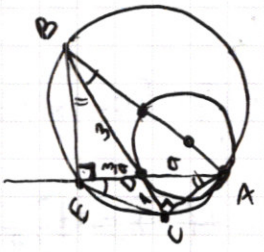
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА









$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{2xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y \geq 2x$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(p)=[p/2]$

$f(ab)=f(a)+f(b)$, $p \in P$

$a, b \in Q$

$a, b > 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y - 2x =$

$y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 0$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

$-10xy + 5xy \quad x + 5x$

$\cancel{2(xy + y + 1)}$

$2x\left(x - 5y + \frac{1}{2}\right) + 5(x + y - 1)$

$\cancel{2x(x}$

$\cancel{x(2x + 5y + 1) +}$

$2x\left(x - 5y + \frac{1}{2}\right) + 5 + 5(x + y - 1)$

$(x + y - 1)(2x$

$2x^2 + 2xy$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

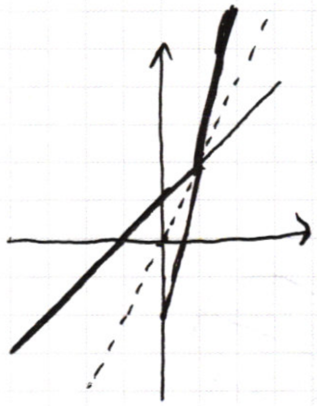
$y^2 + y - 2$

$\cancel{\frac{y^2}{x^2} - \frac{5y}{x} + 4 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0}$

$(y + x + 2)(x \quad 1$

$(ay + bx + c)(Ay + Bx + C) =$

$= aAy^2 + aByx + aCy + bAxy + bBx^2 + bCx + Acy + Bcx + cC$



$$\begin{cases} aA = 1 \\ aB + bA = -5 \\ aC + Ac = 1 \\ Bc + bC = 2 \\ cC = -2 \\ bB = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 + x \\ y = 4x - 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$2x^2 - 2(x^2 - 2x + 1) + 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 0$

$2(x - 1)^2 + y$

$-1 \quad 4$

$b = -1$

$B = -4$

$a = 1$

$A = 1$

$C = 2$

$c = -1$

$-2 + 4$

$\boxed{(y - x - 1)(y - 4x + 2)}$

$y^2 - 4xy + 2y - xy + 4x^2 - 2x - y + 4x - 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2$