

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- ✓ 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- ✓ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
- б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
- ✓ 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

- ✓ 7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

№ 4

Решение:

ABC - прямо.

$AD:AC = 3:5$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$

а) $\operatorname{tg}(\angle BAC) = ?$

б) $AC = \sqrt{29} \Rightarrow S_{CED} = ?$

а) Решение.

1) Проведем высоту CH в $\triangle ABC$

из точки $C \Rightarrow CH$

2) $\angle EHC + \angle CHE = 90^\circ$ - по

опр. высоты, $\angle GEH = \angle CEB = \angle DEB - \angle CED =$

$= 180^\circ - \angle AEF - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

3) и 2) $\Rightarrow \angle CEH = \angle ECH \Rightarrow EH = CH$

4) т.к. $CH \perp AB$ и $DE \perp AB$ то $CH \parallel DE$

5) 4) $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AE}{EH} = \frac{AD}{CH} = \frac{3}{2}$

Тогда пусть $EH = CH = 2y \Rightarrow AE = 3y$

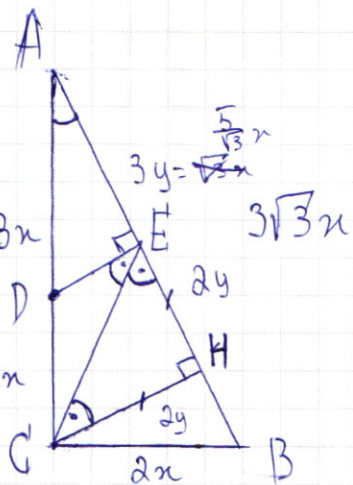
б) 5) $\Rightarrow \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{CH}{AH}$; 5) $\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{2y}{5y} = 0,4$

Ответ: 0,4

$$\text{б) } 1) \left. \begin{aligned} S_{DEC} &= \frac{DC}{AC} S_{AEC} \\ S_{AEC} &= \frac{AE}{AB} S_{ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{DEC} = \frac{DC \cdot AE \cdot AC \cdot CB}{2 \cdot AC \cdot AB} =$$

$$= \frac{2x \cdot \frac{5}{3}x \cdot 2x}{2 \cdot 3\sqrt{3}x} = \frac{10}{9}x^2 = \frac{10 \cdot AC^2}{9 \cdot 25} = \frac{2AC^2}{9 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 29}{45} = \frac{58}{45}$$

Ответ: $\frac{58}{45}$



№ 5

Решение

O_1 и O_2 - центры окр.

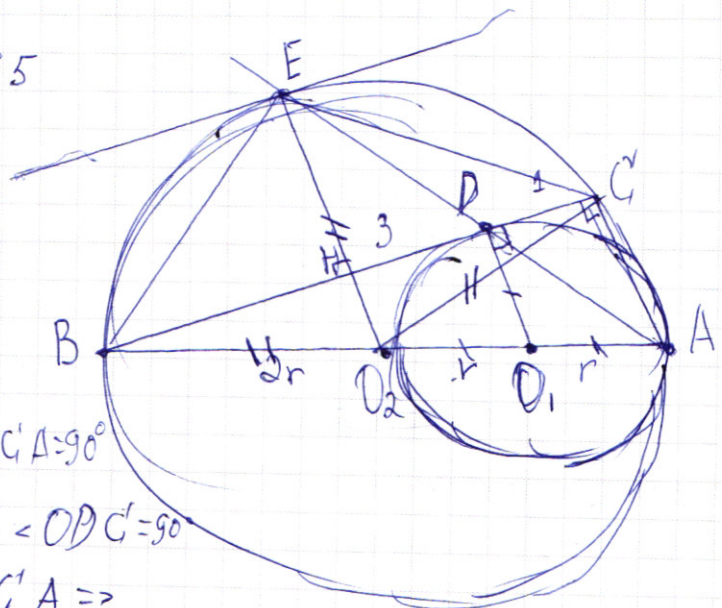
R и r - радиусы

$\triangle ABC$ - прямо. т.к.

медiana $CO_2 = \frac{AB}{2} \Rightarrow \angle BC'A = 90^\circ$

тогда по с-тому кас. $\angle O_1DC' = 90^\circ$

Тогда $\triangle BDO_1 \sim \triangle BC'A \Rightarrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$a \quad b \quad c \quad d$$

$$a \quad ay \quad ay^2 \quad ay^3$$

заменим эти 4 члена прогрессии в другом виде

Тогда

$$ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2axy + ay^2 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow a(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{т.к. } a \neq 0 \text{ то } x = -y$$

Тогда

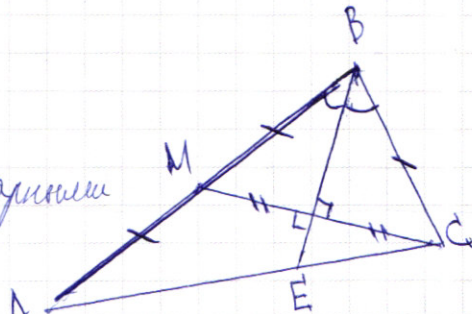
$$ay^3 = -y \Leftrightarrow \frac{ay^3}{y} = \frac{-y}{y} \Leftrightarrow ay^2 = -1 \quad \text{— третий член прогрессии}$$

Ответ: -1.

№ 2

Рассмотрим произвольный
треугольник с перпендикулярной
медианой и бисектрисой.

ABC (CM — медиана, BE — бис.)



BE — также бис. и высота для $\triangle MBC \Rightarrow MB = BC$, по св-ву

р. иб. треуг., Тогда одна сторона больше
другой в два раза, при том никакая сторона

в треуг. $\neq \frac{1}{2} = 600$, тогда мин. размер a
длины ~~одной~~ стороны $\sqrt{201}$, максимальная

299, значит всего треугольников 99.

Ответ: 99

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{BD_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 8R-4r=6R \Leftrightarrow r = \frac{R}{2}$$

Плюс $R = 2r \Rightarrow DO_1 = r \Rightarrow \sin(\angle CBA) = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos(\angle CBA) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$BD_1 \cos(\angle CBA) = BD \Leftrightarrow 3r - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$$S = S_{BEC} + S_{BCA} = \frac{BC \cdot CA}{2} + \frac{BC \cdot EH}{2} = \frac{BC^2}{2} (CA + EH)$$

$$CA = \frac{4}{3} DO_1 = \sqrt{2}$$

$$EH = EO_2 - HO_2 = R - \sqrt{4r^2 - 4} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Плюс $S = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $4\sqrt{2}$

№ 7

$$f(x/y) =$$

$$f(x) = f(x/y) + f(y) \Rightarrow f(x/y) = f(x) - f(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x/y) < 0 \text{ когда } f(y) > f(x)$$

$$f(1) = 0 - \text{кон}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(8) = f(4) + f(2) = 3$$

$$f(3) = 2$$

$$f(9) = f(3) + f(3) = 2$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 2$$

$$f(10) = f(5) + f(2) = 3$$

$$f(5) = 2$$

$$f(11) = 5$$

$$f(6) = f(2) + f(3) = 2$$

$$f(12) = f(6) + f(2) = 3$$

$$f(7) = 3$$

$$f(13) = 6$$

1

$$f(14) = f(7) + f(2) = 4$$

$$f(15) = f(5) + f(3) = 3$$

$$f(16) = f(8) + f(2) = 4$$

$$f(17) = 8$$

$$f(18) = f(9) + f(2) = 3$$

$$f(19) = \cancel{f(9)}$$

$$f(20) = f(10) + f(2) = 4$$

$$f(21) = f(17) + f(3) = 4$$

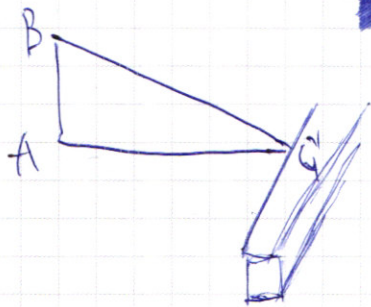
Тогда всего пар:

$$20 + 19 + 18 + 17 + 12 + 6 + 2 = 94$$

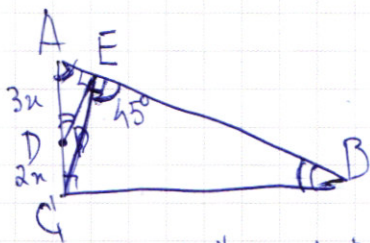
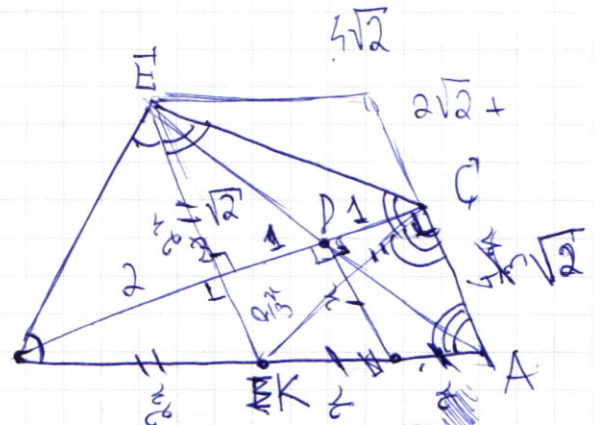
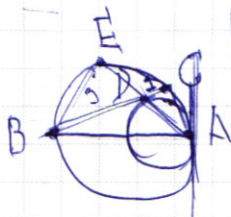
Ответ: 94

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \alpha\pi + \beta = -\frac{1}{4} + 1,5$$

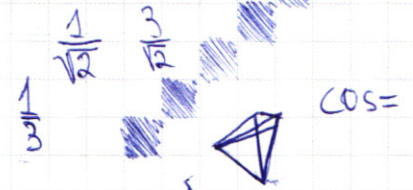
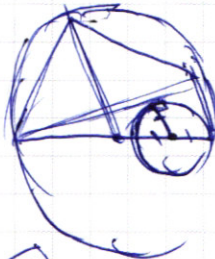
$$\alpha = -\frac{5}{8} \quad \beta = \frac{5}{4}$$



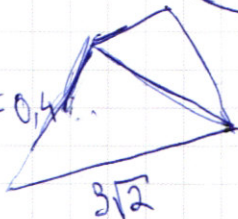
$$-\frac{a}{4} + \beta = -\frac{5}{8}$$



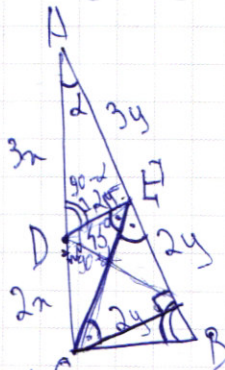
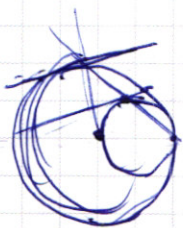
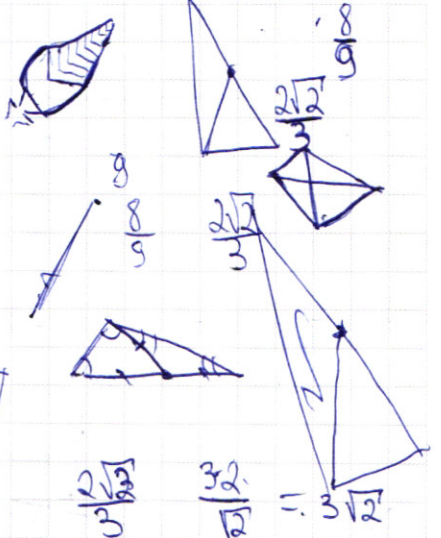
$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \frac{3}{2\sqrt{2}}$$



$$\frac{1}{3} = 0,33$$



$$\frac{1}{3}$$



$$180^\circ - 90 + \alpha$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 10xy^2 - 4y^2 - 3x^2y^2$$

$$f(x) = f(x/y) + f(y)$$

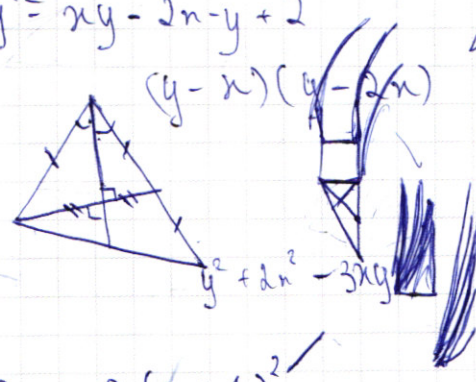
$$f(x/y) = f(x) - f(y)$$

$$2\alpha + 2\beta = 180$$

$$\alpha + \beta = 90$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-2x)(y-2x) + y$
 $(2x-1,5)(1,5y-2)$
 $(2x+1)(y-2)$
 $3x(y-1)$
 $x(3y-4)$
 $3xy-4x-4y+3$
 $y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}$
 $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$
 $4x^2-4xy+y^2 = xy-2x-y+2$
 $(y-x)(y-2x)$
 $400 \quad 800$
 399
 y^2-4y+1
 $y^2-2y-2y+1$
 $(y-2)^2$
 $2(x^2-y^2) + 3y^2$
 $4x^2-4xy+y^2$
 $-(2x^2+1)4x^2-5xy+y^2 = -2x-y+2$
 $4x^2-5xy+y^2+2x+y=2$
 $-2x^2+5xy-6x-5y=1$
 $2x^2+5xy+6x+5y+1=0$
 $2x^2(x$
 $2(x-y)(x+y)$
 $(1-x)(2x-4)$
 $(1-x)(2x-4)$
 $4x^2-5xy+y^2+2x+y-2$
 $-2x^2+5xy+6x+5y+5$
 $(y-2)^2+2(x-2)^2=3$
 $5(xy+y+1)$
 $-2x(x-3)$
 $(x+1)(y+6)-1$
 $-2x^2+x$
 $2x(-2x+1)$
 $(x+1)(x-1)$
 $(1-x)(2x-4)$
 -4





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 | 1
4 | 2
6 | 3

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

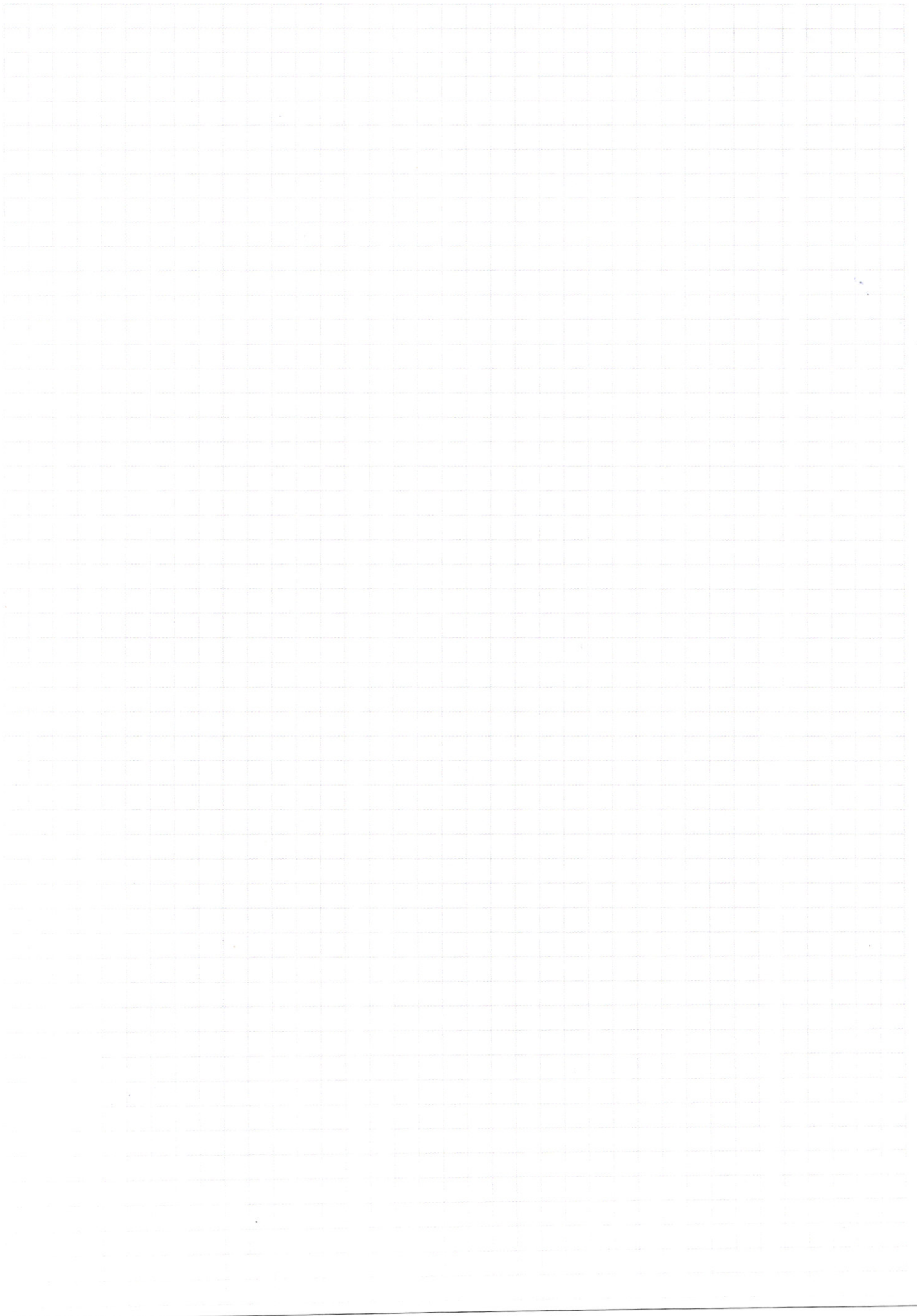
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)